Régularité Besov-Orlicz du temps local Brownien

Yueyun HU & Mohamed MELLOUK
Laboratoire de Probabilités URA 224. Université Pierre et Marie Curie
4 Place Jussieu. F-75252 Paris Cedex 05, France.
hu@ccr.jussieu.fr & mellouk@proba.jussieu.fr

Résumé - *Soit $(B_t, t \in [0,1])$ un mouvement Brownien linéaire issu de 0, et $(L_t(x), t \geq 0, x \in \mathbb{R})$ son temps local. On montre que pour tout $t > 0$ la trajectoire en espace du temps local Brownien admet la même rǵularité Besov-Orlicz que le mouvement Brownien lui même. (i.e. la fonction $x \to L_t(x)$ appartient presque sûrement à l'espace de Besov-Orlicz $\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}_{M_2,\infty}$ défini par la $\mathcal{N}$-fonction $M_2(x) = e^{|x|^2} - 1$). Notre résultat est optimal.*

Besov-Orlicz regularity of the Brownian local time

Abstract - *Let $(B_t, t \in [0,1])$ be a linear Brownian motion starting from 0 and denote $(L_t(x), t \geq 0, x \in \mathbb{R})$ its local time. We prove that, the spatial trajectories of the Brownian local time, has the same Besov-Orlicz regularity as the Brownian motion itself (i.e. for all $t > 0$, a.s. the function $x \to L_t(x)$ belongs to the Besov-Orlicz space $\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}_{M_2,\infty}$ with $M_2(x) = e^{|x|^2} - 1$). Our result is optimal.*

AMS Classifications: 41A15, 60J55, 60J65.

1 Introduction, notations et définitions

Pour la théorie de base des espaces de Besov-Orlicz nous renvoyons à [6]. Cependant nous présentons un bref aperçu sur ces espaces.

Espaces Besov-Orlicz. Une fonction $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est appelée $\mathcal{N}$-fonction si elle est nulle en 0, paire et convexe. Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$, l'espace d'Orlicz $L^*_M(I)$ associé à la $\mathcal{N}$-fonction M est l'espace des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$, mesurables telles que :

$$\| f \|_M := \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda} \left[1 + \int_I M(\lambda f(t))\, dt \right] < \infty.$$

Le module de continuité de f en norme d'Orlicz est

$$\omega^{(I)}_M(f\,;\delta) = \sup\{ \|\Delta_h f\|_M \,; \quad 0 < h < \delta\},\ \delta \leq 1,$$

où $\Delta_h f(x) = I_h(x)\,[f(x+h)-f(x)]$ avec I_h fonction indicatrice de $I\cap(I-h)$. Soit $\omega_\alpha(t) = |t|^\alpha$ pour $t \in I, \alpha \in]0,1[$. L'espace de Besov-Orlicz $\mathcal{B}^\alpha_{M,\infty}(I)$ est l'espace des fonctions f de $L^*_M(I)$ telles que :

$$\|f\|_{\alpha,M,\infty} = \|f\|_M + \sup_{0<t<|I|} \frac{\omega^{(I)}_M(f\,;\,t)}{\omega_\alpha(t)} < \infty,$$

où $|I|>0$, désigne la mesure de Lebesgue de l'intervalle I. C'est un espace de Banach non séparable qui possède un sous espace fermé séparable $\mathcal{B}^{\alpha,0}_{M,\infty}(I)$ constitué de fonctions vérifiants en plus $\omega^{(I)}_M(f\,;\,t) = o(\omega_\alpha(t))$ lorsque $t\to 0^+$. L'espace $L^p(I), 1\le p<\infty$, est l'espace de Lebesgue classique muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p(I)} = \Big(\int_I |f(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Remarque 1.1 *Lorsque $M(x) = |x|^p/p, p\ge 1$, l'espace $\mathcal{B}^\alpha_{M,\infty}(I)$ coïncide avec l'espace de Besov standard $\mathcal{B}^\alpha_{p,\infty}(I)$ muni de la norme :*

$$\|f\|_{\alpha,p,\infty} = \|f\|_{L^p(I)} + \sup_{0<t<|I|} \frac{\omega^{(I)}_p(f\,;\,t)}{\omega_\alpha(t)},$$

avec $\omega^{(I)}_p(f\,;\,t) = \sup\{\|\Delta_h f\|_{L^p(I)} : 0<h<t\}$, dont le sous espace séparable correspondant est noté $\mathcal{B}^{\alpha,0}_{p,\infty}(I)$. Lorsque $p=\infty$, l'espace $\mathcal{B}^\alpha_{\infty,\infty}(I)$ est equivalent à l'espace $\mathcal{C}_\alpha(I)$ des fonctions Hölderiennes d'ordre α sur I. Voir [9] ou [11] pour plus de details sur les espaces de Besov.

Espaces de Besov-Orlicz associés à des $\mathcal{N}$-fonctions exponentiel. Considèrons les $\mathcal{N}$-fonctions $(M_\beta)_{0<\beta<\infty}$ définies par :

$$M_\beta(x) = \begin{cases} e^{|x|^\beta}-1, & \text{si } 1\le\beta<\infty,\\ E_\beta(x)-E_\beta(0), & \text{si } 0<\beta<1,\end{cases}$$

où $E_\beta(-x) = E_\beta(x)$ est l'extension de la partie convexe de e^{x^β} sur (x_β,∞) par sa tangente en $x_\beta>0$, e^{x^β} change de concavité au point x_β ($E_\beta(x)\ge \exp(x^\beta)$ pour tout x). Le théorème 3.4 de Ciesielski [5] nous donne une caractérisation de la norme $\|\cdot\|_{M_\beta}$ en terme de normes L^p, c'est à dire que pour tout β, $0<\beta<\infty$, il existe une constante $0<C_\beta<\infty$ telle que, pour tout $f\in L^*_{M_\beta}(I)$ on a :

$$\frac{1}{C_\beta}\sup_{p\ge1}\frac{\|f\|_{L^p(I)}}{p^{\frac{1}{\beta}}} \le \|f\|_{M_\beta} \le C_\beta \sup_{p\ge1}\frac{\|f\|_{L^p(I)}}{p^{\frac{1}{\beta}}}.$$

Il s'en suit l'équivalence des normes suivantes :

$$\|f\|_{\alpha,M_\beta,\infty} \sim |f|_{\alpha,M_\beta} := \sup_{p\ge1}\frac{\|f\|_{L^p(I)}}{p^{\frac{1}{\beta}}} + \sup_{0<t<|I|}\sup_{p\ge1}\frac{\omega^{(I)}_p(f\,;\,t)}{\omega_\alpha(t)\,p^{\frac{1}{\beta}}}\ , \tag{1}$$

où $\omega_p^{(I)}(f\,;\,t)$ est défini dans Remarque 1.1.

Le mouvement Brownien, défini sur sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un processus stochastique Gaussien $\{B_t; t \geq 0\}$, à trajectoires continues, caractérisé par sa covariance et sa moyenne

$$cov(B_s, B_t) = \min(s,t) \quad \text{et} \quad E(B_t) = 0, \ \ \text{pour} \ \ s, t \geq 0.$$

Les espaces de Besov-Orlicz associés à ces $\mathcal{N}$-fonctions sont isomorphes à des espaces de suites réelles, ce qui permet de lire de manière simple les propriétés trajectorielles de certains processus gaussiens sur la covariance de suite de variables aléatoires gaussiennes, ainsi Ciesielski a montré dans [5]:

Théorème A (Ciesielski). *Pour le mouvement Brownien* $\{B_t, t \in [0,1]\}$ *on a*

$$P(B_. \in \mathcal{B}^{\frac{1}{2}}_{M_2,\infty}([0,1])) = 1 \ \ et \ \ P(B_. \in \mathcal{B}^{\frac{1}{2},0}_{M_2,\infty}([0,1])) = 0.$$

Pour $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$, si l'on cherche à mesurer le nombre de visites du mouvement Brownien en x, il ne sert à rien de considérer le temps passé en x puisque $\int_0^t \mathbb{1}_{(B_s = x)} ds = 0$, presque sûrement, $\mathbb{1}$ étant la fonction indicatrice. La bonne approche sera d'étudier la densité de temps d'occupation en x, définie par la limite suivante :

$$\text{presque sûrement} \qquad L_t(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{(x-\epsilon \leq B_s \leq x+\epsilon)}\, ds, \qquad t > 0.$$

Pour l'existence et les propriétés de cette limite nous renvoyons à Revuz-Yor [10]. La variable $L_t(x)$ est appelée temps local au niveau x, à l'instant t du mouvement Brownien B. On note $(L_t(x), t \geq 0, x \in \mathbb{R})$ une version presque sûrement continue du temps local (voir Trotter [12] pour son existence).

La section suivante montre que la trajectoire spatiale du temps local Brownien admet la même régularité que le Brownien lui même, c'est à dire qu'elle appartient presque sûrement à l'espace de Besov-Orlicz $\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}_{M_2,\infty}$ (espace modelé sur l' espace d'Orlicz associé à la $\mathcal{N}$-fonction $M_2(x) = e^{|x|^2} - 1$ pour le module de continuité $\omega(t) = \sqrt{t}$ voir [6], c'est un espace de Banach contenu dans l'ensemble des fonctions Hölderiennes d'ordre $\alpha < \frac{1}{2}$, s'injectant dans une classe d'espace de Besov $\mathcal{B}^{\alpha}_{p,q}, \alpha < \frac{1}{2}$ voir [9]), ce qui généralise à la fois le résultat de Boufoussi-Roynette dans [4], à savoir que cette trajectoire appartient presque sûrement à l'espace de Besov $\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}_{p,\infty}$ et celui de Boufoussi [3] qui étend ceci à l'espace de Besov-Orlicz $\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}_{M_1,\infty}$ avec $M_1(x) = e^{|x|} - 1$.

Remarque 1.2 *Notons les injections continues suivantes :*

$$\mathcal{C}_{\frac{1}{2}} \hookrightarrow \mathcal{B}^{\frac{1}{2}}_{M_2,\infty} \hookrightarrow \mathcal{B}^{\frac{1}{2}}_{M_1,\infty} \hookrightarrow \mathcal{B}^{\frac{1}{2}}_{p,\infty}\ ;$$

qui montrent que notre résultat améliore clairement celui de Boufoussi [3] et par suite celui de Boufoussi-Roynette [4].

2 Régularité Besov-Orlicz en la variable espace du temps local Brownien

Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement Brownien réel défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, issu de 0 et $(\mathcal{F}_t)$ la filtration canonique de B ($\mathcal{F}_t$ est la tribu engendrée par $(B_u, 0 \leq u \leq t)$), $(L_t(x), t \geq 0, x \in \mathbb{R})$ une version presque sûrement continue de son temps local.

Théorème 2.1 – *Pour tout $t > 0$, la trajectoire $x \to L_t(x)$ appartient presque sûrement à l'espace de Besov-Orlicz $\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}_{M_2,\infty}(I)$ pour chaque intervalle compact $I \subset \mathbb{R}$.*

Preuve: Soit $T_{1/2}$ un temps exponentiel, de paramètre 1/2 et indépendant du mouvement Brownien B. La propriété de scaling pour le temps local permet d'écrire

$$(L_{T_{1/2}}(x), x \in \mathbb{R}) \overset{\text{(loi)}}{=} \left(\sqrt{T_{1/2}}\, L_1\Big(x/\sqrt{T_{1/2}}\Big), x \in \mathbb{R}\right) .$$

Pour prouver le théorème 2.1 il suffit de montrer que $x \to L_{T_{1/2}}(x)$ appartient presque sûrement à $\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}_{M_2,\infty}(I)$ pour chaque intervalle compact $I \subset \mathbb{R}$. Pour ce faire, il suffit de travailler avec un intervalle I de la forme $I = [-b, c]$ avec $b, c > 0$. Rappelons le théorème de D. R. Ray [8] pour le processus $(L_{T_{1/2}}(x), x \in \mathbb{R})$, dont la version qui suit est due à Biane-Yor [1].

Théorème B (Biane-Yor). *(i) Les variables $L_{T_{1/2}}(0)$ et $B_{T_{1/2}}$ sont indépendantes, et ont pour distribution respectivement $P(L_{T_{1/2}}(0) \in ds) = e^{-s}ds$; $P(B_{T_{1/2}} \in dx) = \frac{1}{2}e^{-|x|}dx$, $x \in \mathbb{R}$;*
(ii) Conditionnellement à $L_{T_{1/2}}(0) = s$, et $B_{T_{1/2}} = a > 0$, le processus $(L_{T_{1/2}}(x), x \in \mathbb{R})$ est un processus de Markov inhomogène de générateur : $2x\ (d^2/dx^2) - 2\ (x - \mathbb{1}_{(0\leq x\leq a)})\ (d/dx)$.

Nous allons utiliser ce théorème pour établir que

$$P\left(x \to L_{T_{1/2}}(x) \in \mathcal{B}^{\frac{1}{2}}_{M_2,\infty}(I)\ \middle|\ L_{T_{1/2}}(0) = s, B_{T_{1/2}} = a\right) = 1 \quad \text{tout} \quad s > 0, a \in \mathbb{R},$$

ce qui implique $P(x \to L_{T_{1/2}}(x) \in \mathcal{B}^{\frac{1}{2}}_{M_2,\infty}(I)) = 1$, et par conséquent le théorème 2.1.

Sans perte de généralité on suppose que $a > 0$. Le résultat de Biane-Yor montre que la loi conditionnelle de $(L_{T_{1/2}}(t), t \in \mathbb{R})$ sachant $(L_{T_{1/2}}(0) = s, B_{T_{1/2}} = a)$ est exactement celle de

$(X_t, t \in \mathbb{R})$, solution (positive) de l'équation différentielle stochastique (avec la convention: $\int_0^t := -\int_t^0$, si $t \leq 0$):

$$X_t = s + 2\int_0^t \sqrt{X_u}\, dY_u - 2 \int_0^t (X_u - 1\!\!1_{(0 \leq X_u \leq a;\, u > 0)})\, du, \quad t \in \mathbb{R},$$

où $(Y_u, u \in \mathbb{R})$ est un mouvement Brownien réel issu de 0, défini sur $\mathbb{R}$ tout entier, c'est à dire $(Y_u, u \geq 0)$ et $(Y_{-u}, u \geq 0)$ sont deux mouvements Browniens réels indépendants issus de 0. Remarquons que le processus $(X_t, t \geq 0)$ (resp: $(X_{-t}, t \geq 0)$) est adapté à la filtration naturelle de $(Y_t, t \geq 0)$ (resp: $(Y_{-t}, t \geq 0)$. Ainsi tout le problème consiste à montrer que

$$P\Big(t \to X_t \in \mathcal{B}^{\frac{1}{2}}_{M_2,\infty}(I)\Big) = 1.$$

Rappelons que $I = [-b, c]$, et comme $\sup_{s \in [-b,c]} X_s < \infty$ presque sûrement (X_t étant positive et continue), la partie drift $\int_0^t$ est Lipschitzienne donc à fortiori appartient à $\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}_{M_2,\infty}(I)$; quant à la partie intégrale stochastique i.e. $\displaystyle\int_0^t \sqrt{X_s}\; dY_s$, pour $-b \leq t \leq c$, son appartenance à l'espace $\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}_{M_2,\infty}([-b, c])$ est une conséquence immédiate du résultat suivant que Boufoussi [2] a montré une version différente pour les espaces des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

Proposition. *Soit $(H_t, t \geq 0)$ (resp: $(H_{-t}, t \geq 0)$) un processus réel progressivement mesurable par rapport à la filtration naturelle de $(Y_t, t \geq 0)$ (resp: $(Y_{-t}, t \geq 0)$) tel que pour tout $T > 0$, $\sup_{-T \leq t \leq T} |H_t| < \infty$, presque sûrement, où $(Y_u, u \in \mathbb{R})$ est un mouvement Brownien réel issu de 0, défini sur $\mathbb{R}$ tout entier. Alors la trajectoire $s \to \displaystyle\int_0^s H_u\, dY_u$ appartient presque sûrement à $\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}_{M_2,\infty}(I)$ pour chaque intervalle compact $I \subset \mathbb{R}$.*

Démonstration : L'idée de la preuve se base sur le changement du temps (voir aussi [2]) et sur le lemme suivant :

Lemme 2.2 *Soit $\alpha \in]0, 1[, 0 < \beta < \infty$ et $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et strictement croissante telle que pour chaque $T > 0$, $0 < \inf_{-T \leq x \leq T} \sigma'(x) \leq \sup_{-T \leq x \leq T} \sigma'(x) < \infty$. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ appartient à $\mathcal{B}^{\alpha}_{M_\beta,\infty}(I)$ pour chaque intervalle compact $I \subset \mathbb{R}$, alors la fonction $f \circ \sigma$ vérifie la même régularité.*

Preuve : La présente preuve est issue d'une suggestion du referee. D'après l'équivalence (1), il suffit de travailler avec la norme $|f|_{\alpha,M_\beta}$, définie dans (1), et établir l'existence d'une constante C_σ ne épendant pas de $1 \leq p < \infty$ telle que pour $J = \sigma^{-1}(I)$ et pour tout $f \in L^p(I)$:

$$\frac{1}{C_\sigma}\|f\|_{L^p(I)} \leq \|f \circ \sigma\|_{L^p(J)} \leq C_\sigma \|f\|_{L^p(I)} \tag{2}$$

et pour $0 < t \leq t_0$ (t_0 independant de p) :

$$\frac{1}{C_\sigma}\omega_p^{(I)}(f;\ t) \leq \omega_p^{(J)}(f\circ\sigma; t) \leq C_\sigma\ \omega_p^{(I)}(f;\ t)\ . \tag{3}$$

Les deux inégalités de (2) sont immédiates en utilisant le changement de variable $\sigma(t) = s$. Pour montrer (3), nous allons utiliser l'équivalence entre $\omega_p^{(I)}(f;\ t)$ et la K-fonctionnelle $K(f,\,t,\,L^p(I),\,W_p^1(I))$ définie par :

$$K(f,\,t,\,L^p(I),\,W_p^1(I)) = \inf_{g\in W_p^1(I)}\{\|f-g\|_{L^p(I)}\ +\ t\|g\|_{W_p^1(I)}\},\quad t\geq 0\ \ ,$$

où $W_p^1(I)$ est l'espace de Sobolev d'ordre 1 correspondant à l'exposant p (espace de fonctions définies sur I absolument continues dont la derivée est dans L^p), muni de la norme :

$$\|g\|_{W_p^k(I)} = \|g\|_{L^p(I)}\ +\ \|g'\|_{L^p(I)}\ \ .$$

On se refère à R. A. DeVore, G. G. Lorentz [7] (Chap 6), pour les K-fonctionnelles.
Le théorème de Johnen (voir [7], Theorem 2.4 page 177), montre l'existence de $C_1 > 0$ et de $t_0 > 0$ ne dépendants pas de p telles que pour tout $0 < t \leq t_0$,

$$\frac{\omega_p^{(I)}(f;\ t)}{C_1} \leq K(f,\,t,\,L^p(I),\,W_p^1(I)) \leq C_1\ \omega_p^{(I)}(f;\ t),$$

ainsi, pour prouver (3), il suffit d'établir l'existence d'une constante $C_\sigma > 0$ ne dépendant que de σ telle que :

$$\frac{K(f,\,t,\,L^p(I),\,W_p^1(I))}{C_\sigma} \leq K(f\circ\sigma\,,t,\,L^p(J),\,W_p^1(J)) \leq C_\sigma\ K(f,\,t,\,L^p(I),\,W_p^1(I)) \tag{4}$$

Or, $h\in W_p^1(J)$ est équivaut à $\tilde{h} := h\circ\sigma^{-1}\in W_p^1(I)$, sous l'hypothèse sur σ, et par suite

$$\begin{aligned}
K(f\circ\sigma,\,t,\,L^p(J),\,W_p^1(J)) &= \inf_{h\in W_p^1(J)}\{\|f\circ\sigma - h\|_{L^p(J)}\ +\ t\|h'\|_{L^p(J)}\}\\
&= \inf_{\tilde{h}\in W_p^1(I)}\{\|(f-\tilde{h})\circ\sigma\|_{L^p(J)}\ +\ t\|(\tilde{h}'\circ\sigma)\cdot\sigma'\|_{L^p(J)}\}\\
&\leq \max\{1,\|\sigma'\|_{L^\infty(I)}\}\cdot\|\frac{1}{\sigma'}\|_{L^\infty(I)}\cdot K(f,\,t,\,L^p(I),\,W_p^1(I)).
\end{aligned}$$

On obtient l'inégalité à droite de (4); quant à l'inégalité à gauche , il s'obtient de façon similaire en remplaçant le maximum par l'infimum . Ceci achève alors la démonstration du lemme 2.2.

Reprenons maintenant les notations du théorème ci-dessus, par un argument de localisation, on peut supposer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\sup\limits_{-\infty<t<\infty}|H_t| \leq C$. Ensuite remarquons que par la représentation de Dubins-Schwarz (voir Revuz-Yor [10] pp. 173), on a

$$\int_0^t H_s\,dB_s + (C+1)B_t = \beta_{\sigma(t)},\quad t\in\mathbb{R}$$

avec un mouvement Brownien réel $(\beta_u, u \in \mathbb{R})$ issu de 0 défini sur $\mathbb{R}$ tout entier, et $\sigma(t) = \int_0^t (H(s) + (C+1))^2\, ds, t \in \mathbb{R}$ (avec convention $\int_0^t = -\int_t^0$ si $t < 0$). Alors le résultat cherché en découle du Lemme 2.2, en notant que le mouvement Brownien $(\beta_u, u \in \mathbb{R})$ défini sur $\mathbb{R}$ tout entier appartient presque sûrement à $\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}_{M_2,\infty}(I)$ pour chaque intervalle compact $I \subset \mathbb{R}$. En fait, prenons sans perte de généralité $I = [-b, c]$ avec $b, c > 0$; L'appartenance de $(\beta_s, -b \leq s \leq c) \in \mathcal{B}^{\frac{1}{2}}_{M_2,\infty}([-b, c])$ est une conséquence directe du Théorème A et la remarque que $t \in [0,1] \to (\beta_{-b+(b+c)t} - \beta_{-b})/\sqrt{b+c}$ est un mouvement brownien défini sur $[0,1]$.

Remarque 2.3 *Boufoussi-Roynette ([4]) ont montré que pour tout $p > 2$ et $a > 0$, $P\Big(L_1(.) \in \mathcal{B}^{\frac{1}{2},0}_{p,\infty}([0,a])\Big) = 0$. Comme $\mathcal{B}^{\frac{1}{2},0}_{M_2,\infty}([0,a]) \subset \mathcal{B}^{\frac{1}{2},0}_{p,\infty}([0,a])$, on a*

$$P\Big(L_1(.) \in \mathcal{B}^{\frac{1}{2},0}_{M_2,\infty}([0,a])\Big) = 0.$$

Notre résultat est donc optimal.

Remerciements: Nous tenons à remercier le referee anonyme pour ses nombreux commentaires et suggestions pour la rédaction de ce papier, et ses diverses remarques judicieuses dont la démonstration du lemme 2.2 en provient.

References

[1] PH. BIANE et M. YOR, Sur la loi des temps locaux Browniens pris en un temps exponentiel, *Séminaire de Probabilités XXII*. 454-466. Lect. Notes in Maths. 1321. Berlin. Springer-Verlag. (1988).

[2] B. BOUFOUSSI, Espaces de Besov: Caractérisations et applications. *Thèse de l'Université Henri-Poincaré Nancy-I* (1994).

[3] B. BOUFOUSSI, Régularité du temps local Brownien dans les espaces de Besov-Orlicz, *Studia Mathematica* 118, (1996), 145-156.

[4] B. BOUFOUSSI et B. ROYNETTE, Le temps local Brownien appartient presque sûrement à l'espace de Besov $\mathcal{B}^{1/2}_{p,\infty}$, *C.R. Acad. Sci. Paris* série I 316 (1993), 843-848.

[5] Z. CIESIELSKI, Orlicz spaces, spline systems, and Brownian motion, *Constr. Approx.* 9 (1993), 191-222.

[6] Z. CIESIELSKI, G. KERKYACHARIAN and B. ROYNETTE, Quelques espaces fonctionnels associés à des processus Gaussiens, *Studia Mathematica* 107, (1993), 171-204.

[7] R. A. DeVore and G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*, (1993) Springer-Verlag Berlin, New York.

[8] D.B. Ray, Sejourn times of a diffusion process. *Illinois J. Math.* 7 (1963), 615-630.

[9] B. Roynette, Mouvement Brownien et espaces Besov, *Stochastics Rep.* 43 (1993), 221-260.

[10] D. Revuz and M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion.* 2nd edition. (1994) Springer-Verlag Berlin, New York.

[11] J. Peetre, New Thoughts on Besov spaces, *Duke Univ. Math.* Ser. I, (1976).

[12] H. Trotter, A property of Brownian motion paths, *Illinois J. Math.* 2 (1958), 425-433.