



Stage de *Fin d'Études* :
Simulations numériques des effets indirects foudre
et études statistiques en fonctionnel

Sofiane HADDAD

Maître de stage :
Richard PERRAUD



Simulation des effets indirects foudre et études statistiques en fonctionnel

Rapport de stage présenté dans le cadre de l'obtention du diplôme d'ingénieur en Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique (MACS) de Sup'Galilée

Mars 2009 / Août 2009

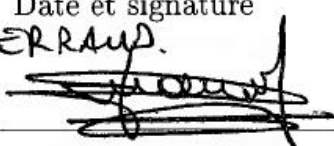
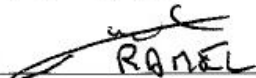
Étude réalisée par M. HADDAD Sofiane

Travaux encadrés par :

- Richard PERRAUD, Tuteur EADS
- Ingénieur

et

- Olivier LAFITTE, Tuteur école
- Directeur de la formation MACS

Visa du responsable de stage	Visa du service Sécurité
15.09.2009 Date et signature Mr PERRAUD. 	15-09-2009 Date et signature Po. BARDÉ 

Ce document n'a fait pas l'objet d'une décision de classification.

Ce rapport contient 93 pages numérotées n° 1/93 à 93/93.
3 exemplaires ont été édités sous format papier.

Table des matières

Remerciements	5
Introduction et contexte	8
I. Contexte du stage	9
1. Le groupe EADS	13
1.1. Le groupe EADS	13
1.2. Innovation Works	13
1.3. Le service Electromagnétisme	14
1.4. Ma mission	14
2. Notions foudre et interaction avec aéronefs	15
2.1. Présentation du phénomène	15
2.2. Interaction foudre/aéronef	15
2.3. Effets indirects de la foudre	16
2.4. Formes d'ondes du courant foudre	16
II. Simulation des effets indirects foudre par méthode filaire et validations	19
Introduction	21
3. Méthode filaire pour l'étude des structures foudroyées	23
3.1. Présentation du problème physique	23
3.2. Modélisation physique : vers le modèle de ligne de transmission	23
3.2.1. Prise en compte des couplages résistifs	23
3.2.2. Prise en compte des couplages inductifs	24
3.2.3. Vers la ligne de transmission en injection foudre et injection fonctionnelle	25
3.3. Charges en entrée	27
3.4. Calcul du champ magnétique par la formule Biot et Savart	27
Méthodologie de validation	29
4. étude de l'injection foudre dans un cylindre	31
4.1. Injection de type foudre dans un cylindre et analyse fine	31
4.1.1. Description du cas-test	31
4.1.2. Résultats et analyse	31
4.2. Rayonnement de la structure	33
5. Répartition de courant sur une structure à deux zones	35
5.1. Injection de type foudre dans une structure à deux zones	35
5.1.1. Description du cas-test	35
5.1.2. Résultats	35
5.2. Rayonnement de la structure	37
6. Étude de la distribution de courant dans une structure de type voilure	39
6.1. Présentation du cas-test et résultats	39
6.2. Répartition du courant	39
6.3. Rayonnement de la structure	41
7. Injection de type fonctionnelle	43
7.1. Description du cas-test	43
7.2. Système linéaire et prise en compte de la condition aux limites	43
7.3. Résultats et analyse	44



III. Études statistiques : Répartition du courant dans une structure de type fuselage	45
7.4. Présentation de la problématique	47
7.5. Modélisation du problème d'incertitudes	48
7.5.1. Quantification des sources d'incertitudes	48
7.5.2. Propagation des sources d'incertitudes	48
7.5.3. Hiérarchisation	49
8. Approche probabiliste	51
8.1. Méthodes de Monte-Carlo	51
8.1.1. Rappels de probabilité	51
8.1.2. Méthodes d'intégration et estimateurs	51
8.1.3. Avantages et limites de la méthodes	52
8.2. Analyse de sensibilité	52
9. Résultats et analyse	55
9.1. Analyse par famille	55
9.1.1. Positionnement du problème	55
9.1.2. Résultats	56
9.2. Défaillance par famille	60
9.2.1. Positionnement du problème	60
9.2.2. Résultats	61
Conclusion	65
Annexe	66
A. MEFISTO : Compléments physiques (Copyright© Gilles Akoun, EADS IW)	67
A.1. Biot et Savart et théorème d'Ampère	67
A.2. Calcul de la self d'un câble coaxial	70
B. Présentation de MEFISTO et quelques codes mis en place	81
B.1. Mefisto : IHM	81
B.2. Quelques codes développés	81
Bibliographie	93



Remerciements

Je tiens à remercier tous ceux qui m'ont beaucoup appris au cours de ce stage et qui ont permis d'en faire une réelle expérience professionnelle.

Je remercie tout particulièrement et à témoigner ma reconnaissance à mon tuteur de stage, Mr RICHARD PERRAUD, qui m'a formé et accompagné, et ce, avec beaucoup de patience et de pédagogie.

Je tiens également à remercier Mme ISABELLE TERRASSE, enseignante à Sup'Galilée et Expert-Senior à EADS-IW, pour la confiance accordée, pour son aide précieuse et pour avoir contribué pleinement à la réussite de mon PFE/stage.

Je remercie :

- FANNY DARBAS pour m'avoir encadré également durant mon PFE, pour le temps consacré durant cette période, pour m'avoir accompagné avec beaucoup de patience, de pédagogie et sachant répondre à mes interrogations ;
- Je remercie aussi beaucoup JÉROME pour son aide précieuse sur l'utilisation des outils de subversion et sur le développement de la version 2 du logiciel *MEFISTO*, GILLES PERES et RICHARD PERRAUD pour m'avoir permis de réaliser mon stage de fin d'études dans le service électromagnétisme ;
- Fabien, enseignant à Sup'Galilée et chef de service à EADS-IW, pour m'avoir accompagné notamment sur la partie "Modélisation des incertitudes", à VINCENT, RÉGIS, JAYANT pour leurs aides sur la modélisation de l'aléas et l'utilisation de la plateforme *OpenTurns*, à *Emmanuelle* pour ses conseils précieux et son aide sur la phase de développement de wrappers *OPENTURNS* ;
- JESUS, ERWAN, GILLES et encore RICHARD pour leurs aides sur la modélisation des phénomènes physiques
- JEAN-LOUP pour son aide et routines pour le développement/post-traitement des données, TOUFIC et FRANÇOIS pour leur aide sur l'usage du Multiport ainsi que toute l'équipe d'*IMACS* ;
- Merci également aux autres membres des services de mathématiques appliquées et de électromagnétisme (sur Suresnes et Toulouse) pour leur sympathie, leur aide, leur bonne humeur et l'ambiance qui ont fait de ce stage un moment très agréable.

Enfin, je tiens à remercier et à témoigner ma reconnaissance envers l'ensemble des enseignants de la formation et de l'école Sup Galilée dont les larges qualités méritent d'être soulignées.





Introduction et contexte

Statistiquement un avion civil est foudroyé 1 fois par an soit 1 fois toutes les 2900 heures de vol. Ce foudroiement peut causer des dégâts/dommages matériels au niveau de la structure (on parle des effets directs de la foudre) où encore entraîner des dysfonctionnements au niveau des systèmes embarqués (on parle d'effets indirects de la foudre).

Fort heureusement, les accidents liés aux agressions de la foudre sont rares, pour ne pas dire inexistantes. Ceci résulte des études CEM (compatibilité électromagnétique) menées en phase de dimensionnement avant-projet des systèmes, où les moyens de simulation permettent de résoudre les équations de Maxwell avec des solveurs adaptés et de prédire les phénomènes physiques. Dans le cas de la foudre, le courant injecté dans la structure ne crée pas de surtensions importantes lorsque celui-ci est métallique. L'utilisation accrue des composites à base de carbone, qui ont

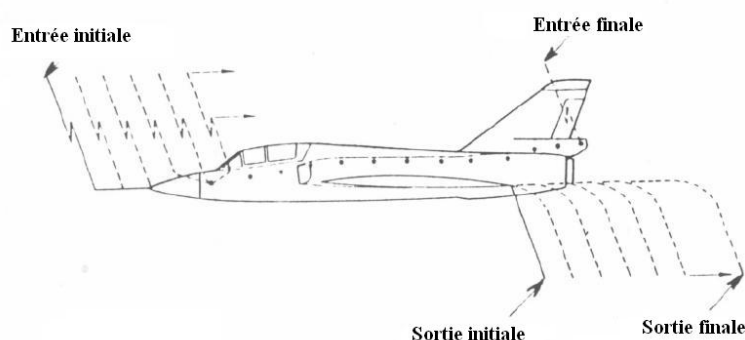


FIG. 0.1.: Balayage du courant de la foudre

l'avantage d'être plus légers que des alliages métalliques pour une rigidité équivalente, mais une conductivité électrique plus faible, a un impact fort sur tous les aspects électromagnétiques. Typiquement, l'énergie électromagnétique qui pénètre dans la structure sera beaucoup plus importante que dans le cas métallique et les surtensions engendrées aussi (par rapport au cas métallique).

La prise en compte nécessaire des contraintes en phase amont alliée à l'exigence de diminution des coûts accroît l'utilisation des moyens de simulation numérique. Le dimensionnement des parasites au niveau des câbles et équipements passe par une modélisation de la structure de l'avion et des systèmes intermédiaires (éléments conducteurs). Les techniques numériques utilisées sont variées : discrétisation de type différences finies en temps (FDTD), méthode des moments, codes utilisant la théorie des lignes de transmissions...etc. Ce sont généralement des modèles 3D couplés à des modèles 1D (câblage). Dans certains cas particuliers, lorsque l'on souhaite faire une prédiction sur des structures telles que le fuselage où voilure qui ont l'avantage d'être "longs suivant une direction", les méthodes 3D précédentes peuvent s'avérer "lourdes" et coûteuses. L'hypothèse de symétrie de translation peut alléger la simulation en utilisant des solveurs 2D. Ces solveurs permettent d'évaluer rapidement les phénomènes physiques tels que la répartition de courant dans la structure, d'établir les zones de passage de courant ou encore déterminer la crête en tension au niveau de certains équipements. Cette valeur dimensionnante est influencée par les équipements voisins (leur nature, dimension), la nature des structures...etc.

Parallèlement à la foudre, lors des phases de pré design, la simulation numérique est utilisée pour étudier les aspects fonctionnels de la distribution électrique dans les aéronefs. Les dimensionnements effectués sont relatifs à la circulation des courants dans la structure (courant des les jonctions métalliques).

Le présent rapport se compose en trois parties :

1. Contexte du stage : présentation du groupe EADS, du service dans lequel j'étais affecté. Par suite, on introduit brièvement quelques notions sur la foudre : le phénomène en général, puis en particulier, les effets d'un foudroiement sur un aéronef ;
2. La présentation d'un outil de simulation 2D : la méthode filaire qui prend en compte des phénomènes de symétrie transversale et diminue fortement le temps de calcul. On y présente



la méthode et quelques cas de validation en comparant notamment les résultats avec un solveur basé sur la méthode des équations intégrales ;

3. Tenant compte des incertitudes, la troisième partie a pour objectif d'établir une méthodologie de prise en compte des incertitudes, de donner quelques méthodes utilisées pour le calcul des quantités d'intérêts. Nous abordons une étude statistique sur un modèle représentant une structure de type fuselage d'avion avec la problématique du retour de courant dans cette structure. Les paramètres incertains sont par construction quelques éléments qui composent cette dernière : jonction cadre peau, jonctions internes. On verra comment le problème est abordé.

Première partie .

Contexte du stage



Ce rapport s'inscrit dans le cadre du stage de fin d'études effectué à EADS IW durant la période de Mars-Août 2009. J'ai été affecté au service électromagnétisme.

Le sujet de mon stage porte sur les effets indirects de la foudre et sur la mise en place des analyses statistiques pour l'étude des courants de retour dans des structures de type fuselage.

Dans cette partie, nous présentons :

- L'environnement du stage au sein d'EADS ;
- Le contexte de la foudre : phénomènes et effets directs, indirects.





1. Le groupe EADS

1.1. Le groupe EADS

Deuxième groupe mondial et premier européen dans le domaine de l'aéronautique, de l'espace et de la défense, le groupe EADS (European Aeronautics Defense and Space Company) est né le 10 juillet 2000 de la fusion d'Aérospatiale Matra (France), de Daimler Chrysler Aerospace AG ou DASA (Allemagne) et de Construcciones Aeronautica SA ou CASA (Espagne). Il est donc un acteur majeur dans les domaines aérospatial, de la défense et des services associés.

Le groupe comprend entre autre le constructeur d'avions Airbus, le premier hélicoptériste au monde Eurocopter et MBDA, numéro deux mondial dans le domaine des missiles. EADS, qui est le maître d'oeuvre principal du lanceur Ariane, développe également l'avion de transport militaire A400M et est le plus important partenaire industriel du système européen de navigation par satellite, Galiléo.

EADS est une entreprise de droit néerlandais cotée aux bourses de Francfort, Madrid et Paris. Plus de 34% des parts sont détenues par des investisseurs privés. DaimlerChrysler et le holding français SOGEADE (Lagardère, Etat français) en possèdent chacun plus de 30%. Le holding d'Etat espagnol SEPI possède environ 5.5% des actions. Elle possède une longue expérience de partenariat dans la coopération européenne ainsi qu'internationale et plus de 70% de son chiffre d'affaire est réalisé dans le cadre de programmes communs.

Le groupe emploie environ 110 000 personnes sur plus de 70 sites de production, principalement en Allemagne, en Espagne, en France et en Grande-Bretagne. 35 bureaux de représentation répartis dans le monde entier garantissent un contact étroit avec ses clients.

Il est organisé en cinq divisions et chacune de ces divisions est organisée en Business Unit :

- Airbus ;
- Avions de transport militaire ;
- Aéronautique : Eurocopter, ATR, EADS Socata, EADS EFW, EADS SOGERMA Services ;
- Espace : EADS Astrium, EADS Space Transportation, EADS Space Services ;
- Système Civils et de Défense (DCS) : Missiles (MBDA et EADS/LFK), EADS Defence Electronics, EADS Military Aircraft, EADS Defence and Communications Systems, EADS Services.

Seul ou en partenariat, le groupe EADS propose une très vaste gamme de produits : avions commerciaux de la famille Airbus (moyens et longs courriers), de la famille ATR (destinés au transport régional), avions de tourisme et d'entraînement, avions militaires comme l'Eurofighter ou l'A400M, hélicoptères civils et militaires réalisés par Eurocopter, missiles tactiques et stratégiques...etc EADS occupe ainsi une position privilégiée dans tous les domaines de l'industrie de l'aéronautique, de l'espace et de la défense au niveau mondial :

- Numéro 1 sur le marché des lanceurs commerciaux (28.51% d'Arianespace) ;
- Numéro 2 sur le marché des hélicoptères (100% d'Eurocopter) ;
- Numéro 2 des avions de transport civil (100% d'Airbus) ;
- Numéro 2 dans les secteurs des missiles et systèmes de missiles (37.5% de MBDA) ;
- Numéro 3 dans le secteur des avions de transport militaire ;
- L'un des principaux fournisseurs mondiaux de satellites (75% d'Astrium) et d'avions militaires (43% d'Eurofighter, 45.8% de Dassault).

1.2. Innovation Works

Créé le 1er septembre 1987, et anciennement appelé CCR (Centre Commun de Recherche), Innovation Works (IW) est une entité pluridisciplinaire regroupant des compétences et des moyens orientés vers l'innovation technologique. Il rassemble une équipe de 250 personnes spécialistes en matériaux, chimie, physique, mécanique, informatique et mathématiques appliquées.

Il intervient dans trois grands domaines :

- Les matériaux et leur mise en oeuvre ;
- La maîtrise des ambiances sur les structures et les systèmes ;
- La productique et les technologies de l'information.

Au centre du réseau de recherches EADS, EADS-IW partage ses activités entre :

1. La réponse aux besoins spécifiques à court ou moyen terme des branches du groupe ;



2. L'amélioration et le développement des compétences scientifiques et techniques, indispensables à long terme.

Les recherches sont menées en étroite collaboration avec les communautés scientifiques et industrielles, nationales et internationales. Les résultats et les savoir-faire des travaux d'IW ont une vocation industrielle et commerciale. Ils sont destinés à ouvrir de nouveaux avantages compétitifs aux produits, par différenciation technologique ou par l'abaissement des coûts de conception, de production et de maintenance.

1.3. Le service Electromagnétisme

Les activités au sein de l'équipe se divisent suivant trois axes majeurs :

- Les effets directs de la foudre (particulièrement sur les structures composites de plus en plus utilisées en aéronautique) ;
- La compatibilité électromagnétique ;
- Les antennes/SER.

Au sein des activités CEM et antennes/SER sont développées des méthodes numériques et outils dans la perspective de calculs complexes. Des études sont réalisées en phase amont pour modéliser les perturbations électroniques au niveau des composants (microcontrôleurs), de l'équipement (cartes électroniques) ainsi qu'au niveau des systèmes (avion complet).

Des mesures sont effectuées dans la perspective de valider les modèles développés.

1.4. Ma mission

Le stage s'inscrit sur la continuité du projet de fin d'études. Je suis amené à travailler sur le logiciel *MEFISTO* et sa validité par rapport à un code éléments finis pour problématique traitée celle des effets indirects foudre sur des structures invariantes par translation.

Cette phase de validation débute par la compréhension du code *MEFISTO* : les hypothèses physiques, les paramètres d'entrée, calcul...etc. Je suis amené à établir des routines me permettant de générer les mêmes cas-tests sous *MEFISTO* et *ELFI2T* (Éléments finis de translation, code qui repose sur la résolution du système de Maxwell harmonique par la méthode des équations intégrales) dans la perspective de comparaison de résultats. En effet, partant d'une géométrie identique avec les mêmes paramètres (maillage, conductivité, épaisseur, fréquences d'études, découpage en zone), on peut facilement extraire les éléments d'une zone et nous focaliser sur des variables de type courant normalisé en fréquentiel ou même en temporel.

Toujours dans la perspective de comparaison, on met en place des outils de post-traitement des calculs. Ces routines permettent de calculer le champ magnétique en 2D et 1D, pour une fréquence d'étude ou toutes les fréquences, via l'IHM. Des routines de comparaison permettent également de calculer le champ via les post-processing du code éléments finis.

La deuxième partie de mon stage est axée sur des analyses statistiques de type incertitudes de paramètres ou encore prise en compte de la défaillance dans le cadre du calcul de répartition du courant dans un fuselage d'avion.

Cette phase débute par la compréhension des outils de calcul 3D mis à disposition : ASERIS-BE. Ce dernier permet de résoudre les équations de Maxwell dans un domaine fréquentiel par la méthode des équations intégrales. La technique Multiport, qui permet de s'affranchir du calcul complet lorsque seules les valeurs au niveau des ports d'intérêt varient en résolvant un système de dimension petite, rend les analyses statistiques possibles. Il faut par la suite mettre en place les scripts d'étude valables pour la plate-forme OpenTurns faisant appel au code 3D. Ceci regroupe notamment les routines de lecture, écriture de fichiers, sauvegarde pour le post-traitement ou encore des fonctions OpenTurns spécifiques pour une analyse précise (comportement en moyenne, calcul de probabilité de dépassement de seuil, analyse de sensibilité). Ces routines ont l'avantage de pouvoir être reprises ultérieurement pour une distribution des calculs (multi-thread).



2. Notions foudre et interaction avec aéronefs

Dans ce qui suit, on présente brièvement le phénomène foudre et son impact sur l'avion.

2.1. Présentation du phénomène

Les premières études menées datent du milieu du XVIII^{ème} siècle. Benjamin Franklin fût l'un des premiers à s'y intéresser et les études connaissent par la suite des avancées majeures avec l'apparition de la photographie.

De nos jours, on effectue des mesures sur des tours (Berger en Suisse) ou encore on enregistre des données des vols pour étendre nos connaissances sur ce phénomène. Un projet est d'ailleurs en cours sur ce sujet à EADS. D'ailleurs, la connaissance des mécanismes physiques est essentiellement basée sur les résultats de trois compagnies :

- Nasa Storm Hazards program (1978/1986) ;
- USAF/FAA (1984/1987) ;
- ONERA/CEV (1984/1988) ;

La foudre, où décharge foudre, est le résultat de mécanismes physico-chimiques qui ont lieu dans un nuage.

Tout d'abord, le frottement entre fragments de glace, grêlons ou encore gouttelettes d'eau entraînent une électrisation des nuages.

Ensuite, la séparation des charges (positives d'un côté, négatives de l'autre) et la présence de champs de très forte intensité entraînent le déclenchement d'arcs. On en distingue trois types de décharge :

- Décharge intra-nuage : c'est un phénomène assez fréquent mais dont les études sont freinées à défaut de manque de mesures car trop complexe ;
- Décharge entre deux nuages ;
- Décharge entre le nuage et le sol : elle représente $\frac{1}{3}$ des déclenchements ;



Décharge inter-nuages



Décharge nuage-sol

FIG. 2.1.: Décharge foudre

La décharge est formée par la formation d'un précurseur (leader) où le champ électrique est le plus élevé. Les décharges locales mènent à la création d'un chemin entre le nuage et le sol. L'initiation du coup de foudre est caractérisée par un flash et un chemin à basse impédance qui est créé. On parle d'arc de retour.

2.2. Interaction foudre/aéronef

Dans la très grande majorité des cas (dans 90% des cas environ), l'avion est l'initiateur du coup de foudre (entre deux nuages par exemple). Dans quelques cas rares, l'avion intercepte un arc de foudre. Par suite, il existe des zones qui sont plus "susceptibles" : radoms, wings...etc. Certaines surfaces peuvent être le lieu d'attachements primaires de la foudre. Le "zoning" permet de prédire ces zones d'attachement, d'aider à définir/optimiser les protections.



De façon plus générale, on peut évoquer les effets majeurs engendrés par la foudre :

- Effets directs : dommages physiques au niveau de la structure où encore de l'inflammation des réservoirs de fuel. Ces dommages mettent en jeu des phénomènes thermiques, électromagnétiques ou mécaniques ;
- Effets indirects : il s'agit de dommages sur les systèmes électriques/électroniques.

2.3. Effets indirects de la foudre

Par définition, les effets indirects de la foudre sont les perturbations sur les systèmes embarqués qui sont dus aux courants de la foudre. Ces courants provoquent des surtensions au niveau des câblages et des équipements.

On distingue deux types de couplage :

- Couplage résistif : le passage du courant dans la structure crée une tension de mode commun. À basse fréquence, les effets sont notables : il existe une grande différence entre métallique et composite (CFC 1000 fois moins conducteur) ;

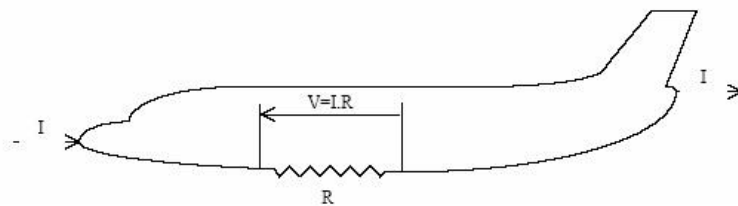


FIG. 2.2.: Couplage résistif

- Couplage inductif : le flux de champ magnétique induit un couplage entre le courant de la foudre et le courant formé par les équipements embarqués. Un équipement connecté sur cette structure peut subir une dégradation ou un dysfonctionnement ;

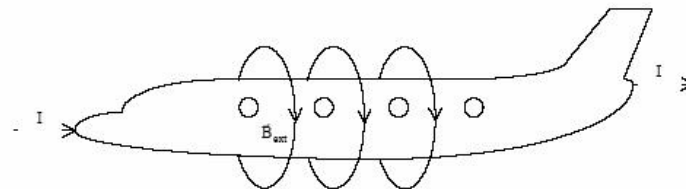


FIG. 2.3.: Couplage inductif

Pour se protéger des effets indirects, il existe différents moyens :

- Diminuer la résistance de la structure pour le couplage résistif : l'utilisation des composites à base de carbone a tendance à augmenter la résistance. L'utilisation de clinquants métalliques par exemple a pour but de diriger le courant de la foudre ;
- Placement de câbles au plus proche de la structure pour éviter les zones à fort flux ;
- Blindage des câbles ;
- Protection des interfaces des équipements avec des moyens tels que le transil par exemple.

Les applications principales des études sont la spécification des niveaux induits (optimisation, validation) et la certification.

2.4. Formes d'ondes du courant foudre

Dans de nombreuses applications, notamment pour reproduire en laboratoires des ondes de type foudre, ou encore pour simuler numériquement des phénomènes liés à la foudre, on utilise des modèles analytiques pour approximer la forme d'onde des arcs de retour. Bruce et Golde ont établi une approximation de la forme :

$$I(t) = I_0(\exp(-\alpha t) - \exp(-\beta t))$$



où α , β et I_0 peuvent être déterminés à partir de la connaissance de la valeur crête d'arc en retour, du temps T_1 qu'il met à attendre sa valeur crête et du temps T_2 qu'il met à décroître de sa valeur crête.

En tenant compte de toutes les menaces, on définit par une approche statistique un gabarit mettant quatres formes d'onde principales que sont A, B, C et D :

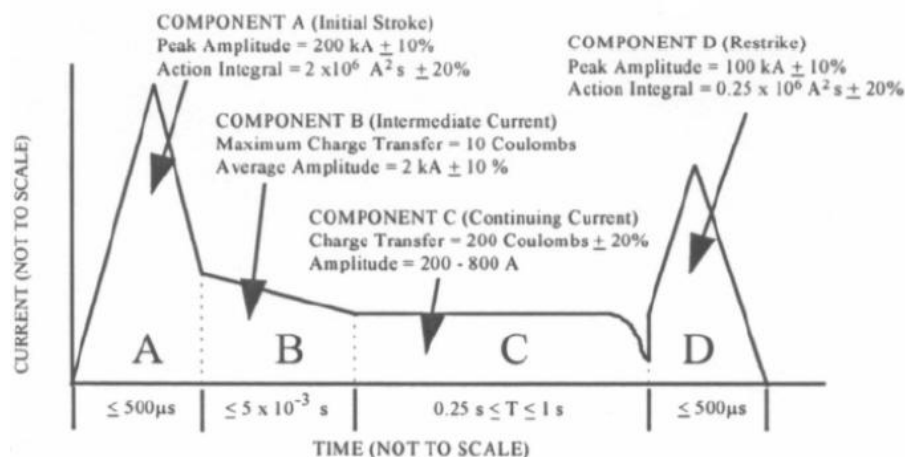


FIG. 2.4.: Prise en compte des menaces foudre

- A : Courant produit par l'arc en retour du coup de foudre ;
 - B : Courant intermédiaire entre l'arc en retour (A) et l'onde C ;
 - C : La forme n'est pas une double exponentielle. On la définit comme étant la partie continue d'une forme d'onde globale engendrée par des courants longue durée ;
 - D : Décharge en retour secondaire de l'arc de foudroisement ;
 - H : Phase d'amorçage d'un foudroisement d'un aéronef ;
- On donne ci-dessous les valeurs des paramètres α , β et I_0

Forme d'onde	I_0	α	β
Forme A	218 810	11 354	647 265
Forme B	11 300	700	2000
Forme D	109 405	22 708	1 294 530
Forme H	10 572	187 191	19 105 100



Deuxième partie .

**Simulation des effets indirects foudre par
méthode filaire et validations**



Introduction

L'objectif de la présente partie est de présenter une méthode de calcul d'injection de courant dans une structure pour une application de type effets indirects de la foudre.

La méthode filaire est une méthode de type ingénieur dont la formulation physique dérive des équations de Maxwell dans un mode de propagation transverse magnétique (TM). En effet, en mettant en avant une hypothèse de symétrie de translation pour une structure, on résout un problème 2D qui permet d'évaluer rapidement les phénomènes physiques en établissant un parallèle avec un circuit électrique équivalent RL (pour le cas de la foudre). L'analyse des phénomènes s'effectue dans un domaine fréquentiel sur une bande allant de 10 Hz à 10^7 Hz.[7].

Pour valider les résultats obtenus dans le domaine fréquentiel, on effectue une comparaison de ces derniers vis à vis des résultats obtenus avec un code de calcul éléments finis surfaciques dénommé *ELFI2T*. Ce dernier résout les équations de Maxwell harmoniques avec la convention $-\omega t$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ pour un cas de symétrie de translation. Ce résultat s'obtient de la manière suivante :

- Écriture des équations de Maxwell en établissant un prolongement de $\mathbb{R}^2 \setminus \{S\}$ à \mathbb{R}^2 , S désignant la structure (dans \mathbb{R}^2) ;
- On détermine la solution fondamentale (noyau de Green) que l'on convole au second membre du système. On aboutit à la représentation intégrale du problème ;
- En utilisant les conditions aux limites (conducteur imparfait) on établit l'équation intégrale du problème. Cette dernière est en pratique résolue par discrétisation de type éléments finis surfaciques (BEM dans la littérature) [3].

Le code *ELFI2T*, réputé robuste, était destiné à la base pour les calculs en SER. Néanmoins, on peut l'adapter à une utilisation pour une configuration de type effets indirects de la foudre (générateurs spécifiques et mode de propagation transverse magnétique). La motivation au recours au code ingénieur (plutôt que les éléments finis) est essentiellement due au coût du calcul qui est moindre pour le premier code et à la simplicité d'utilisation.

Nous commençons par présenter la méthode filaire et décrire les aspects de prise en compte des aspects résistifs/inductifs dans un modèle de ligne de transmission.

Nous montrons par la suite quelques cas de validation en comparant, vis à vis du code *ELFI2T*, la redistribution du courant obtenue pour 1 A injecté dans la structure. On pousse l'étude en établissant des cartographies de champ magnétique H permettant de localiser dans une structure les zones de passage du courant.





3. Méthode filaire pour l'étude des structures foudroyées

3.1. Présentation du problème physique

On se donne une structure complexe dont une dimension est plus grande devant la section, comme le fuselage ou la voilure. On note $l_{structure}$ la longueur suivant la direction dominante.

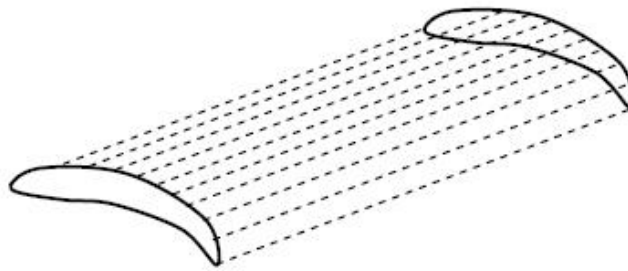


FIG. 3.1.: Hypothèse de symétrie de translation

Définition : On définit **une zone** comme une entité géométrique composée par un matériau m de conductivité σ et d'épaisseur ϵ_p .

Définition : On définit par **structure** une ou plusieurs **zones**. L'ensemble des **structures** définit la structure géométrique.

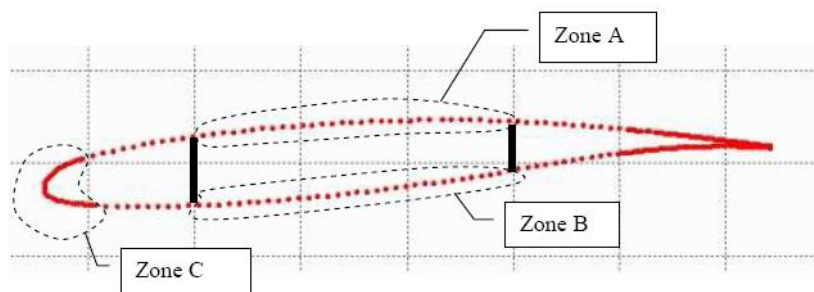


FIG. 3.2.: Structure Dnose : partitionnement par zones

On s'intéresse au flux de courant à travers la section, c'est à dire la prise en compte du courant injecté dans la structure. Il reste à poser le modèle physique utilisé.

3.2. Modélisation physique : vers le modèle de ligne de transmission

L'approche de type ingénieur est basée sur une identification de la structure à un circuit électrique. Ce dernier est de type RL dans le cas de la foudre. Les éléments sont en parallèle.

R représente la résistance des éléments de la structure, L prend en compte les interactions entre les éléments de la structure. Lors de l'injection du courant dans la structure, celui-ci est redistribué suivant la nature des matériaux et la géométrie, dépendamment de la fréquence étudiée.

Deux types de couplage sont à prendre en compte : résistif et inductif.

3.2.1. Prise en compte des couplages résistifs

Dans une zone donnée, on dispose des informations concernant la nature du matériau (sa conductivité) et son épaisseur. Aussi, on dispose de sa longueur, c'est à dire la distance entre

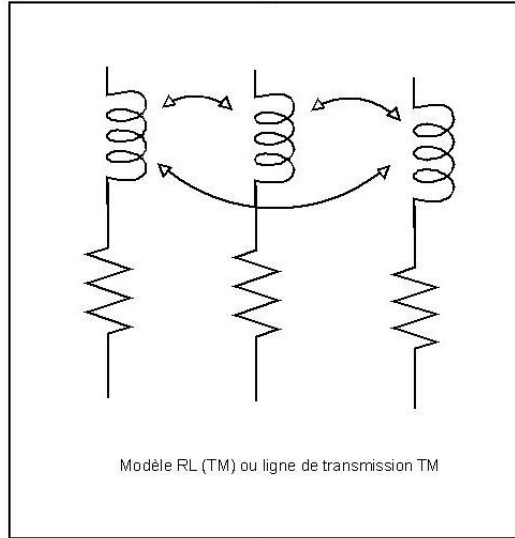


FIG. 3.3.: Circuit RL

le premier élément du maillage et le dernier. Ceci nous permet d'établir une résistance linéique. En effet, si on dénote d la distance entre le premier élément et le dernier, on a alors $d * \epsilon_p$ est homogène à une surface. La résistance linéique pour un élément i de la zone considérée composée de n_i éléments, est donnée par :

$$R_{ii} = \frac{n_i}{\sigma_i d \epsilon_p}$$

3.2.2. Prise en compte des couplages inductifs

On met en avant une hypothèse de retour coaxial. En effet, nous supposons qu'il existe une induction entre un point et l'infini. Le mot "infini" tend à modéliser des phénomènes qui se passent "loin". Ainsi, nous supposons la présence d'un retour coaxial situé à une distance suffisamment lointaine *non représentée dans la structure*. On note D cette distance entre la structure et le retour coaxial. La valeur $D/2$ minimise les effets proches entre structure et retour coaxial. Cette valeur est choisie de manière "empirique" suffisamment grande (on a $D=200 * L_{structure}$ comme défini sur 3.4), $L_{structure}$ étant la longueur de la structure dans le plan. Ainsi, on définit le moyen

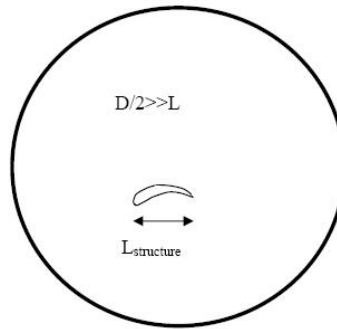


FIG. 3.4.: Retour coaxial

de calculer les inductances (mutuelles et selfiques) au moyen des formules analytiques suivantes [2] :

$$\begin{cases} \text{Inductance selfique} & L_{i,i} = \frac{\mu}{2\pi} \log\left(\frac{D^2 - 4D_i^2}{d_i D}\right) \\ \text{Inductance mutuelle} & L_{i,j} = \frac{\mu}{2\pi} \log\left(\sqrt{\frac{4\frac{(D_i D_j)^2}{D^2} + \frac{D^2}{4} - 2D_i D_j \cos(\theta_{ij})}{D_i^2 + D_j^2 - 2D_i D_j \cos(\theta_{ij})}}\right) \end{cases} \quad (3.1)$$

Pour plus de précisions sur l'obtention des formules, on peut se référer à l'annexe A.2. Notons que ces formules sont valables dans un domaine quasi-statique et que le noyau de Green converge

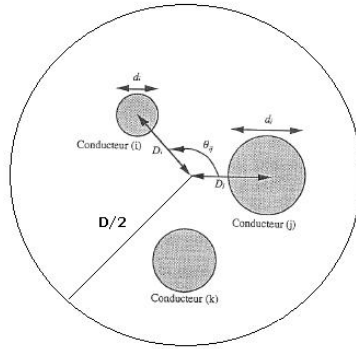


FIG. 3.5.: Calcul des inductances : définition des variables

vers un terme du même ordre à très basse fréquence [5].

3.2.3. Vers la ligne de transmission en injection foudre et injection fonctionnelle

Une ligne de transmission est un conducteur acheminant de l'énergie électromagnétique d'une source (emetteur) vers une charge (récepteur). Les sources, notées E_0 , sont ici reliées à une extrémité de la structure. D'autre part, le récepteur est relié à l'autre extrémité de la structure. On associe à chaque extrémité une impédance (Z_0 et Z_L comme décrit sur la figure 3.6). Z_0 correspond aux charges d'entrée, Z_L correspond aux charges de sortie. La propagation est de type transverse magnétique ($E_x = 0$) et la discrétisation est de type filaire (maillage surfacique filaire) où on se donne un paramètre de maillage h qui permet de placer les centres des fils à une distance de h entre eux (la discrétisation s'effectue par zone). Les fils ont pour rayon $\frac{h}{6}$.

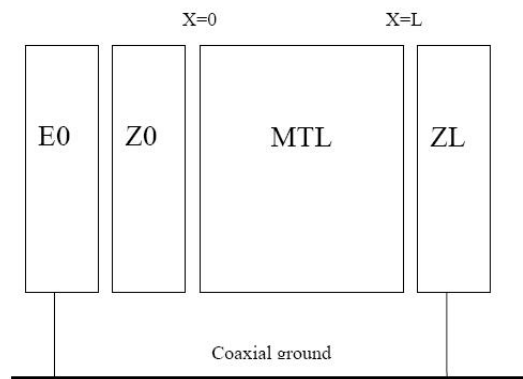


FIG. 3.6.: Description de la ligne de transmission

De manière générale, le problème à résoudre s'écrit sous la forme :

$$E_0 = Z_p I$$

E_0 représente le vecteur des termes sources qui agressent la structure. Ils sont injectés en $X = 0$, I le vecteur des intensités de courant (inconnue), Z_p regroupe l'impédance Z , la matrice de charge en entrée Z_0 ainsi que les charges terminales Z_L . Son expression en fonction de ces dernières est de la forme suivante :

$$Z_p = Z_0 + l_{structure} Z + Z_L$$

De plus, Z est construite à partir des matrices R et L présentées précédemment. On donne ci-dessous son expression :

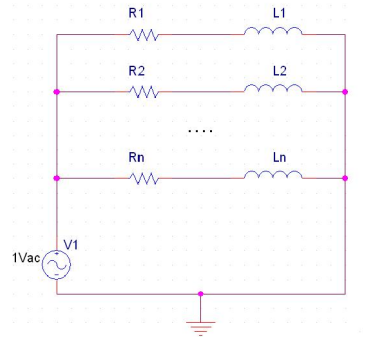


FIG. 3.7.: Circuit équivalent foudre

$$Z = \begin{pmatrix} R_1 + j\omega L_{11} & \cdots & j\omega L_{1k} & \cdots & j\omega L_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j\omega L_{k1} & \cdots & R_k + j\omega L_{kk} & \cdots & j\omega L_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j\omega L_{n1} & \cdots & j\omega L_{nk} & \cdots & R_n + j\omega L_{nn} \end{pmatrix}$$

Notons que dans le cas d'injection foudre classique, on ne veut pas que le courant revienne dans la structure donc on considère une impédance très faible en sortie. On a :

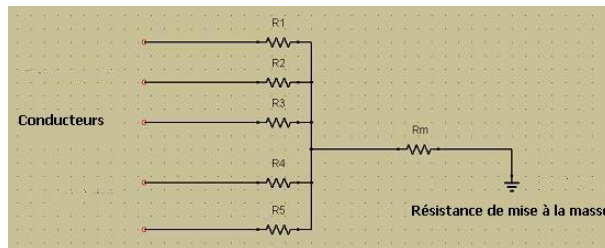
$$Z_L = \begin{pmatrix} 5.10^{-6} & \cdots & \cdots & \cdots & 5.10^{-6} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 5.10^{-6} & \cdots & \cdots & \cdots & 5.10^{-6} \end{pmatrix}$$

De plus, l'hypothèse utilisée est une injection équipotentielle avec $E_{0_k} = 1 \forall k$. Dans le cas de l'injection fonctionnelle, on veut prendre en compte la présence de courants parasites dans la structure. On impose une condition aux limites (en $X = L$) de type "charge forte" afin d'obliger le courant à revenir par les conducteurs retours. On a alors :

$$Z_L = \begin{pmatrix} 100 & \cdots & \cdots & \cdots & 100 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 100 & \cdots & \cdots & \cdots & 100 \end{pmatrix}$$

La valeur de 100Ω est un compromis entre représentation physique du modèle et problème d'inversion du système en basses fréquences. Nous imposons de plus une différence de potentiel de 1 V entre les éléments du circuit ayant une tension positive (+0.5 V) et les éléments de retour ayant une tension négative, comme par exemple les retours coaxiaux lorsqu'ils sont modélisés (-0.5 V). Cette matrice est pleine car on insiste sur une interaction entre tous les éléments : c'est la résistance de mise à la masse commune pour tous les conducteurs comme nous le montrons sur la figure 3.8.

Il reste à expliciter la matrice Z_0 .

FIG. 3.8.: Résistance de mise à la masse commune : choix de matrice pleine pour Z_L



3.3. Charges en entrée

Dans cette section, on explicite la matrice de charge en entrée Z_0 qui est diagonale. Cette dernière a pour rôle de prendre en compte des conditions de charge dans les éléments de la structure. Pour des éléments appartenant à une structure, la valeur de charge est faible, typiquement $10^{-5} \Omega$.

On souhaite dimensionner le générateur équivalent de Thévenin pour les fils (V_{co}/I_{cc}) afin de connaître la capacité de la surtension à endommager un équipement. Le générateur théorique s'obtient pour deux calculs : premier calcul pour le V_{co} et un second pour l' I_{cc} .

Le V_{co} doit être obtenu pour une valeur importante de la résistance qui caractérise le circuit ouvert. L'équipement connecté à l'extrémité du fil plein est donc modélisé par $R = 1000 \Omega$.

L' I_{cc} quant à lui doit être obtenu pour une valeur faible. L'équipement connecté à l'extrémité de ce dernier est modélisé par $R = 10^{-5} \Omega$.

Enfin, notons que l'introduction d'un V_{co} et/ou I_{cc} augmente le système d'une inconnue et que V_{co}/I_{cc} ont pour caractéristique commune :

- La résistance R avec r rayon du fil $R_{ii} = \frac{1}{\pi \sigma r^2}$;
- L'inductance L ;
- La charge en sortie z_m (suivant le type d'injection considérée).

3.4. Calcul du champ magnétique par la formule Biot et Savart

Le flux de champ magnétique induit un couplage entre le courant injecté dans la structure et le courant formé par les équipements embarqués. Le calcul du champ peut donner des informations sur les zones de passage du courant.

On utilise la formule analytique de Biot et Savart pour calculer le champ magnétique créé par la distribution de courants continus. De manière générale, cette formule est valable à basses fréquences. Si nous considérons une courbe \mathcal{C} infiniment longue, nous retrouvons, par le théorème d'Ampère, le champ produit par un fil infini car le courant est perpendiculaire à la courbe.

Dans notre cas, le champ calculé \vec{H} en un point M est la contribution de tous les champs unitaires produits par les fils et on a alors :

$$d\vec{H}(M) = \frac{1}{4\pi} \frac{I(P) d\vec{l} \wedge P\vec{M}}{|P\vec{M}|^3} \quad (3.2)$$

L'ensemble P correspond aux points appartenant à cette courbe (fils), $d\vec{l}$ un élément de longueur de sorte que $\vec{I} = I d\vec{l}$ est le courant perpendiculaire. Pour être complet, la formule 3.2 est donnée ici lorsque le point M est situé à l'extérieur de tous les fils, c'est à dire lorsque $||P\vec{M}|| > r_{fil}$. En se basant sur la valeur de la densité de courant dans un fil de rayon r_{fil} , qui est donnée par :

$$j(r) = \begin{cases} \frac{I}{\pi r_{fil}^2} & \text{si } 0 \leq r \leq r_{fil} \\ 0 & \text{si } r > r_{fil} \end{cases}$$

En utilisant le théorème d'Ampère (cf annexe A.1) :

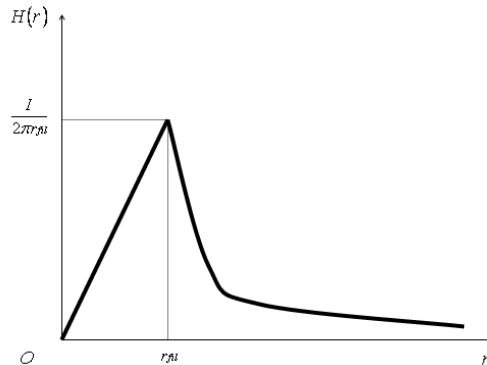


FIG. 3.9.: Calcul du champ : approximation linéaire en points proche



$$H(r) = \begin{cases} \frac{I}{2\pi r_{fil}^2} r & \text{si } 0 \leq r \leq r_{fil} \\ \frac{I}{2\pi r} & \text{si } r > r_{fil} \end{cases}$$

En conclusion sur ce chapitre, nous avons présenté la méthode filaire pour le calcul des courants dans les structures foudroyées. Le logiciel *MEFISTO* est basé sur ce principe pour calculer les courants fréquentiels dans la structure ainsi que les courants redistribués. Des routines de post-processing permettent de calculer le courant en temporel suivant une des excitations introduites précédemment (formes A, B, D ou H) dans une structure ou dans un fil (V_{co}/I_{cc}).

Enfin les routines de calculs de champ en 1D et 2D implémentées permettent d'établir une cartographie de champ 2D ou bien le long d'une droite à une fréquence donnée (ou toutes) afin de visualiser les informations de champs.



Méthodologie de validation

On se propose d'évaluer les résultats obtenus avec la méthode filaire. Le code de calcul *MEFISTO* permet d'évaluer rapidement le courant injecté dans une structure en imposant les sources à 1 V ou 0.5 V selon le type d'injection considérée (foudre/fonctionnelle). On compare les résultats obtenus avec le solveur *ELFI2T* déjà validé. De plus, on se propose d'effectuer ces comparaisons sur des maillages identiques, c'est à dire qu'à partir d'un maillage filaire comportant n éléments, on réalise un maillage éléments finis composé de n éléments avec, pour milieu de chaque poutre dans *ELFI2T*, le centre d'un fil du maillage dans *MEFISTO* comme décrit sur la figure 3.10.

Dans la suite, nous proposons les cas-tests suivants :

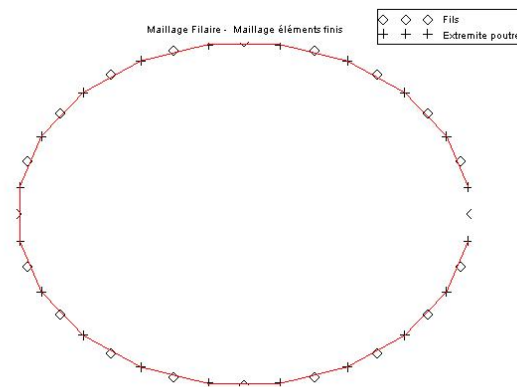


FIG. 3.10.: Maillage filaire et éléments finis pour la même structure

- Étude de l'injection de type foudre dans un cylindre : comparaison de courants et champ magnétique ;
- Répartition du courant dans une structure, mise en avant des phénomènes résistifs/inductifs et cartographie des champs magnétiques ;
- étude en injection fonctionnelle : rôle de la charge de sortie Z_L .

Ces cas-tests ont pour but de mettre en avant les phénomènes de redistribution de courant dans une structure d'une part, qui sont dus à la résistance des matériaux. Le calcul du champ rayonné d'autre part, par deux méthodes, permet d'évaluer les zones de passage de courant.





4. étude de l'injection foudre dans un cylindre

4.1. Injection de type foudre dans un cylindre et analyse fine

L'objectif ici est de reprendre un cas-test abordé dans [3] qui met en avant une comparaison entre les solveurs *MEFISTO* et *ELFI2T* dans un cas d'injection foudre. Les résultats obtenus mettent en lumière un gap visible pour une gamme de fréquences élevées. On peut alors émettre l'hypothèse que les résultats entre les deux solveurs diffèrent par la prise en compte des phénomènes inductifs.

Sous *ELFI2T*, la condition de radiation à l'infini [3, 4, 8] donne une condition sur le comportement à l'infini. Sous *MEFISTO*, on suppose la présence d'un retour coaxial suffisamment loin pour pouvoir être considéré comme étant à "l'infini".

On décrit d'abord le cas-test puis modifions la valeur de la distance entre la structure et le retour coaxial pour répondre "éventuellement" à la problématique du gap.

4.1.1. Description du cas-test

On considère une section transverse d'un cylindre de longueur 1 m selon x , de rayon 50 mm. Le matériau considéré est de type carbone avec $\sigma = 22000 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\epsilon_p = 0.5 \text{ mm}$. La discrétisation est de type filaire/poutre. Les sources ponctuelles valent 1 V.

On s'intéresse au courant pour une gamme de fréquence de 0.1 à 10^7 Hz.

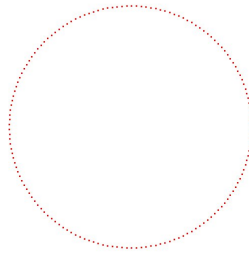


FIG. 4.1.: Configuration du cas-test

4.1.2. Résultats et analyse

On donne sur la figure 4.2 le courant en module obtenu par les deux solveurs.

On remarque bien que sur les basses fréquences, les résultats obtenus par les deux codes coïncident. En revanche, sur les hautes fréquences, un gap apparaît. Or c'est pour ces fréquences que les effets inductifs deviennent prépondérants. Ces derniers mettent en avant l'interaction éléments/infini. L'infini est ici modélisé par un coaxial situé à une distance D suffisamment grande ($D \gg 2L_{structure}$). On se reporte à la structure de la matrice L et on remarque que prendre D^α au lieu de D revient asymptotiquement à multiplier L par un facteur α du fait que $L = L(\log(D))$, et donc I est divisé par α . On donne sur la figure 4.3 deux résultats pour $\alpha=2$ et $\alpha=3$. Les résultats corroborent les hypothèses émises. Le choix "arbitraire" de la valeur D influe fortement à haute fréquence. Notons également que pour ce cas-test, le courant normalisé au niveau d'un élément (c'est à dire courant au niveau d'un fil divisé par le courant total) est identique pour les deux codes et ce pour toutes les fréquences.

Focalisons-nous à présent sur l'analyse du courant, plus spécifiquement de l'inverse du courant. On prête une attention particulière à la partie réelle et la partie imaginaire. Cette dernière est normalisée par la pulsation $\omega = 2\pi f$.

En effet, le système linéaire à résoudre est de la forme :

$$Z.I = V, \quad V_i = 1 \quad \forall i$$

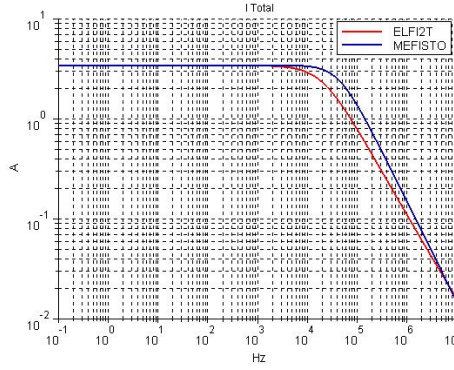
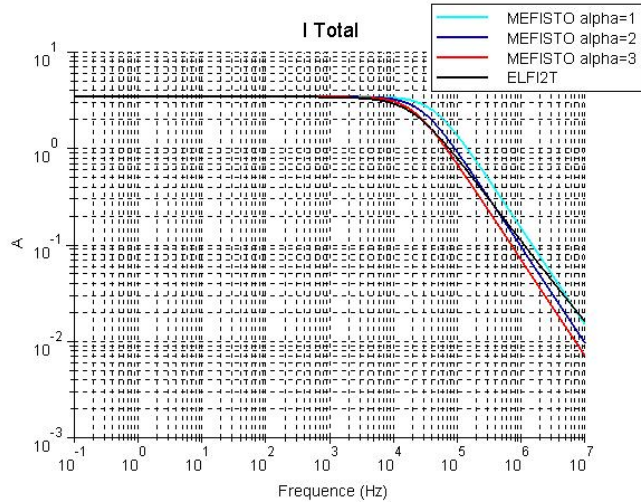


FIG. 4.2.: Courant total obtenu

FIG. 4.3.: Courants obtenus suivant la valeur de α

Pour une injection de 1 V, on doit analytiquement résoudre $(R + j\omega L)I = 1$. Comme R est petit

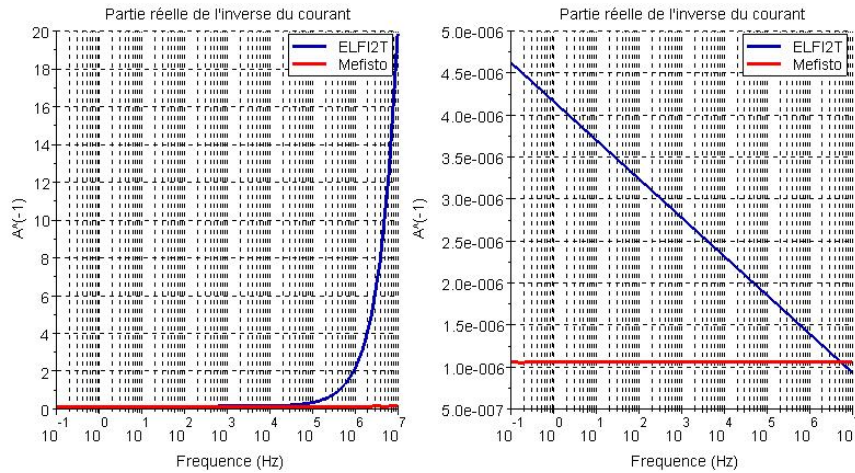


FIG. 4.4.: Partie réelle et imaginaire de l'inverse du courant total obtenu avec MEFISTO

devant L, l'approximation $j\omega LI \approx 1$ est correcte. Il en découle que $I \approx -j(\omega L)^{-1}$ ou encore $I^{-1} \approx j\omega L$. Pour ce cas-test, nous insistons sur le fait que les valeurs de courant sont identiques



entre tous les éléments filaires. On donne sur la figure 4.4 les parties réelle et imaginaire normalisée par la pulsation ω de l'inverse du courant, ce pour les deux codes de calcul *ELFI2T* et *MEFISTO*. L'échelle utilisée est logarithmique en abscisse (fréquences) et linéaire en ordonnée (inverse du courant). On remarque que le terme imaginaire obtenu ici avec le code de calcul *MEFISTO* est constant. Ce qui montre que $I^{-1} \approx j\omega L$. De plus, on peut calculer analytiquement la valeur de la self en utilisant les formules données dans 3.1. En effet, on a $L \approx \frac{\mu}{2\pi} \text{Log}(\frac{D}{r})$, où r représente le rayon de la structure et D la distance du retour coaxial à la structure. Comme $D=200r$ alors $L \approx \frac{\mu}{2\pi} \text{Log}(\frac{200r}{r})$ soit finalement $L \approx 10^{-6} H$. C'est bien la valeur que nous trouvons. Concernant la self pour le code *ELFI2T*, on constate que le terme $\text{imag}(I^{-1})$ est affine, donc $I^{-1} \approx a * \log(w) + b$. On détermine numériquement b et on trouve $a = \frac{\mu}{2\pi}$, $b = 4.15 * 10^{-6}$. Il faut se reporter à [3, 8] pour constater que le résultat est correct.

Pour conclure sur cette étude, la validité de l'approche filaire est très correcte à basse fréquence du fait que le noyau de Hankel a un comportement asymptotique en $\frac{\log(k)}{2\pi}$. Sur ce cas-test, on a montré que les deux codes aboutissent aux mêmes résultats à très basse fréquence du fait que l'approche est quasi-statique, mais aussi que l'on reste correct sur des fréquences plus élevées.

4.2. Rayonnement de la structure

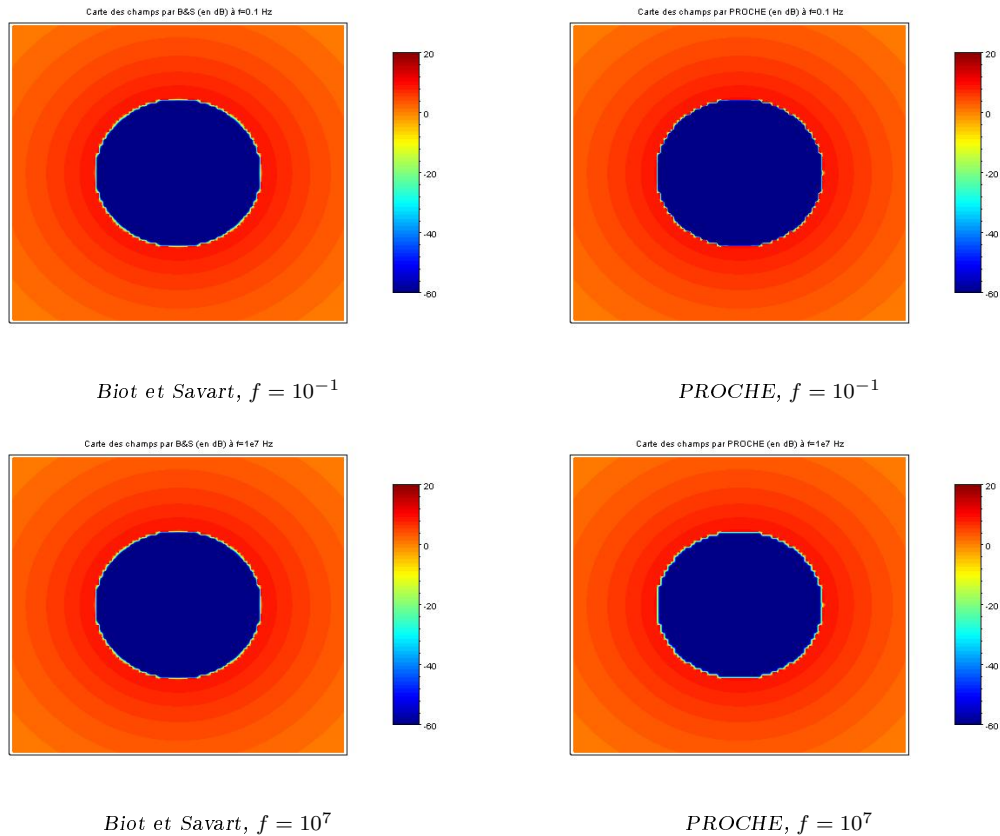


FIG. 4.5.: Cartographie de champ

La validation du calcul du champ rayonné s'effectue par comparaison du calcul analytique de type *Biot et Savart* avec la formulation éléments finis *PROCHE*.

La formule de Biot et Savart étant applicable en basse fréquence, on s'intéresse aux limites de la formulation. Nous donnons sur la figure 4.5 les résultats obtenus à $f = 10^{-1} Hz$ et $f = 10^7 Hz$. On rappelle que par la formule de Biot et Savart, le champ H est de la forme $H(r) = \frac{I}{2\pi r}$. De plus, compte tenu que les courants au niveau des éléments sont normalisés par le courant total et que dans ce cas, les courants au niveau de tous les éléments sont identiques, on obtient pour un point M sur le cercle tel que $||OM|| = r$:

$$H(M) = \frac{\sum_{k=1}^{nb_elem} I^k}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi r}$$



Pour $r=50.10^{-3} m$ on obtient la valeur en dB : $20\log_{10}(H(r)) \approx 10.05$. C'est ce que nous observons avec les deux codes. De plus, via le théorème d'Ampère et la symétrie de révolution du problème 2D, on bien que le champ est nul à l'intérieur et $H(r) = \frac{\sum_{k=1}^{n_b} I_k}{2\pi r}$ pour $r > 50.10^{-3} m$: on a une discontinuité du champ H en $r = 50.10^{-3} m$. Aussi, comme la formule de Biot et Savart est valable dans un domaine quasi-statique, on compare les valeurs des champs obtenus aux fréquences $10^{-1} Hz$ et $10^7 Hz$. Pour être rigoureux, nous calculons les erreurs entre les deux méthodes de calcul en norme L^2 pour ces fréquences (cf figure 4.6). Cette erreur est donnée par :

$$err := ||\vec{H}_{mefisto} - \vec{H}_{elfi2T}||_{L^2} = (\int_{\Omega} (\vec{H}_{mefisto} - \vec{H}_{elfi2T})^2)^{\frac{1}{2}}$$

Avec Ω le domaine de calcul du champ.

On remarque que l'erreur se concentre principalement sur le bord, c'est à dire le lieu de fortes

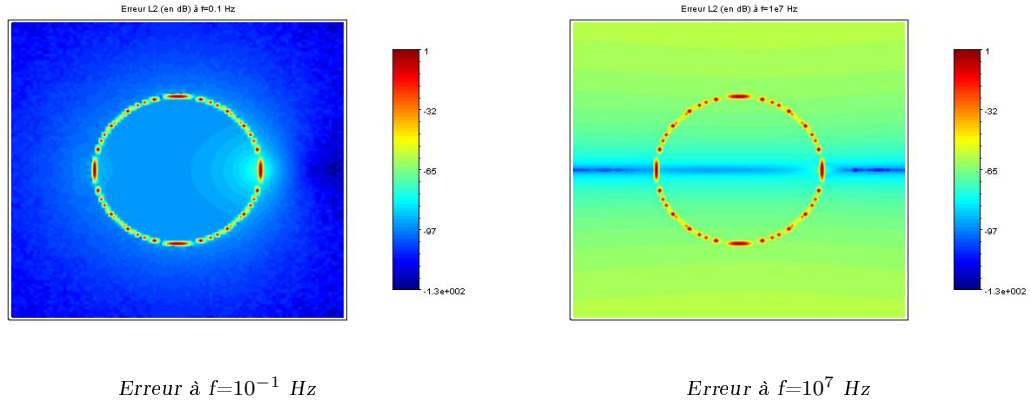


FIG. 4.6.: Erreur L^2 entre les deux méthodes de calcul de champ

singularités. À l'intérieur, l'écart entre les deux méthodes est de 10^{-3} (-60 dB)

Enfin, par des courbes unidimensionnelles sur l'axe $y = 0$, nous donnons les résultats obtenus avec les deux approches sur la figure 4.7. On note que le calcul par *PROCHE* comporte une

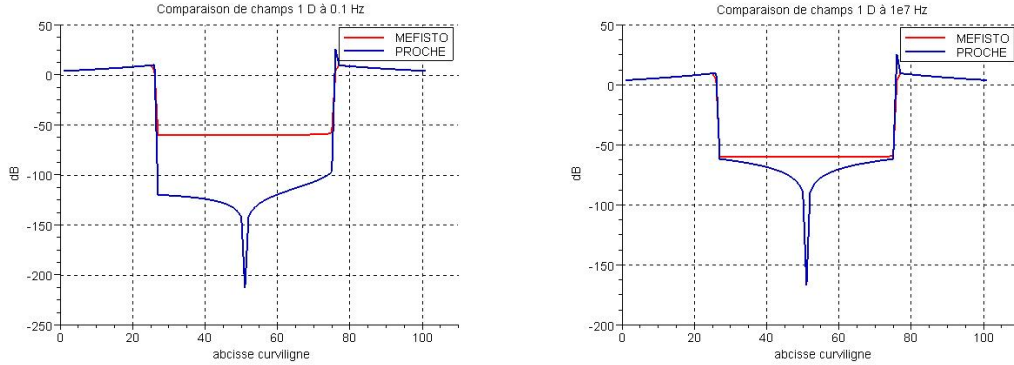


FIG. 4.7.: Champ rayonné sur l'axe $y = 0$ à $f = 10^{-1} Hz$ et $f = 10^7 Hz$

"grande" singularité. Le fait qu'un point de la grille de calcul du champ rayonné coïncide avec un point du bord de la structure rend le noyau de Green singulier et l'approximation intégrale par quadrature perd en performance. Soulignons néanmoins qu'outre cette singularité, les deux codes donnent des résultats similaires. La décroissance du champ à l'extérieur est de la même forme, c'est à dire en $\frac{1}{r}$.

Pour conclure sur ce chapitre, ce cas-test a démontré que les deux méthodes aboutissent aux mêmes résultats en calcul de courant à basses fréquences, des valeurs voisines à hautes fréquences et des cartographies de champs satisfaisantes. L'approche filaire pour l'étude de ces phénomènes se comporte bien par rapport au calcul réputé exact (*ELFI2T*) et trouve sa justification car elle est rapide.



5. Répartition de courant sur une structure à deux zones

5.1. Injection de type foudre dans une structure à deux zones

5.1.1. Description du cas-test

On considère une structure composée de deux disques, ces deux derniers étant distants de 50 mm, de rayon 10 mm, sont composés de matériaux d'épaisseur $\epsilon_p = 1$ mm chacun et des conductivités différentes. On note par ailleurs σ_i , $i=1,2$ la conductivité de chaque matériau (chaque disque).



FIG. 5.1.: Configuration du cas-test

La particularité de ce test réside en ce que $\sigma_2 = 2 \sigma_1$ et on prend $\sigma_1 = 5 \cdot 10^\alpha$ avec $\alpha = 2, \dots, 6$. L'étude se fait sur la gamme de fréquences (10^{-1} à 10^7 Hz).

L'objectif du présent cas-test est d'analyser la redistribution de courant en injection foudre.

5.1.2. Résultats

On donne sur la figure 5.2 les courants totaux obtenus ainsi que les distributions de courant par zone pour les différentes valeurs de conductivité imposée. À basse fréquence, comme le disque D_2 a une conductivité double par rapport à D_1 , les courants normalisés par zone valent $\frac{1}{3}$ (respectivement $\frac{2}{3}$) pour le disque D_1 (respectivement D_2). C'est bien le phénomène observé avec les codes *MEFISTO* et *ELFI2T*. À haute fréquence, on converge vers un facteur $\frac{1}{2}$ avec les deux codes car la répartition est inductive. Le courant se répartit de manière uniforme sur les deux parties (zones). Numériquement, on donne la structure de la matrice de résolution du système linéaire dans *MEFISTO* vue sous un angle "circuit électrique équivalent" :

$$Z = \begin{pmatrix} R_1 + j\omega L_1 & j\omega M_{12} \\ j\omega M_{12} & R_2 + j\omega L_2 \end{pmatrix}$$

avec :

- R_i la résistance équivalente par zone, $i = 1, 2$;
- L_i l'inductance équivalente par zone, $i = 1, 2$;
- M_{12} l'inductance mutuelle entre les zones 1 et 2.

Le système à résoudre, étant donné que l'on injecte 1 V pour chaque zone et que la longueur de la structure est 1 m, est alors :

$$\begin{pmatrix} R_1 + j\omega L_1 & j\omega M_{12} \\ j\omega M_{12} & R_2 + j\omega L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On obtient alors facilement i_k pour $k = 1, 2$:

- $i_1 = \frac{1}{\det(Z)} * (R_2 + j\omega L_2 - j\omega M_{12})$;
- $i_2 = \frac{1}{\det(Z)} * (R_1 + j\omega L_1 - j\omega M_{12})$.

soit, en posant $\tilde{L}_i = L_i - M_{12}$:

- $i_1 = \frac{1}{\det(Z)} (R_2 + j\omega \tilde{L}_2)$;

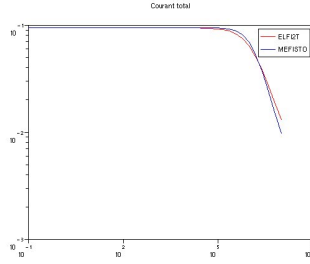
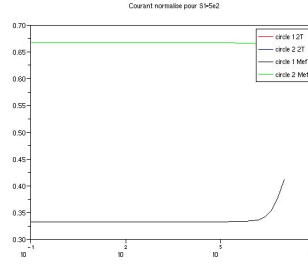
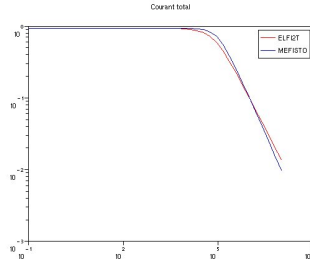
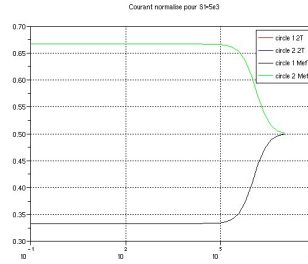
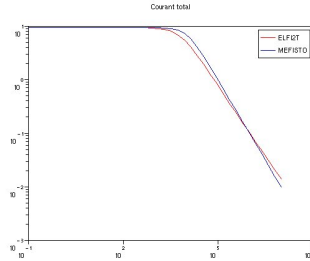
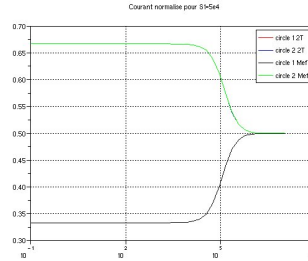
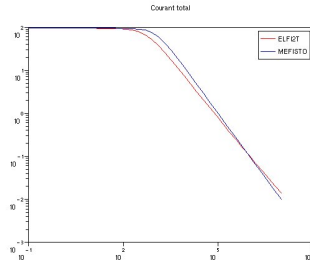
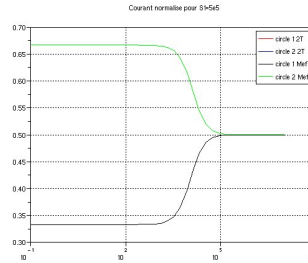
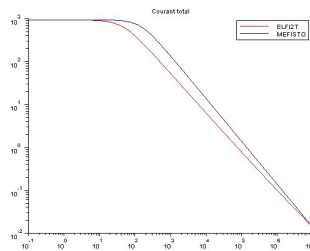
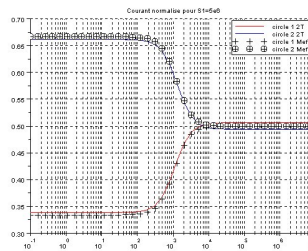
Courant total pour $\sigma = 500$ Courant total normalisé pour $\sigma = 500$ Courant total pour $\sigma = 5000$ Courant total normalisé pour $\sigma = 5000$ Courant total pour $\sigma = 50000$ Courant total normalisé pour $\sigma = 50000$ Courant total pour $\sigma = 500000$ Courant total normalisé pour $\sigma = 500000$ Courant total pour $\sigma = 5000000$ Courant total normalisé pour $\sigma = 5000000$

FIG. 5.2.: Courant total et normalisé obtenu avec les deux codes

$$-i_2 = \frac{1}{\det(Z)}(R_1 + j\omega\tilde{L}_1).$$

On note le courant total $i_{tot} := i_1 + i_2$ et on s'intéresse à la quantité $|\frac{i_k}{i_{tot}}|$. À basse fréquence, $\frac{i_1}{i_{tot}} \approx \frac{R_2}{R_1 + R_2}$, avec $R_2 = \frac{10^{3-\alpha}}{\pi}$, $R_1 = \frac{10^{3-\alpha}}{2\pi}$ pour $\sigma_1 = 5.10^\alpha$, $\sigma_2 = 10.10^\alpha$. On a alors en notant



que $R_1 = 2R_2$:

$$\left| \frac{i_1}{i_{tot}} \right| \approx \frac{1}{3}$$

C'est bien ce phénomène qui est observé en basse fréquence. Les rapports sont identiques entre *ELFI2T* et *MEFISTO*. En augmentant la fréquence, le terme prépondérant pour le calcul de i_k est le terme en $j\omega\tilde{L}_k$. Ainsi, $\frac{i_1}{i_{tot}} \approx \frac{\tilde{L}_2}{\tilde{L}_1 + \tilde{L}_2}$. Comme $\tilde{L}_1 = \tilde{L}_2$ avec $\tilde{L}_2 = 3.21e-7$, on a un facteur $\frac{1}{2}$ qui est justifié. D'ailleurs, le terme inductif pris en compte est de la forme $\omega\tilde{L}$, ce qui fait que plus la valeur de α est grande, plus la convergence vers le facteur $\frac{1}{2}$ a lieu à des fréquences plus basses.

En conclusion, les valeurs de courant normalisé pour 1 A injecté se valent entre les deux codes et correspondent aux phénomènes physiques attendus.

5.2. Rayonnement de la structure

On s'intéresse au rayonnement dans un voisinage proche. On utilise tout comme pour le cas-test précédent un calcul par *Biot et Savart* et par une formulation *PROCHE* éléments finis. On donne sur la figure 5.3 les résultats obtenus avec $\sigma_1 = 5000 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$:

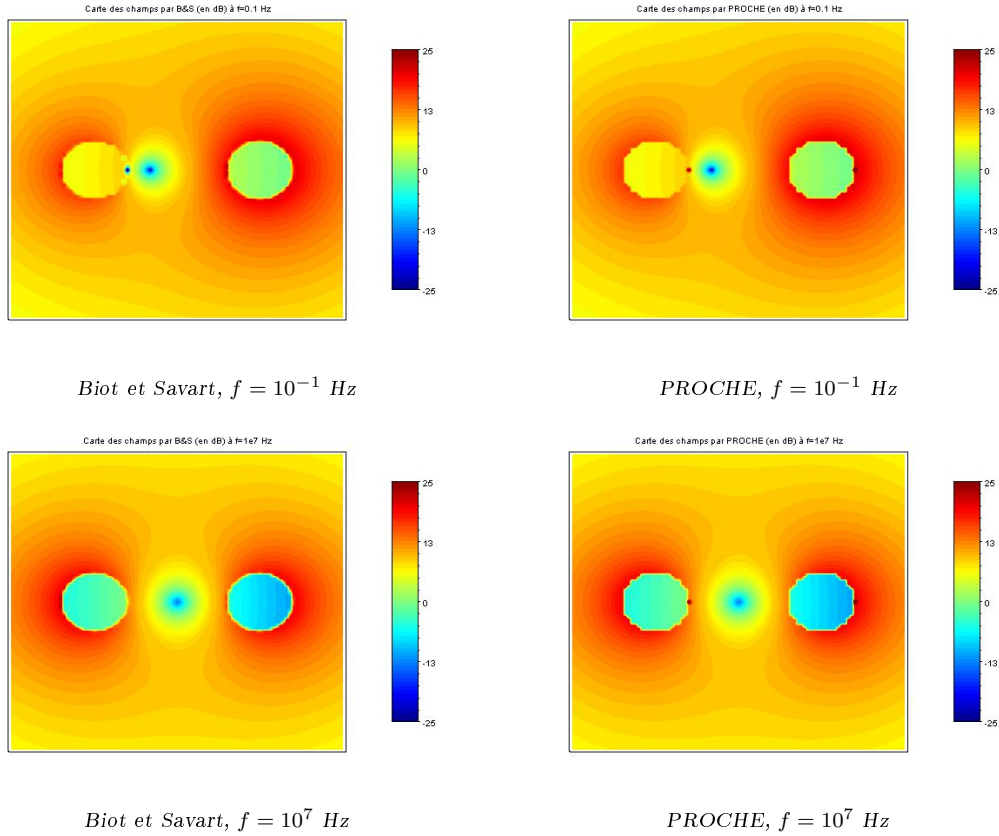


FIG. 5.3.: Champ rayonné avec Biot et Savart et PROCHE pour $\sigma = 5000 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

Les résultats semblent correspondre entre les deux méthodes. Le calcul de l'erreur en norme L^2 donné sur la figure 5.4 montre bien la cohérence et une erreur forte près des bords du domaine d'étude. À basse fréquence, on observe bien un renforcement du champ sur le conducteur 2 car le courant au niveau de cet élément est plus important. À haute fréquence, le courant est égal sur les deux conducteurs et on a une symétrie de champs. Le calcul du champ apporte une information supplémentaire visuelle.

On conclut par ce cas-test que l'on a une cohérence des phénomènes physiques obtenus. Sur une structure de ce type, on connaît les résultats et par les simulations numériques. De plus, les erreurs obtenues entre les deux méthodes sont faibles, entre -30 et -60 dB en moyenne (hors singularités des deux codes). Ce qui nous conforte sur les résultats. Bien que l'erreur semble plus

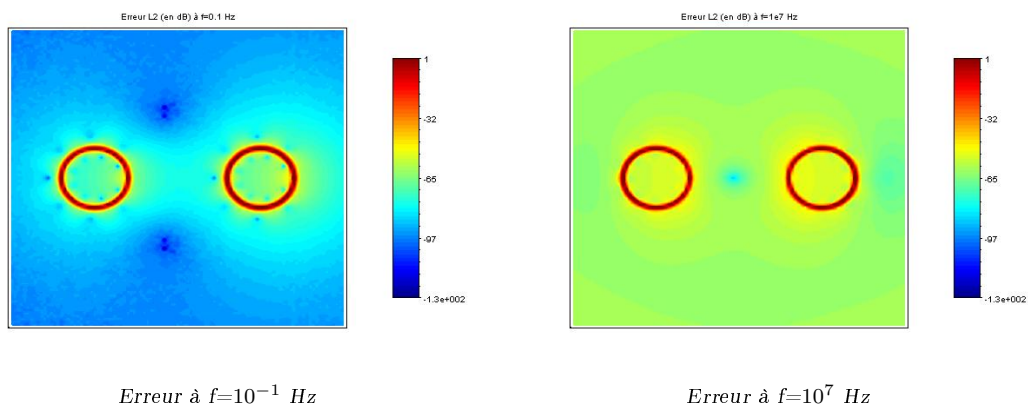


FIG. 5.4.: Erreur L^2 entre les deux méthodes de calcul de champ

importante à $f = 10^7$ Hz, elle reste néanmoins faible d'autant que pour des applications de type effets indirects de la foudre, cette fréquence est la borne supérieure.



6. Étude de la distribution de courant dans une structure de type voilure

6.1. Présentation du cas-test et résultats

Dans cette partie, on présente un cas-test plus complexe. La géométrie considérée représente une partie de voilure composée de plusieurs matériaux d'épaisseurs variées et de conductivités différentes. Dans notre cas, on partitionne la structure en dix zones (cf. figure 6.1)

On donne dans le tableau 6.1 les valeurs de conductivité/épaisseur pour chaque zone. Pour

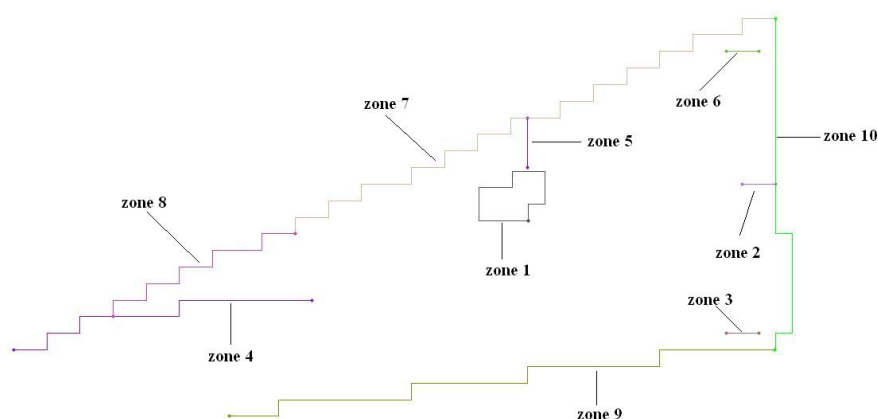


FIG. 6.1.: Partie de voilure discrétisée en marche d'escaliers

Zones	Conductivité (S/m)	épaisseur (en mm)
Zone 1	50 000	1
Zone 2	4 240 000	3
Zone 3	4 240 000	3
Zone 4	50 000	3
Zone 5	50 000	3
Zone 6	4 240 000	3
Zone 7	50 000	3
Zone 8	50 000	3
Zone 9	50 000	3
Zone 10	50 000	3

TAB. 6.1.: Conductivités et épaisseur par zone

une structure complexe de ce type discrétisée en marches d'escaliers (la géométrie importée correspond à une coupe provenant d'un modèle de type différences finies), l'observable est le courant normalisé au niveau de chaque zone.

6.2. Répartition du courant

Pour une comparaison entre les deux solveurs, on s'attend à une différence au niveau du courant total. Ceci résulte de la prise en compte des couplages inductifs (voir cas-tests précédents). C'est ce que l'on observe sur la figure 6.3 donnant le courant total.

Si l'on observe le courant normalisé par zone (cf figure 6.2), c'est à dire la répartition de 1 A injecté dans la structure au niveau des zones, et que l'on compare ces valeurs entre les deux solveurs, on constate que, indépendamment de la fréquence, les courants obtenus sont identiques. Ceci est plus représentatif physiquement car à l'échelle de la modélisation, il existe toujours des différences entre deux solveurs se basant sur deux principes différents (bien que pas totalement différents du fait que les équations de ligne de transmissions peuvent être établies à partir des

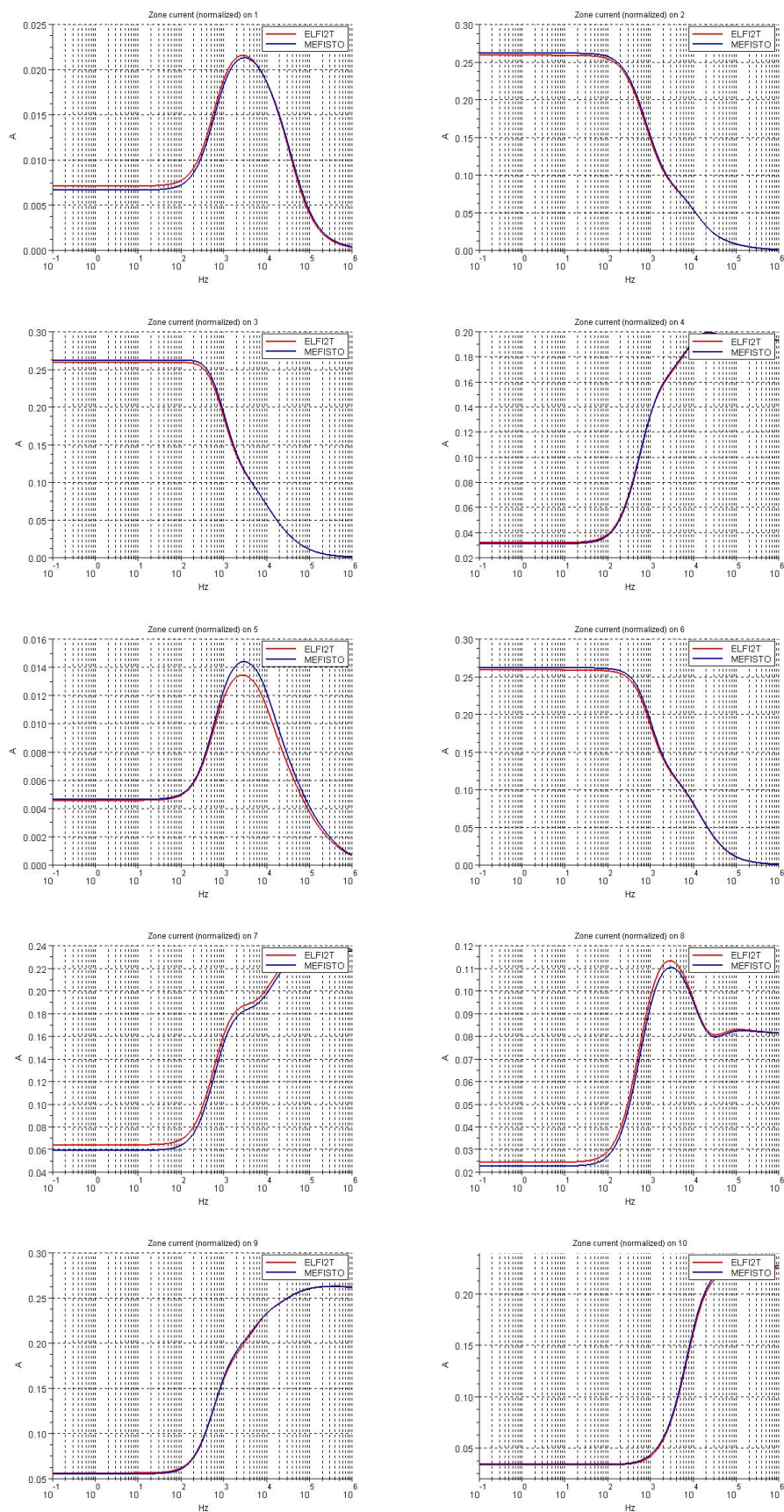


FIG. 6.2.: Courant normalisé par zone

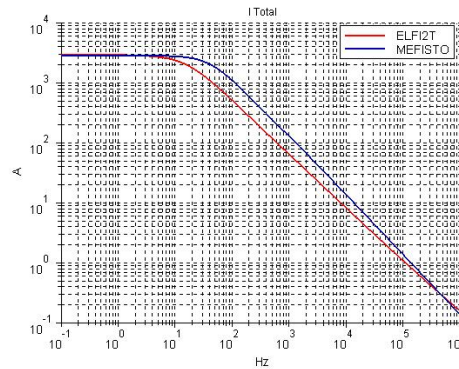


FIG. 6.3.: Courant total obtenu avec les deux solveurs sur la voile

équations de Maxwell). On remarque que sur une gamme de fréquence basse, l'essentiel du courant se concentre sur les zones 2, 3 et 6. Ceci provient du fait que la résistance sur ces zones est faible et que l'aspect résistif est plus important. En revanche, à haute fréquence, les effets inductifs, notamment liés à la géométrie de la structure, sont plus importants. On a un effet de blindage : le courant se concentre sur les zones "externes" et il n'y a plus de courant interne. Ce qui est le cas des zones 4, 7, 8, 9 et 10.

6.3. Rayonnement de la structure

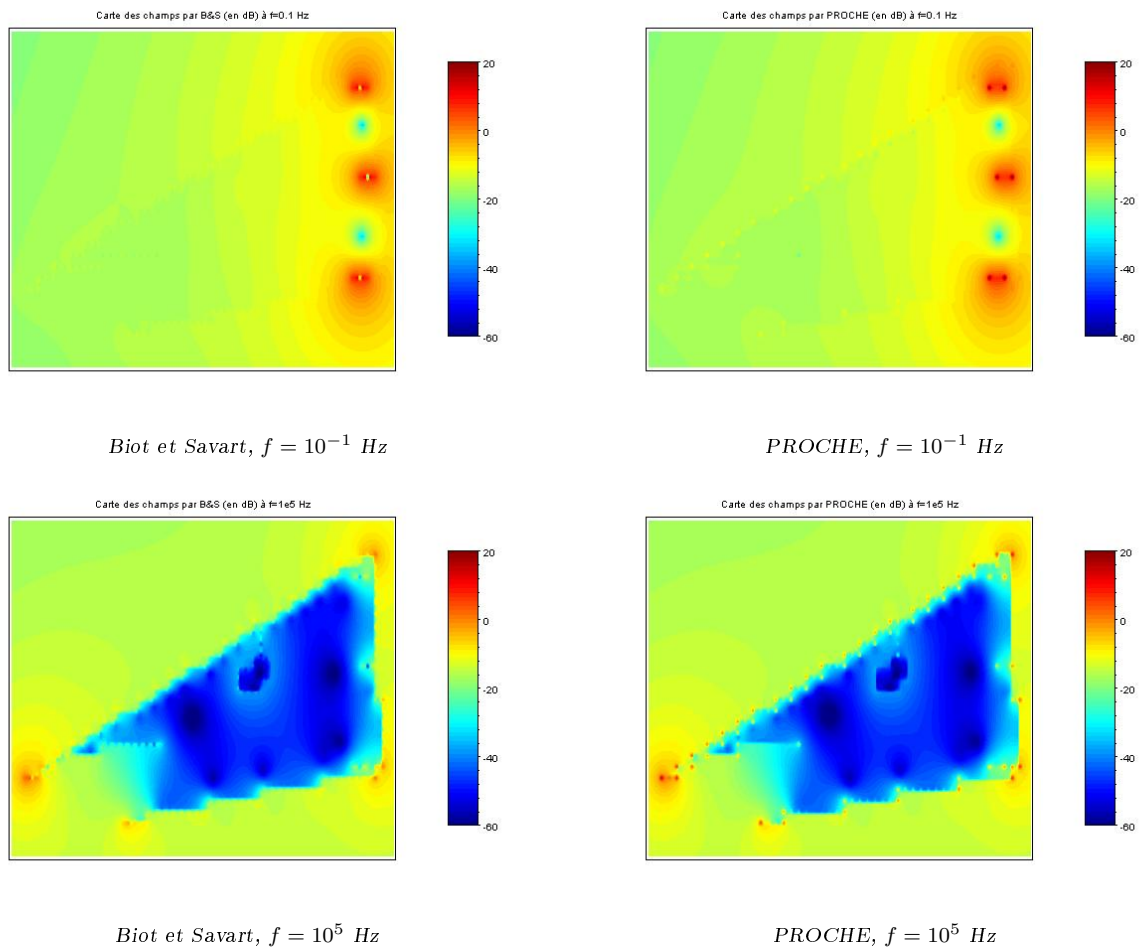


FIG. 6.4.: Champ rayonné avec PROCHE et Biot et Savart



À priori, puisque les courants normalisés par zone sont identiques entre les deux solveurs, on s'attend à une cohérence de résultats de champs (modulo les singularités qui peuvent exister). Nous donnons sur la figure 6.4 les cartes de champ magnétique aux fréquences 10 et 10^5 Hz. Visuellement on constate que les cartes sont semblables. En imposant les valeurs minimales et maximales des seuils, on élimine les éventuelles singularités.

De plus, pour valider le calcul du champ, on peut confronter ce dernier avec les calculs de courant effectués par zone dans la section précédente. On constate que l'on retrouve les mêmes phénomènes, à savoir qu'en basse fréquence le courant se concentre sur les zones 2, 3 et 6 et que l'on retrouve l'effet de blindage à haute fréquence, c'est à dire le champ à l'intérieur est quasi-nul. Le calcul de l'erreur entre les deux méthodes donné sur la figure 6.5 montre que l'erreur se concentre principalement sur les bords de la voilure. Ce qui met en avant l'hypothèse de singularité près des frontières. De plus, on s'aperçoit qu'à 10^5 Hz, l'erreur reste raisonnable. En effet, à cette fréquence, on atteint en moyenne $10^{-\frac{3}{2}}$ (soit - 30 dB). Ce qui est plutôt satisfaisant.

En conclusion, sur une géométrie plus complexe, on a effectué une comparaison entre les

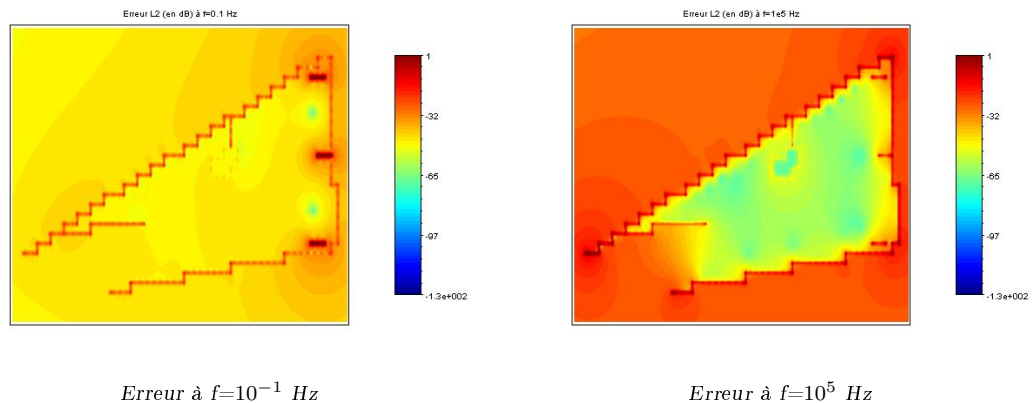


FIG. 6.5.: Erreur L^2 entre les deux méthodes de calcul de champ

deux solveurs et nous avons obtenus le même résultat lorsqu'on a fixé le bon observable. On a aussi pu comprendre ces résultats pour juger de leur pertinence.

On a complété l'étude en calculant le champ magnétique et confronter ces résultats avec le courant normalisé pour mettre en évidence les effets résistifs et inductifs pour ce cas.



7. Injection de type fonctionnelle

On s'intéresse à la modélisation d'un phénomène de distribution de courant avec retour. On va décrire le cas-test et proposer une vision "circuit équivalent", donner et interpréter les résultats obtenus.

7.1. Description du cas-test

On se donne deux barres B_1 et B_2 de longueurs 10 cm chacune que l'on dispose l'une à proximité de l'autre ($d=5\text{cm}$), symétriques par rapport à l'infini. Ces deux barres sont composées



FIG. 7.1.: Configuration du cas-test

de matériaux d'épaisseur 1 mm et de conductivité électrique :

- $\sigma_1 = 50000 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ pour B_1 ;
- $\sigma_2 = 100000 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ pour B_2 .

Enfin, pour modéliser le phénomène de retour de courant, on place des générateurs délivrant une tension de $+0.5\text{V}$ sur les éléments de B_1 et -0.5V sur les éléments de B_2 tout en forçant le courant à parcourir le même circuit en retour.

Tous les calculs sont réalisés par rapport à une référence à l'infini, il faut donc imposer une résistance forte en Z_L . Le schéma 7.2 donne un aspect global de la façon à prendre en compte le phénomène. Cette condition aux limites ne change pas la nature du système linéaire à résoudre, mais affecte numériquement la résolution. La valeur de charge est un compromis entre modélisation physique et résolution numérique du système. En effet, pour une valeur de z_m élevé, la matrice Z_L devient prépondérante et le système n'admet pas de solution du fait que cette matrice est non inversible.

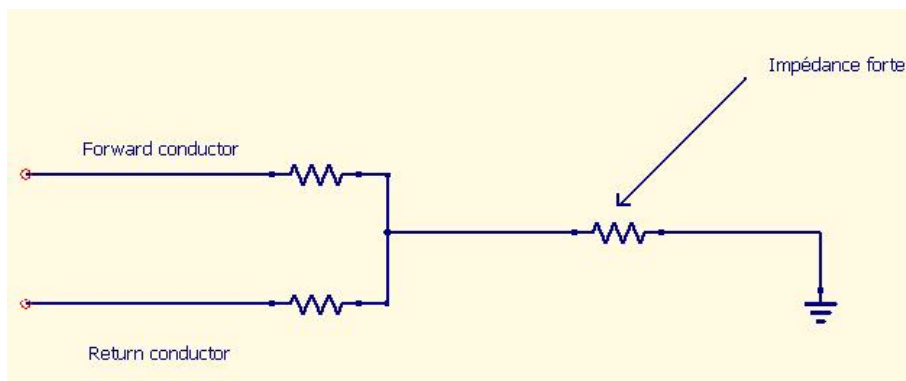


FIG. 7.2.: Circuit équivalent injection fonctionnelle

7.2. Système linéaire et prise en compte de la condition aux limites

On donne la matrice de résolution du circuit équivalent :

$$\begin{pmatrix} R_1 + j\omega L_1 + z_m & j\omega M_{12} + z_m \\ j\omega M_{12} + z_m & R_2 + j\omega L_2 + z_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

Soit alors :



$$\begin{aligned} -i_1 &= \frac{1}{2\det(Z)}(R_2 + j\omega L_2 + j\omega M_{12} + z_m); \\ -i_2 &= \frac{-1}{2\det(Z)}(R_1 + j\omega L_1 + j\omega M_{12} + z_m). \end{aligned}$$

avec $R_1 = 2$, $R_2 = 1$, $\det(Z) = z_m(R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M_{12})) + (R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2) - (j\omega M_{12})^2$

À basse fréquence, le terme prépondérant dans la matrice est z_m . À haute fréquence, z_m devient petit devant le terme $j\omega L$ et on s'attend donc à retrouver des résultats identiques au cas de l'injection foudre. Notons que z_m est fixée à 5.10^{-6} dans le cas de l'injection foudre et qu'il n'existe pas pour le moment des conditions aux limites sous *ELFI2T* permettant de prendre en compte le phénomène d'injection fonctionnelle de façon équivalente.

7.3. Résultats et analyse

Les fréquences pour lesquelles on simule le phénomène sont comprise entre 10^{-1} et 10^7 Hz. On donne les modules du courant i_1 normalisés obtenus avec les deux codes. On constate que

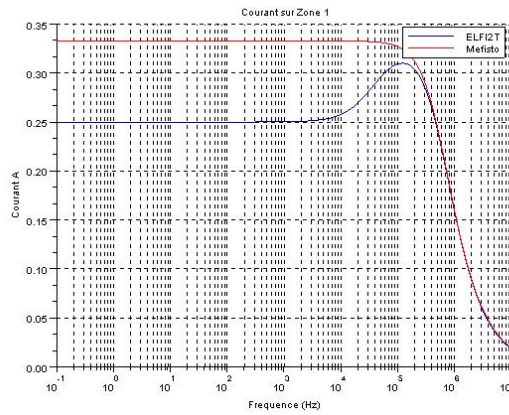


FIG. 7.3.: Courant normalisé i_1 sur la zone 1 obtenu avec les deux solveurs

les résultats obtenus sont bien ceux attendus pour le code *MEFISTO*. En analysant le système linéaire d'une part, on trouve que le courant $i_1 \approx \frac{1}{R_1 + R_2}$ avec $R_1 = 2$ et $R_2 = 1$. D'autre part, en imposant une différence de potentiel de 1 V, on souhaite justement que le courant parcourt le circuit avec une résistance totale $R_1 + R_2$. C'est bien le phénomène observé sur la figure 7.3. On conclut sur une cohérence des résultats pour ce cas-test.

Conclusion

Cette partie avait pour objectifs de mettre en avant la méthode filaire et les cohérences des résultats. La validation effectuée vis à vis d'un code éléments finis s'est avérée concluante.

Les routines développées permettent de comparer facilement ces derniers pour les cas-tests identiques.

Troisième partie .

Études statistiques : Répartition du courant dans
une structure de type fuselage



Introduction

7.4. Présentation de la problématique

Le recours aux études d'incertitudes est un enjeu majeur dans le domaine de l'aéronautique, notamment dans le cas fonctionnel. Le dimensionnement des retours de courant dans des systèmes complexes est déterminé notamment par les courants parasites qui peuvent circuler dans les structures. Des analyses de sensibilité et de défaillance sont conduites pour évaluer les risques de non tenue aux spécifications.

On s'intéresse au retour de courant dans une structure, obtenu en fréquentiel par la méthode des moments. On se donne une structure complète de type fuselage d'avion lorsqu'une ou plusieurs alimentations DC ou AC débitent du courant et ce pour plusieurs fréquences.

Des ports d'intérêt représentent les jonctions ou équipements présents dans la structure. Les jonctions sont modélisées par des charges dont la valeur a été validée par la mesure. Dans notre étude statistique, on prend en compte des incertitudes sur ces charges qui sont les données d'intérêt.

En effet, on peut émettre l'hypothèse que certaines valeurs sont données à titre nominal et qu'il peut exister des variations sur ces dernières. Il est alors important de "maîtriser" ces incertitudes, d'en déterminer quels sont par exemple les facteurs prépondérants à un dysfonctionnement du système, de définir les zones à risques pour lesquelles une protection est nécessaire. Ce type d'analyse s'effectue en phase de pré-design.

Pour une configuration donnée, on souhaite établir les valeurs de courants et tension en ces ports d'intérêt. Le calcul direct 3D est très coûteux pour au final n'extraire que quelques données. On utilise alors un calcul MULTIPORT qui permet de résoudre un système de plus petite dimension ($np \times np$, ou np est le nombre de ports d'intérêts). Le principe de la méthode est le suivant :

- Un premier calcul 3D est nécessaire avec pour valeurs de charges par exemple, les valeurs nominales ;
- On détermine la matrice d'impédance aux ports Z en alimentant successivement les ports un à un, c'est à dire on "allume" successivement les ports un à un avec des tensions V de la forme $V = ((1, \dots, 0); (0, 1, \dots, 0); \dots, (0, 0, \dots, 1))$, on tire la valeur du courant du vecteur pour cette configuration dans la perspective de déterminer les valeurs de la matrice ;
- On a déterminé la matrice Z , pour effectuer le calcul avec un nouvel état de charge, disons Z_L pour impédances aux ports et E_L les forces électromotrices aux ports. En ajoutant la matrice Z_L et en prenant en compte également les forces électromotrices (on interprète ceci comme des conditions aux limites), on résout le problème :

$$(Z + Z_L)I = E_L$$

Le calcul est beaucoup plus rapide. Ce que l'on cherche, c'est la variation sur le courant lorsque des incertitudes sur Z_L existent. Il faut définir dans la suite une méthodologie à appliquer pour rechercher les quantités que l'on souhaite. Cette méthodologie est décomposée en plusieurs étapes comme mentionné dans 7.4 :

- Formaliser le problème : on définit des variables d'intérêts dont on souhaite "maîtriser" l'incertitude. Celle-ci est en pratique définie comme étant un modèle assez complexe de variables d'entrée. Il faut aussi définir les quantités aléatoires. On note alors $\underline{Y} = h(\underline{X}, d)$ où h est le modèle, \underline{X} les variables aléatoires en entrée, d les variables déterministes ;
- La phase de quantification des incertitudes, qui se fait notamment par l'appui d'une expertise ou de donnée expérimentale, a pour rôle de modéliser les aléas en entrée en déterminant les lois des variables (loi du vecteur aléatoire, relation d'indépendances...etc) ;
- La phase de propagation des incertitudes. Il s'agit de "traduire" le modèle $\underline{Y} = h(\underline{X}, d)$ en variables d'intérêts. L'approche probabiliste permet d'introduire et utiliser des méthodes numériques adaptées pour évaluer les tendances centrales, quantiles, probabilité de dépassement... Cette propagation va dépendre de la connaissance/méconnaissance du modèle : régularité ou linéarité par exemple qui permettent d'introduire des méthodes à faible coût en temps de calcul ;
- La hiérarchisation des sources d'incertitudes est la dernière phase. On "mesure" la contribution d'une variable aléatoire sur la variable/quantité d'intérêt.

Par la suite, nous appliquons la méthodologie définie ci-dessus pour des calculs en compatibilité électromagnétique.

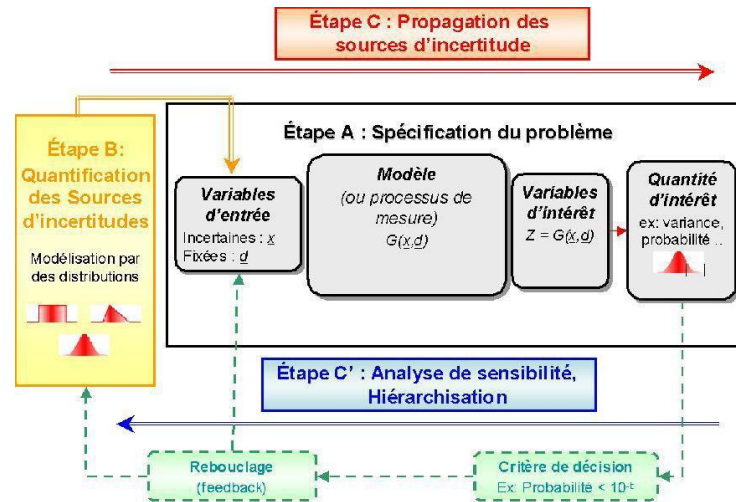


FIG. 7.4.: Méthodologie en incertitude

7.5. Modélisation du problème d'incertitudes

On s'intéresse dans notre étude au courant maximal pour une famille donnée de jonctions ou encore à la tension minimale au niveau des équipements (dans certains cas, on peut atteindre des centaines de familles avec au total plus de 3000 ports d'intérêt). Ce sont des valeurs dimensionnantes pour la spécification des systèmes. Le problème à résoudre est de la forme suivante :

- On dispose de n_f familles de jonctions numérotées de 1 à n_f ;
- Dans chaque famille, on dispose de n_f^p ports d'intérêts. Concrètement, ces ports modélisent des tensions au des équipements ou des jonctions modélisées par des charges ;
- L'aléa porte sur famille que nous fixons. Le vecteur aléatoire $X(X_1, \dots, X_{dim})$ est de dimension le nombre de ports d'intérêts qui composent la famille aléatoire ;
- L'ensemble des variables déterministes inclut notamment les familles non aléatoires (les valeurs sont fixées) ;
- Les variables d'intérêt sont les crêtes de courant ou encore les tensions minimales par famille. Dans notre étude, nous nous intéressons uniquement aux crêtes du courant par famille, c'est à dire $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \dots, \mathcal{Y}_{n_f})$ où $\mathcal{Y}_i = \max I(p_1, \dots, p_k, \dots, p_{n_f^p})$, p_k constituent les ports de la i -ème famille f_i ;

Le problème d'incertitudes, qui s'effectue dans un cadre formel probabiliste, est alors :

$$\mathcal{Y} = h(\mathcal{X}, d) \quad (7.1)$$

7.5.1. Quantification des sources d'incertitudes

Les lois de ces différents paramètres ne sont a priori pas connues : il faut faire des hypothèses. Nous admettons qu'au sein d'une famille supposée aléatoire, tous les éléments sont indépendants et identiquement distribués. Autrement dit, si une famille est supposée "aléatoire" et que sa dimension est dim alors les sources d'incertitudes en entrée sont un vecteur aléatoire de dimension dim où chaque composante du vecteur est une charge aléatoire. Toutes les composantes du vecteur (variable aléatoire) ont pour marginale la loi \mathcal{L}_μ^σ avec μ et σ respectivement la moyenne et la variance de la loi. Dans une première approche, \mathcal{L} est une loi uniforme (ses paramètres sont à définir).

7.5.2. Propagation des sources d'incertitudes

On a une certaine méconnaissance a priori du modèle. Les méthodes qui semblent être les plus efficaces sont les méthodes de Monte-Carlo. Néanmoins, ces méthodes sont relativement coûteuses car la vitesse de convergence pour l'estimateur de la moyenne est proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{N}}$, où N est le nombre de tirages. "Le budget calcul" est une donnée importante : il faut un compromis entre le temps que met une simulation à être exécutée (en on déduit le coût de N simulations) ainsi que la précision voulue.



On utilise aussi des méthodes s'appuyant sur la linéarisation de la variance (cumul quadratique) pour les tendances centrales et facteurs d'importances sur la moyenne. Par les méthodes FORM/SORM, on détermine des probabilités de dépassement de seuil.

7.5.3. Hiérarchisation

Les indices de sensibilité permettent de déterminer l'apport d'une variable sur la quantité d'intérêt. Or il existe différentes méthodes permettant le calcul de ces indices (Saltelli, FAST, polynômes du Chaos)

La détermination des indices de sensibilité par polynômes du Chaos semble être la méthode la plus robuste. C'est celle-ci pour laquelle nous optons. En notant que les variables d'intérêts sont les courants maxima au niveau des familles de jonction, il faut "traiter" avec pertinence ces valeurs.

Formellement, par le théorème de la variance totale :

$$\mathbb{V}(\mathcal{Y}) = \mathbb{V}(\mathbb{E}(\mathcal{Y}|\mathcal{X}_i)) + \mathbb{E}(\mathbb{V}(\mathcal{Y}|\mathcal{X}_i))$$

Le terme $\mathbb{V}(\mathbb{E}(\mathcal{Y}|\mathcal{X}_i))$ est d'autant plus grand que l'apport de la variable \mathcal{X}_i sera important pour la variable \mathcal{Y} . Les termes normalisés $S_i = \frac{\mathbb{V}(\mathbb{E}(\mathcal{Y}|\mathcal{X}_i))}{\mathbb{V}(\mathcal{Y})}$ constituent les indices de sensibilités qui nous intéressent et que nous voulons classer. On justifie dans la suite ce choix et l'interprétation de ces indices.





8. Approche probabiliste

La prise en compte des incertitudes des paramètres revient à écrire le problème sous forme probabiliste. De ce fait, le passage du cadre formel probabiliste au cadre numérique est assuré par la loi forte des grands nombres.

Dans la première partie, on rappelle quelques théorèmes probabilistes qui sont la base de la théorie de l'échantillonnage.

Ensuite on présente les méthodes classiques de Monte-Carlo pour le calcul d'intégrales ainsi que quelques estimateurs.

Enfin, nous présentons des méthodes qui peuvent s'avérer plus souples mais qui requièrent des hypothèses plus fines. de seuil ou encore les quantiles.

8.1. Méthodes de Monte-Carlo

Le but de cette section est de rappeler brièvement le principe des méthodes de Monte-Carlo, qui sont utilisées lorsque l'on traite de variables aléatoires. Ces méthodes s'appuient sur le principe d'échantillonnage : l'idée est de créer des échantillons de paramètres pouvant être utilisés en entrée du modèle pour déterminer une variable d'intérêt, sa probabilité de distribution ou encore d'autres quantités d'intérêt. Le processus est répété afin de générer différents jeux de données pour une variable aléatoire suivant une loi de probabilité définie. Par suite, nous appliquons le modèle à chacun de ces différents jeux de données pour en tirer un échantillon de la variable d'intérêt et en extraire des informations sur notre système (moyennes, dispersion, queue de distribution, aplatissement...).

Après quelques rappels de probabilités, qui assurent la convergence des méthodes d'échantillonnage, on explique comment calculer des quantités d'intérêt par ces méthodes, notamment la tendance centrale ou encore la probabilité de dépasser des seuils. On conclue par les avantages et limitations de la méthode.

8.1.1. Rappels de probabilité

Theorème 1 : *Loi forte des grands nombres*

Si $(X_i)_{i \in \{1,2,\dots,N\}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur \mathbb{R}^n et identiquement distribuées, de variance finie σ^2 et d'espérance μ , alors $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i) \xrightarrow{p.s} \mu$

Theorème 2 : *Théorème Central Limite*

Soit $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, identiquement distribuées et de carré intégrable. On pose $\mu = \mathbb{E}[X_n]$ et $\sigma = \mathbb{V}(X_n)$ et la moyenne empirique $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} X_k$. La suite $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{en loi} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

8.1.2. Méthodes d'intégration et estimateurs

On s'intéresse dans notre étude aux tendances centrales de la variable d'intérêt, ainsi que la probabilité de dépasser des seuils pour \underline{y} lorsque les charges sont supposées aléatoires. On s'intéresse donc à la moyenne μ , à l'écart type σ , à la symétrie ou encore à l'aplatissement. On définit les premiers moments de la loi (μ, σ) par :

$$\mu = \int_{\mathbb{R}^n} h(\underline{x}, d) dF_x(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} h(\underline{x}, d) f_x(\underline{x}) dx \quad (8.1)$$

$$\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}^n} h(\underline{x}, d)^2 f_x(\underline{x}) dx - \mu^2 \quad (8.2)$$

De manière générale, on peut réécrire une quantité d'intérêt sous forme intégrale. Le but est d'approcher numériquement ces intégrales en générant N-échantillons $\{y^1, \dots, y^N\}$ du modèle et en définissant des estimateurs convergeant.

L'estimateur usuel pour estimer la moyenne est donné par :

$$\bar{y} = \sum_{k=1}^N \frac{y^k}{N}$$



La convergence découle directement de la loi forte des grands nombres. De même, nous pouvons définir un estimateur permettant d'approcher l'écart type, ou plutôt la variance. Il est donné par :

$$S_{N-1}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (y^k - \bar{y})^2$$

C'est l'estimateur sans biais traditionnellement utilisé. L'écart type en découle comme étant la racine carrée de cette quantité. Dans la pratique, on souhaite estimer la moyenne d'une variable d'intérêt obtenue en échantillonnant. Mais il est souvent judicieux de donner un intervalle de confiance autour de la moyenne avec des seuils de niveau (95% par exemple, ou encore 99%). Par le théorème central limite, on sait que la limite en loi de toute variable aléatoire est une gaussienne. De plus, nous disposons de la table de la loi normale centrée réduite. Donc il est facile d'établir l'intervalle de confiance qui correspond à notre variable aléatoire, même si nous disposons de la moyenne et de l'écart-type empiriques. En effet, par le théorème de Slutsky [6], l'intervalle construit converge asymptotiquement vers l'intervalle théorique. Rappelons brièvement la procédure :

- On cherche a, b tels que $\mathbb{P}(\mathbb{X} \in [a, b]) = s$ ou $0 < s < 1$. On suppose ici que $\mathbb{X} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Par symétrie de la loi, on pose $a = -b$ avec $b > 0$;
- Pour déterminer a , on sait que la probabilité recherchée est équivalente à $\mathbb{P}(\mathbb{X} \leq b) = s + \frac{1-s}{2} = F(b)$, F étant la fonction de répartition de la loi gaussienne centrée réduite. On obtient b sur la table ($b := q_{\frac{s+1}{2}}$) ;
- En utilisant le théorème central limite et le théorème de Slutsky, on détermine un intervalle de confiance de niveau s pour y avec $IC := [\bar{y} - q_{\frac{s+1}{2}} \frac{S_{N-1}}{\sqrt{N}}, \bar{y} + q_{\frac{s+1}{2}} \frac{S_{N-1}}{\sqrt{N}}]$.

Pour conclure, on donne un estimateur permettant de calculer la probabilité de dépassement de seuil. Celui-ci est donné par :

$$p_s := \mathbb{P}(\mathbb{Y} > s) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{y^k > s}$$

8.1.3. Avantages et limites de la méthodes

Bien que la méthode a l'avantage d'être très insensible à la dimension du problème et la régularité de la fonction (pourvue qu'elle soit de carré intégrable), la principale limitation réside dans le fait que pour estimer avec une bonne précision, il faut que la taille de l'échantillon soit grande. Typiquement, pour une précision de l'ordre de $10^{-\alpha}$, il faut $10^{\alpha+2}$ simulations. Ce résultat peut être établi en combinant l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev et un encadrement par un intervalle de confiance. Ce nombre de simulations représente un coût certain.

Néanmoins, il est possible d'implémenter des algorithmes qui permettent de distribuer l'échantillonnage.

8.2. Analyse de sensibilité

Dans la prise en compte des incertitudes, $\underline{\mathcal{Y}} = h(\underline{\mathcal{X}}, d)$ est une variable aléatoire correspondant à la réponse du modèle générique aux variables aléatoires \mathcal{X}_i .

Dans la phase d'analyse de sensibilité, on s'intéresse à la contribution relative de la composante \mathcal{X}_i sur l'incertitude de \mathcal{Y} , pour en extraire notamment celles qui sont les plus influentes de façon à réduire les incertitudes sur \mathcal{Y} .

Mathématiquement, on cherche à construire une approximation $\hat{\mathcal{Y}}$ de \mathcal{Y} en fonction de \mathcal{X}_i qui soit la meilleure au sens quadratique (L^2). Soit alors :

$$\hat{\mathcal{Y}} = \hat{\mathcal{Z}} \in L^2(\mathbb{R}^{dim}) ||| \hat{\mathcal{Z}}(\mathcal{X}_i) - \mathcal{Y}(\mathcal{X}_i) |||_{L^2(\mathbb{R}^{dim})} \text{ minimale}$$

où $f_{\mathcal{X}} \mathcal{X}$ est la densité de \mathcal{X} . On montre que la meilleure approximation est l'espérance conditionnelle de \mathcal{Y} à \mathcal{X} :

$$\hat{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}_i) = \mathbb{E}(\mathcal{Y} | \mathcal{X}_i)$$

Ainsi, l'incertitude de la composante \mathcal{X}_i est estimée par la variance de la variable aléatoire $\hat{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}_i)$. La part relative est donnée par :

$$S_i = \frac{\mathbb{V}(\mathbb{E}(\mathcal{Y} | \mathcal{X}_i))}{\mathbb{V}(\mathcal{Y})}$$

Il s'agit d'indice du premier ordre qui représente la part d'incertitude due à la variable aléatoire \mathcal{X}_i seule. On peut aussi étendre la définition pour déterminer des moments d'ordre supérieurs. Les espérances conditionnelles sont déterminées en s'appuyant sur la décomposition de Hoeffding



[6].

Par cette composition, la variance est donnée par :

$$\sigma^2(f) = \mu^2 + \sum_{u \subseteq 1,2,\dots,dim} \sigma_u^2$$

où les σ_u^2 sont au nombre de $2^{dim}-1$ et constituent les variances conditionnelles. Nous nous restreignons aux indices du premier ordre.

On s'intéresse à l'estimation de ces indices. Il existe plusieurs méthodes pour la mise en oeuvre se basant principalement sur des tirages de Monte-Carlo, qui peuvent néanmoins avoir pour inconvénients de ne pas assurer la positivité des indices. Nous optons pour le calcul via les polynômes du chaos. On approche notre modèle par une fonction polynomiale (polynôme du chaos), c'est à dire que \mathcal{Y} est approché par \hat{Y} tel que :

$$\hat{Y} = \sum_{k \subseteq K} \alpha_k \psi_k \circ T(\mathcal{X})$$

avec :

- K est un ensemble fini de \mathbb{N} ;
- T est une transformation iso-probabiliste [1];
- ψ_k constitue une base polynomiale orthogonale et multi-variée;

La construction de cette dernière dépend des variables aléatoires en entrée. Si on note $p(X_i) = \prod_i p_i(X_i)$ où p_i le produit des densités aléatoires indépendantes X_i , alors :

$$\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \int_{R^{dim}} \psi_i(x) \psi_j(x) p(x) dx$$

De manière générale, pour définir complètement l'approximation $\hat{\mathcal{Y}}$, il faut déterminer les coefficients α_k qui sont obtenus par :

$$\alpha_k = \frac{1}{\|\psi_k\|^2} \langle \hat{\mathcal{Y}}, \psi_k \rangle$$

On détermine facilement la variance par :

$$\mathbb{V}(\mathcal{Y}) = \sum_{k=1}^d \alpha_k^2 \|\psi_k\|^2$$

Les indices de sensibilité du premier ordre qui en découlent sont donnés par :

$$S_k = \frac{\alpha_k^2 \|\psi_k\|^2}{\sum_{k=1}^d \alpha_k^2 \|\psi_k\|^2}$$

où d est le degré du polynôme (troncature)

Par rapport aux méthodes classiques, le calcul est très robuste et ne nécessite en général pas beaucoup de simulations. Il est aussi facile de déterminer les indices d'ordre supérieur, qui peuvent d'une manière générale être utiles (bien que négligeables dans notre étude).





9. Résultats et analyse

Le problème que nous proposons de résoudre porte sur l'étude de la répartition des courants dans une structure lorsqu'une ou plusieurs alimentations DC ou AC débitent du courant et ce pour plusieurs fréquences.

La figure 9.1 donne un aperçu de la structure étudiée, discrétisée par un maillage surfacique et

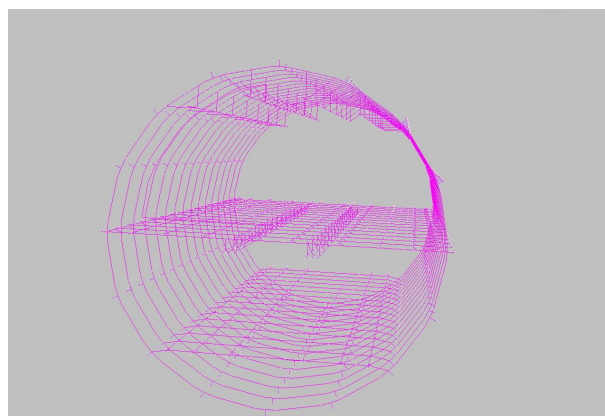


FIG. 9.1.: Barrel 44 ports

filaire. Le modèle se compose de 44 points d'intérêt ou ports et parmi ceux-là on peut distinguer plusieurs familles (le modèle considéré est composé de cinq familles) d'équipements ou de jonctions. Ces dernières se modélisent par des résistances dont la valeur a été validée par mesure. Selon les configurations d'alimentation et de consommation des équipements, plusieurs scénarii d'injection de courant dans la structure sont envisageables. Comme les points sont des points discrets (noeud du maillage), il est possible de réduire la taille des problèmes à calculer pour chaque scénario en compressant la structure aux ports d'intérêt.

Le but de ce paragraphe est de montrer l'évolution des courants maximaux observés dans les différentes familles lorsque des valeurs de résistances de jonctions sont considérées comme incertaines ou bien défaillantes.

Le calcul nominal est effectué pour toutes les résistances en état nominal avec le code ASERIS-BE (Boundary Element) qui permet la résolution du système de Maxwell harmonique par la méthode des équations intégrales [4].

Pour l'étude statistique, on propose deux scénarii d'étude :

- Une analyse par famille : on se donne une famille entière de jonctions (jonction cadre/peau, strip/cadre par exemple) dont la valeur de charge nominale est considérée comme incertaine. L'étude consiste à mettre des aléas au niveau des charges de toute la famille ;
- Un scénario de type défaillance dans une famille : on considère qu'un certain pourcentage des jonctions sont défaillantes et qu'elles valent 100Ω par exemple. Il est intéressant de comprendre les conséquences d'une telle défaillance. On note ici que le nombre de cas est fini. Pour des "petits modèles", il est possible d'explorer toutes les configurations.

On suppose aussi qu'au sein d'une famille, les charges sont supposées aléatoires. Ceci se traduit par exemple par le fait qu'il n'y ait pas de surcharge/sous charge mécanique au niveau d'une famille qui ferait que les éléments sont liés.

Les études ont été menées pour $f = 0.1 \text{ Hz}$, 760 Hz , 800 Hz et les résultats que nous donnons sont pour $f = 0.1 \text{ Hz}$.

9.1. Analyse par famille

9.1.1. Positionnement du problème

On donne dans le tableau 9.1 le problème à résoudre avec les différents scénarii établis. On note R_{nom} la résistance nominale d'une jonction de la famille. Cette charge est identique pour toutes les jonctions de cette famille. La dimension de la famille conditionne la dimension du



	RT1	RT2	ST1	ST2	Jxxx
Scénario 1	Incertaine	Déterministe	Déterministe	Déterministe	Déterministe
Scénario 2	Déterministe	Incertaine	Déterministe	Déterministe	Déterministe
Scénario 3	Déterministe	Déterministe	Incertaine	Déterministe	Déterministe
Scénario 4	Déterministe	Déterministe	Déterministe	Incertaine	Déterministe
Scénario 5	Déterministe	Déterministe	Déterministe	Déterministe	Incertaine
Observables	Imax(ST1)	Imax(ST1)	Imax(ST1)	Imax(ST1)	Imax(ST1)
	Imax(ST2)	Imax(ST2)	Imax(ST2)	Imax(ST2)	Imax(ST2)
	Imax(RT1)	Imax(RT1)	Imax(RT1)	Imax(RT1)	Imax(RT1)
	Imax(RT2)	Imax(RT2)	Imax(RT2)	Imax(RT2)	Imax(RT2)
	Imax(Jxxx)	Imax(Jxxx)	Imax(Jxxx)	Imax(Jxxx)	Imax(Jxxx)
Nombre de tirages MC	10000	10000	10000	10000	10000
Nombre de variables aléatoires	7	7	6	6	16
Résistance jonction nominale	$4\mu\Omega$	$4\mu\Omega$	$4\mu\Omega$	$4\mu\Omega$	$100m\Omega$

TAB. 9.1.: Scenarii et simulations

problème d'incertitudes ; il y aura donc autant de variables aléatoires que de jonctions dans la famille. La difficulté consiste en ce que les jonctions sont plus ou moins reliées. On se propose alors de réaliser des cas-tests en mettant indépendamment chaque famille aléatoire (5 cas). Le tableau 9.1 résume les cas d'étude.

La charge est incertaine avec $R \sim \mathcal{U}[\frac{R_{nom}}{4}, 5R_{nom}]$. L'observable est la valeur crête du courant par famille et ce pour toutes les familles.

9.1.2. Résultats

On exploite toutes les valeurs obtenues dans le tableau 9.1. On peut se reporter à l'annexe B.2 pour les codes mis en place pour ce type d'étude.

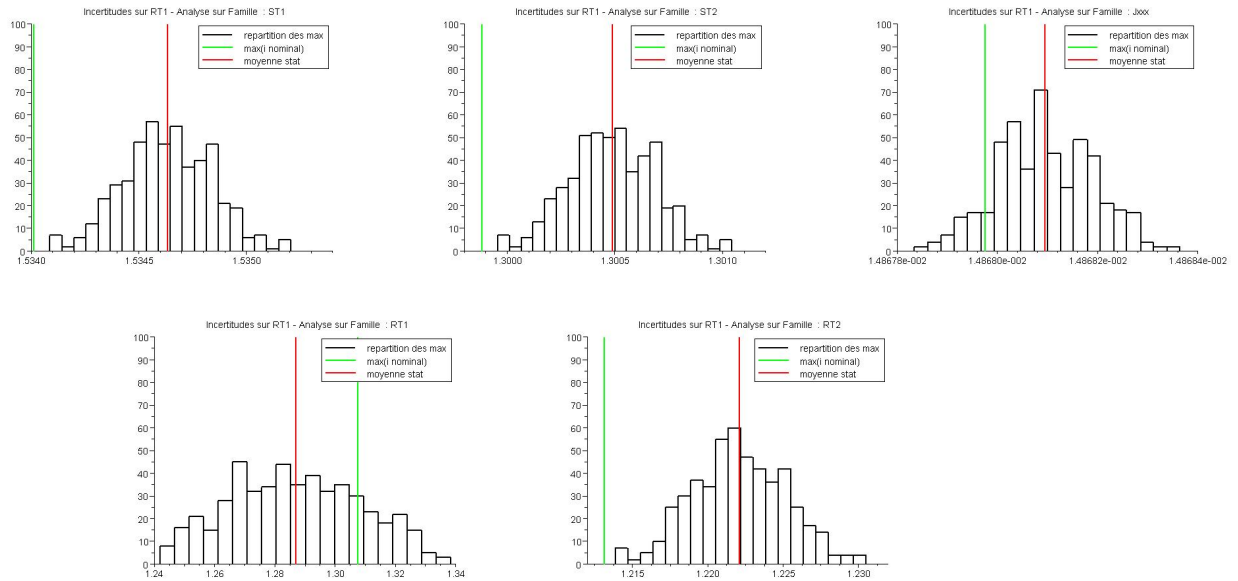


FIG. 9.2.: Crête de courant sur une famille lorsque la famille RT1 est incertaine

Les figures 9.2, 9.3, 9.4, 9.5 et 9.6 donnent la distribution de la crête sur une famille pour un aléa donné.

Premier résultat important

On remarque que la moyenne de l'échantillon pour la famille RT1 est inférieure à la crête nominale. En effet :

- Les lois en entrée sont dissymétriques : $R \sim \mathcal{U}[\frac{R_{nom}}{4}, 5R_{nom}]$, alors la charge moyenne est donnée par $\bar{R} = \frac{21}{8} R_{nom}$ et pour toutes les jonctions de la même famille ;

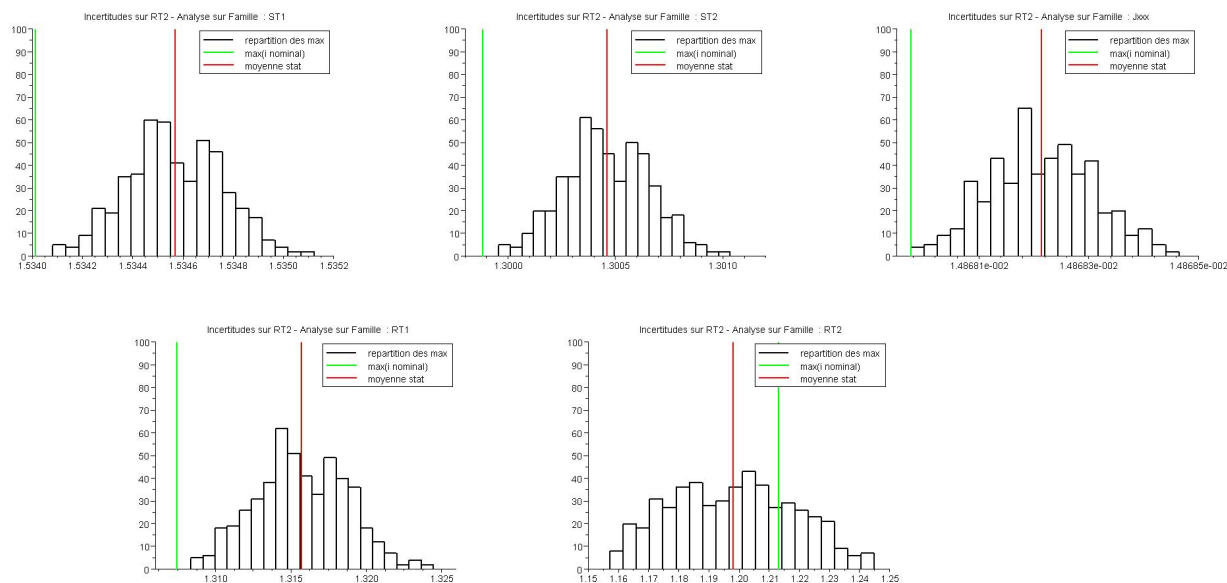


FIG. 9.3.: Crête de courant sur une famille lorsque la famille RT2 est incertaine

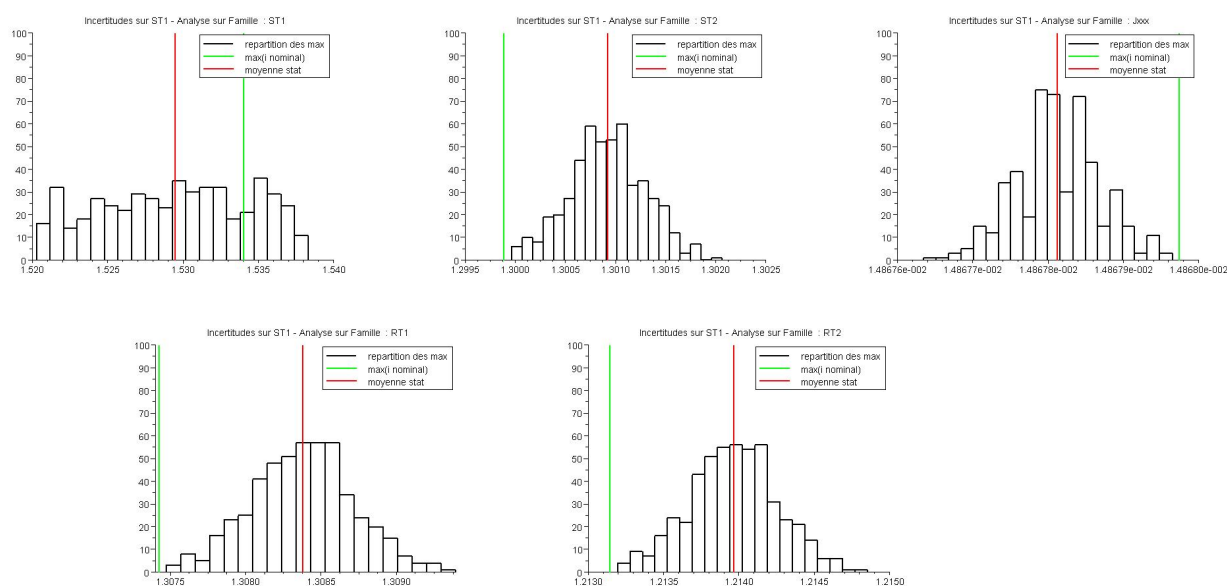


FIG. 9.4.: Crête de courant sur une famille lorsque la famille ST1 est incertaine

- Le courant maximal au sein d'une jonction étant conditionné par les charges faibles, comme la résistance augmente par rapport à la valeur nominale alors en moyenne la valeur de courant baisse.

C'est ce phénomène qui est observé dans cette étude de l'influence d'une variable en entrée sur les variables d'intérêt. Les résultats corroborent ces hypothèses.

Deuxième résultat important

Analysons les $I_{\max}(\bar{f})$ lorsque f aléatoire est différent de \bar{f} . Remarquons que les crêtes au niveau des familles déterministes croissent. Cette étude (cf. figure 9.7) permet d'établir que le phénomène se généralise : lorsque chaque famille f est aléatoire indépendamment l'une de l'autre, on remarque que $I_{\max}(f) > I_{\text{nom}}(f)$ lorsque l'aléa porte sur une famille \bar{f} avec $\bar{f} \neq f$. On a une baisse locale des courants dans une famille qui se compense par une remontée dans les familles

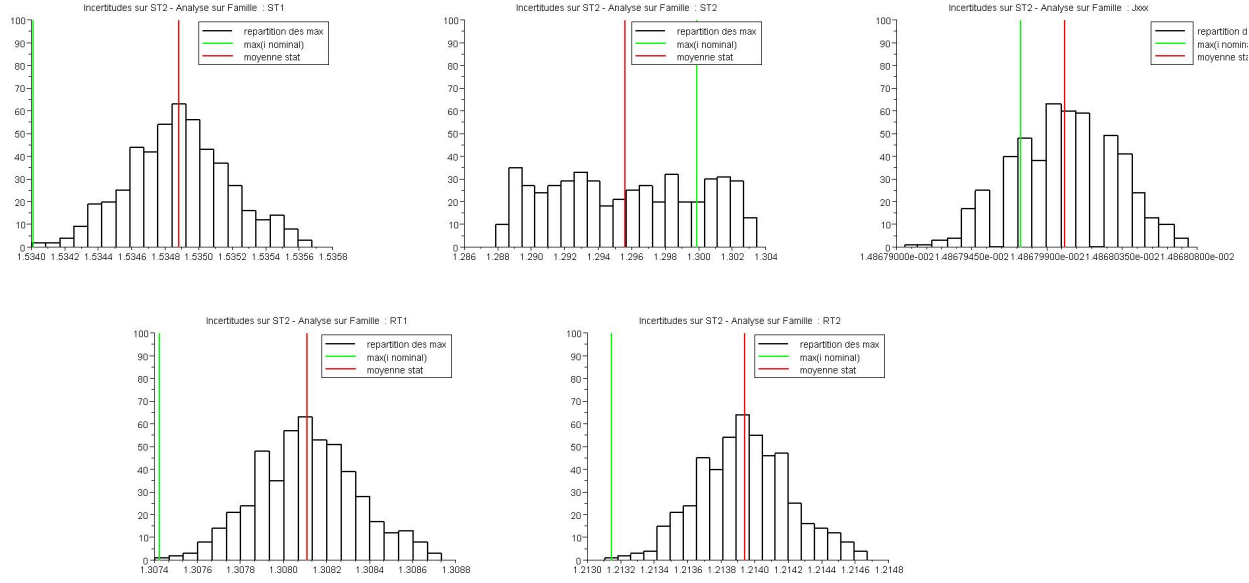


FIG. 9.5.: Crête de courant sur une famille lorsque la famille ST2 est incertaine

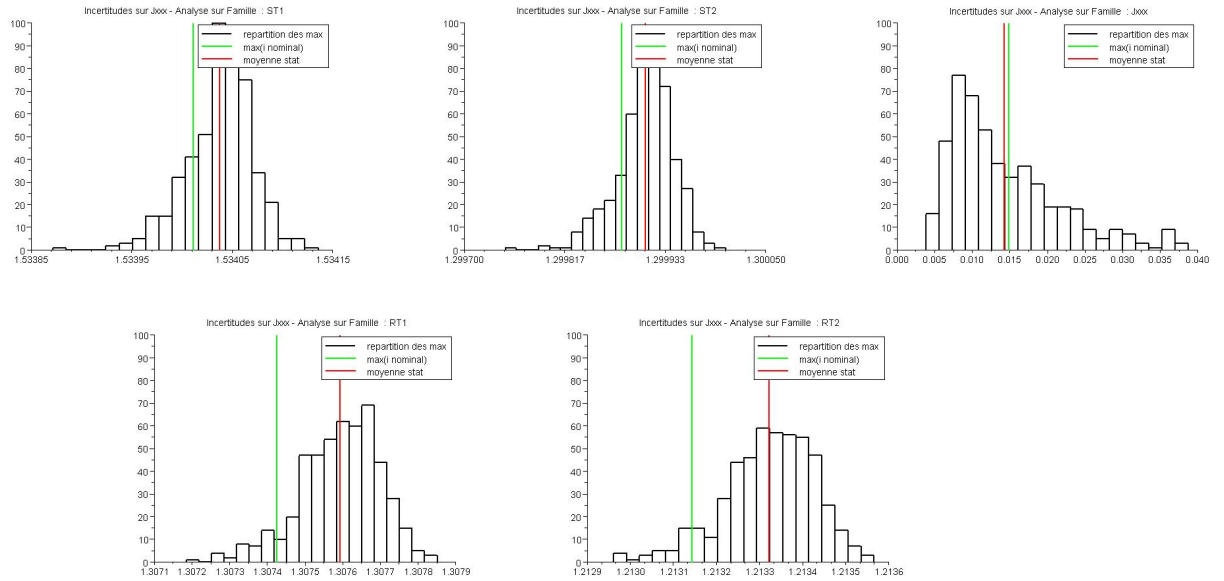


FIG. 9.6.: Crête de courant sur une famille lorsque la famille Jxxx est incertaine

non aléatoires. D'autre part, on peut calculer de la quantité $z(f, \bar{f}) = \frac{|I_{max}(\bar{f}) - I_{nom}(f)|}{I_{nom}(f)}$, avec f l'observable et \bar{f} la famille aléatoire. Cette valeur permet de hiérarchiser l'influence des familles sur un observable et d'établir les liens/interactions entre familles. Visuellement, via la figure 9.7, on peut avoir une intuition de cette hiérarchie : on a que RT1/RT2 sont fortement liées, ainsi que ST1/ST2. Les intervalles de confiances à 99 % de ces observables en fonction d'une famille aléatoire (tableau 9.2) donnent un encadrement "fiable" à 99% des crêtes de courant ($N = 10000 \rightarrow 2$ chiffres significatifs) pour les n_f familles du problème lorsque l'aléa porte sur une famille quelconque.

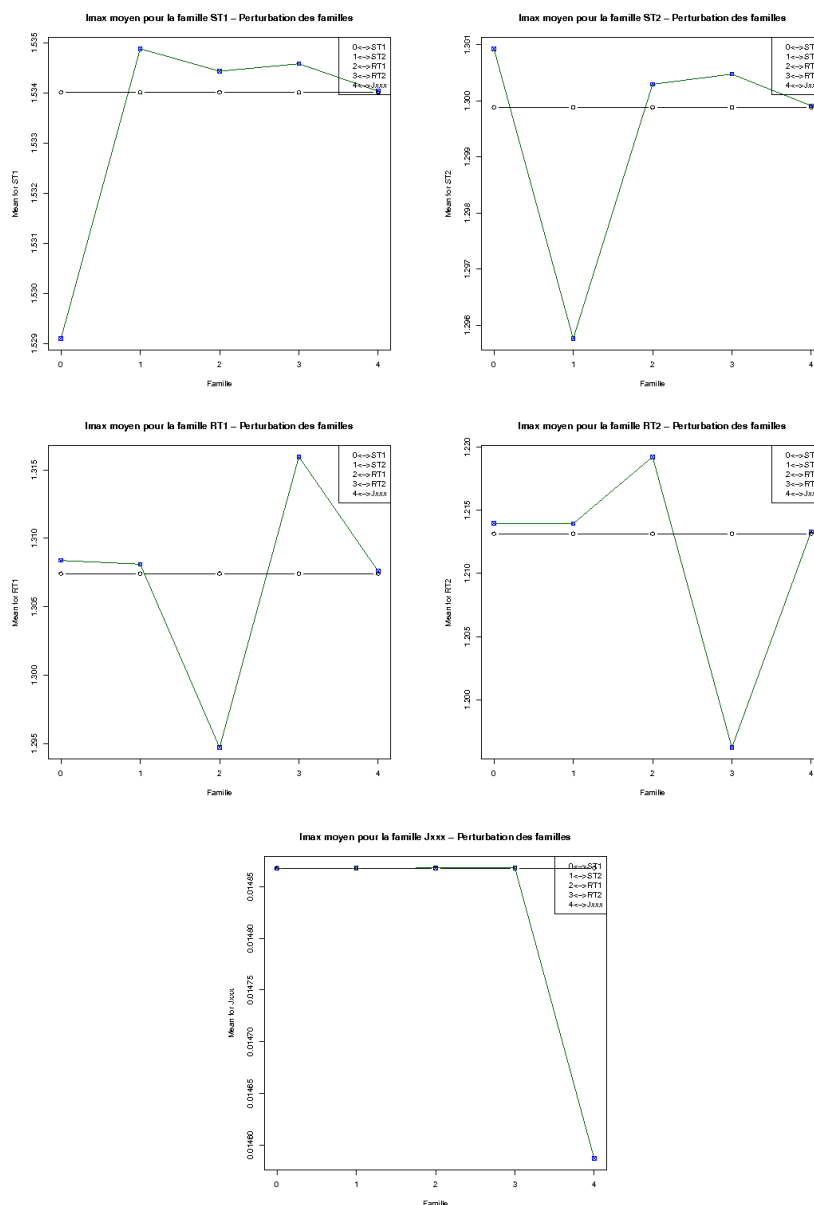


FIG. 9.7.: Influence des familles sur un observable

IC(Imax) à 99 %	ST1 aléatoire	ST2 aléatoire	ST1 aléatoire	RT2 aléatoire	Jxxx aléatoire	Nominale
Imax(ST1)	[1.53 ; 1.53]	[1.53 ; 1.53]	[1.53 ; 1.53]	[1.53 ; 1.53]	[1.53 ; 1.53]	1.534
Imax(ST2)	[1.30 ; 1.30]	[1.29 ; 1.29]	[1.30 ; 1.300]	[1.30 ; 1.30]	[1.30 ; 1.30]	1.2995
Imax(RT1)	[1.31 ; 1.31]	[1.31 ; 1.31]	[1.29 ; 1.29]	[1.32 ; 1.32]	[1.31 ; 1.31]	1.307
Imax(RT2)	[1.21 ; 1.21]	[1.21 ; 1.21]	[1.22 ; 1.22]	[1.20 ; 1.20]	[1.21 ; 1.21]	1.2128
Imax(Jxxx)	[0.01 ; 0.01]	[0.01 ; 0.01]	[0.01 ; 0.01]	[0.01 ; 0.01]	[0.01 ; 0.01]	0.0149

TAB. 9.2.: Intervalles de confiance pour les variables d'intérêt

Hiérarchisation

On peut compléter l'étude en hiérarchisant les variables incertaines au sein d'une famille. Le calcul des indices de sensibilité nous permettent de prédire quels sont les éléments les plus influents dans la valeur de la crête. On donne dans les valeurs des indices de sensibilité pour chaque famille dans le tableau 9.3 lorsque l'observable est le courant maximal au sein de cette famille. Les résultats déterminent les ports qui influent localement sur la crête. Concrètement, lorsque l'on fixe par exemple la famille RT1 aléatoire, qui est composée de 6 ports d'intérêt alors le premier port est celui qui influe le plus sur la variabilité de la crête.



Famille	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}	S_{13}	S_{14}	S_{15}	S_{16}
RT1	0.80	0.06	0.03	0.11	0.00	0.00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RT2	0.03	0.06	0.80	0.00	0.00	0.11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ST1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ST2	1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Jxxx	0.00	0.00	0.04	0.47	0.42	0.07	0.00	0	0.0	0	0	0	0	0	0	0

TAB. 9.3.: Indices de sensibilité des ports vis à vis de la crête du courant par famille

La visualisation du modèle permet d'extraire la localisation de ces derniers et on remarque que l'on a un effet de symétrie : on retrouve les liens entre familles établis précédemment du fait que le courant passe par le(s) port(s) le(s) plus faible(s) situés à proximité des familles voisines : les deux ports les plus influents des familles ST1/ST2 sont à proximité l'un de l'autre, de même que pour RT1/RT2.

Pour conclure sur cette analyse, on a pu dégager quelques axes intéressants. Une famille aléatoire avec des charges plutôt élevées engendrent une accumulation du courant au niveau des charges des autres familles avec un critère géométrique, c'est à dire la famille la plus proche de cette dernière sera la plus "perturbée".

L'étude de la probabilité de dépassement de seuil, qui a été effectuée pour un observable crête du courant dans la famille aléatoire n'a pas permis d'arriver à des résultats concluants. En effet, le niveau moyen est inférieur au niveau nominal pour une famille donnée donc c'est sur les familles déterministes qu'il faut évaluer la probabilité de dépassement de seuils. On note que cette étude a été effectuée en parallèle avec l'étude de tendance, ce qui explique que les observables fixés soient la crête pour la famille aléatoire. Notons enfin qu'avec les résultats obtenus, on a pu remarquer que les méthodes FORM/SORM sont limitées lorsque la dimension est croissante, mais une utilisation indirecte des résultats permet à un algorithme de type Monte-Carlo avec échantillonnage préférentiel de réduire le coût et temps de calcul vis à vis d'une méthode classique pour aboutir aux mêmes intervalles de confiance.

9.2. Défaillance par famille

9.2.1. Positionnement du problème

	RT1	RT2	ST1	ST2	Jxxx
Scénario 1	20 % défaillance	Déterministe	Déterministe	Déterministe	Déterministe
Scénario 2	Déterministe	20 % défaillance	Déterministe	Déterministe	Déterministe
Scénario 3	Déterministe	Déterministe	20 % défaillance	Déterministe	Déterministe
Scénario 4	Déterministe	Déterministe	Déterministe	20 % défaillance	Déterministe
Scénario 5	Déterministe	Déterministe	Déterministe	Déterministe	20 % défaillance
Observables	Imax(ST1) Imax(ST2) Imax(RT1) Imax(RT2) Imax(Jxxx)	Imax(ST1) Imax(ST2) Imax(RT1) Imax(RT2) Imax(Jxxx)	Imax(ST1) Imax(ST2) Imax(RT1) Imax(RT2) Imax(Jxxx)	Imax(ST1) Imax(ST2) Imax(RT1) Imax(RT2) Imax(Jxxx)	Imax(ST1) Imax(ST2) Imax(RT1) Imax(RT2) Imax(Jxxx)
Tirages	Exhaustif	Exhaustif	Exhaustif	Exhaustif	Exhaustif
Nombre de tirages MC	1000	1000	1000	1000	1000
Dimension de la famille	6	6	7	7	16
Résistance jonction nominale	$4\mu\Omega$	$4\mu\Omega$	$4\mu\Omega$	$4\mu\Omega$	$100m\Omega$
Charges défaillantes	2	2	2	2	4
τ correspondant	33 %	33 %	29 %	33 %	20 %
Nombre de configurations	15	15	21	21	1820

TAB. 9.4.: Scenarii de défaillance et simulations

Le scénario proposé dans l'étude qui suit est de type défaillance en proportion comme indiqué dans le tableau 9.4. On s'intéresse aux mêmes observables que l'analyse précédente, en imposant que sur une famille donnée, un certain nombre de jonctions (par exemple, 20 % des jonctions) soient défaillantes et que leur charge soient forte ($R = 100 \Omega$).

L'étude porte sur le tirage aléatoire des ports défaillants. On se donne la liste des ports pour une famille et on note par dim son rang. Si on définit τ comme étant le taux de défaillance (typiquement 20 %) alors le nombre de jonctions défaillantes est $\lceil d := dim * \tau \rceil$, où $\lceil \cdot \rceil$ désigne la partie entière supérieure. En pratique, on se retrouvera avec un taux de défaillance légèrement supérieur à celui que l'on souhaite.

De manière générale, le nombre de cas est fini. En effet, tirer aléatoirement d jonctions défaillantes



parmi dim est de cardinal fini C_{dim}^d . Pour un taux de défaillance fixé, ce nombre peut très vite exploser dès lors que le rang de la famille est grand (pour $dim = 50$ et $\tau = 0.20\%$, le nombre de cas est de l'ordre de 2.10^{10}). Sur des familles de dimension petites, pour ce taux de défaillance, on peut explorer toutes les configurations.

9.2.2. Résultats

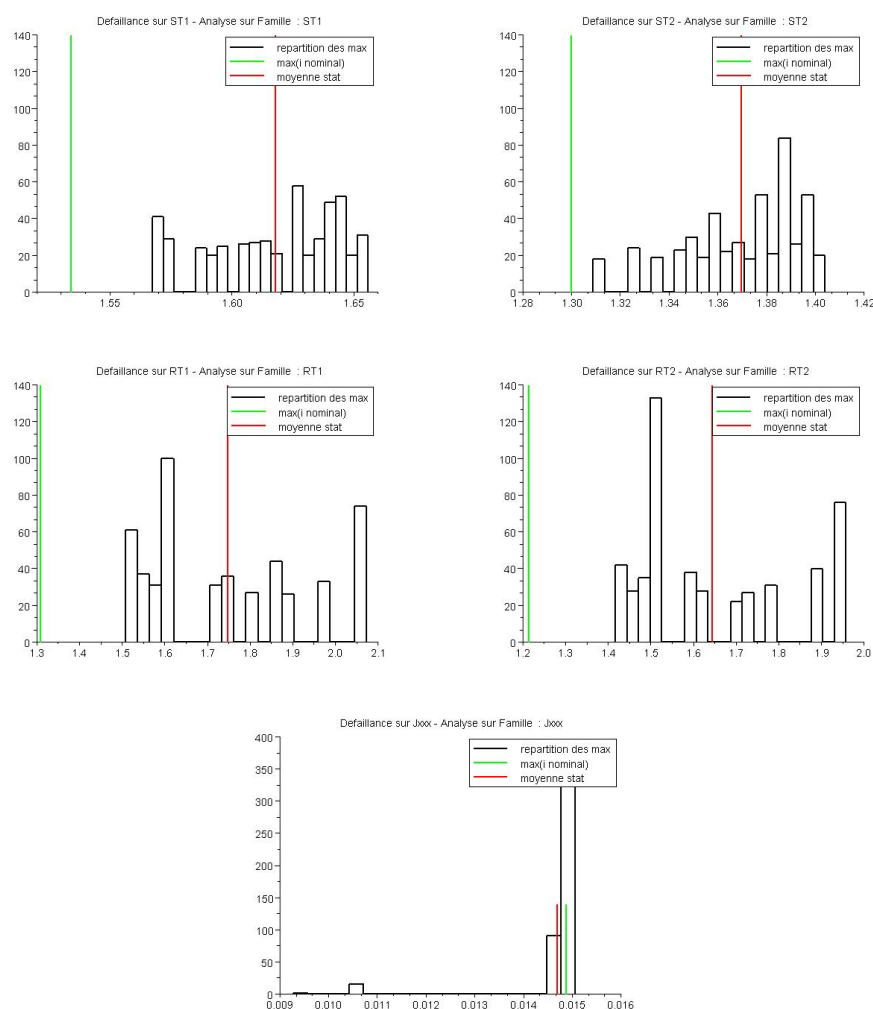


FIG. 9.8.: Défaillance par famille : influence sur la crête

On donne sur la figure 9.8 la crête du courant par famille lorsque celle-ci est défaillante. On remarque qu'en moyenne, par rapport au cas nominal et à l'analyse précédente, la valeur de la crête augmente. Ceci s'explique par le fait que le nombre de charges défaillantes (avec forte charge) est inférieur ici (au maximum, 4 ports). Ainsi le courant se répartit davantage au niveau des charges les plus faibles de la famille considérée comme défaillante et on a une remontée des crêtes.

On donne sur la figure 9.9 les valeurs des observables classiques lorsque chaque famille est défaillante indépendamment l'une de l'autre. Ces résultats sont appuyés par les intervalles de confiance à 99 % donnés dans le tableau 9.5, qui ont été établis avec les tirages aléatoires. Remarquons que la crête maximale est atteinte pour les familles ST1, RT1 et RT2 lorsque la famille considérée est défaillante. Pour la crête du courant au niveau de la famille ST2, c'est la famille ST1 qui détermine la valeur maximale. Ceci s'explique par la localisation des ports des deux familles et la circulation du courant depuis ST1 jusqu'à ST2. La défaillance de la famille ST2 augmente le niveau des crêtes pour les familles RT1, RT2, ST1 et ST2, mais l'écart des moyennes le plus important est visible pour la famille RT2, où on a une augmentation de 5 % de la moyenne. Il faut se reporter à la configuration du modèle pour établir les interactions géométriques entre ces deux familles. En effet, on constate que les ports RT2/ST2 sont proches

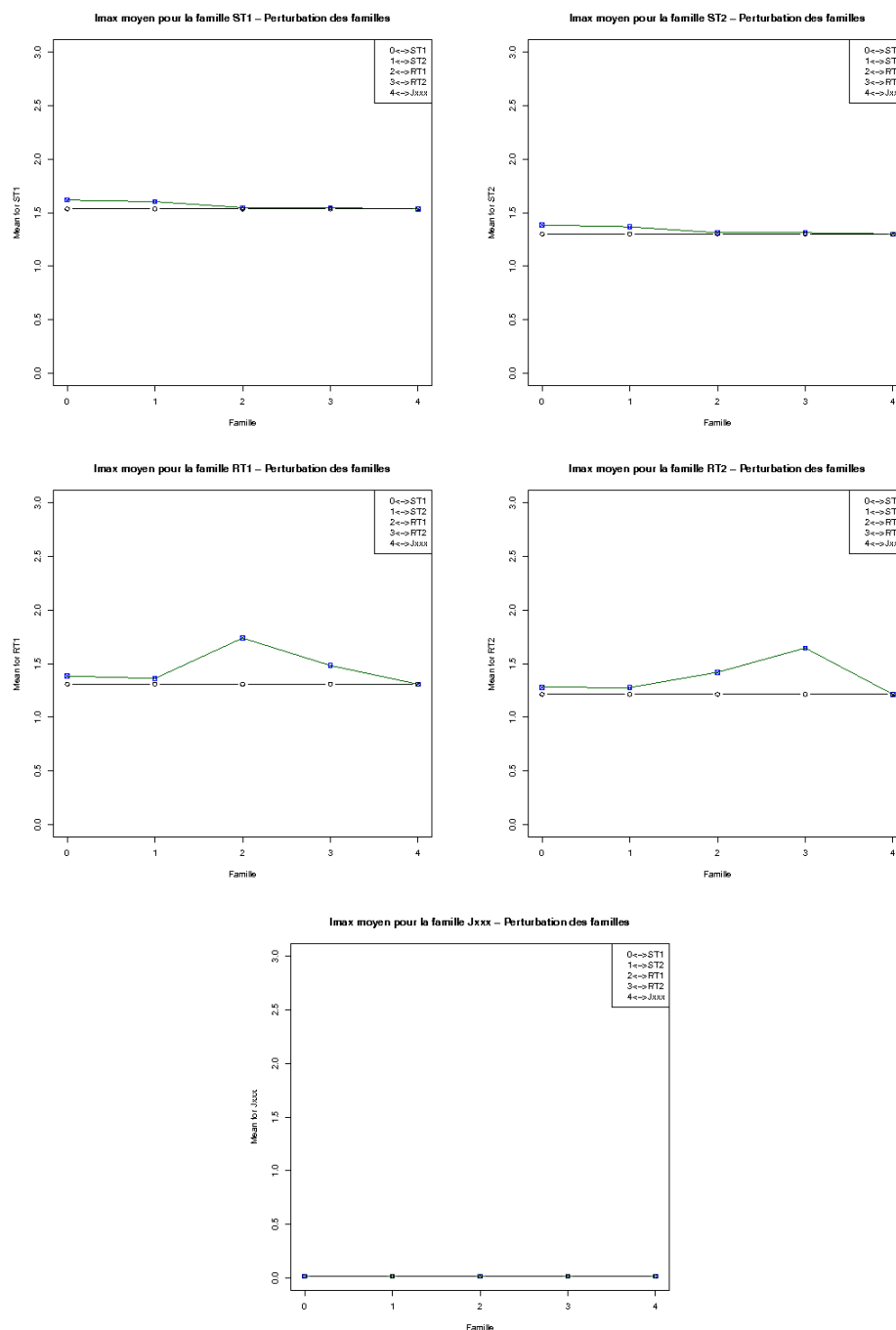


FIG. 9.9.: Influence des familles sur un observable

IC(Imax) à 99 %	ST1 défaillant	ST2 défaillant	ST1 défaillant	RT2 défaillant	Jxxx défaillant	Nominale
Imax(ST1)	[1.61 ; 1.62]	[1.60 ; 1.60]	[1.54 ; 1.55]	[1.54 ; 1.54]	[1.53 ; 1.53]	1.534
Imax(ST2)	[1.38 ; 1.39]	[1.36 ; 1.37]	[1.31 ; 1.31]	[1.31 ; 1.31]	[1.30 ; 1.30]	1.2995
Imax(RT1)	[1.38 ; 1.39]	[1.36 ; 1.36]	[1.72 ; 1.76]	[1.48 ; 1.49]	[1.31 ; 1.31]	1.307
Imax(RT2)	[1.28 ; 1.28]	[1.27 ; 1.28]	[1.41 ; 1.43]	[1.62 ; 1.67]	[1.21 ; 1.21]	1.2128
Imax(Jxxx)	[0.01 ; 0.01]	[0.01 ; 0.01]	[0.01 ; 0.01]	[0.01 ; 0.01]	[0.01 ; 0.01]	0.0149

TAB. 9.5.: Intervalles de confiance pour les variables d'intérêt dans le cas d'une défaillance

et en tenant compte du sens de circulation du courant, on en déduit les interactions qui sont en jeu.



En conclusion, par ce scénario, on a mis en évidence le fait qu'une défaillance dans la famille augmente le niveau de la crête pour toutes les familles. Les quantités d'intérêt sont, dans un cas "léger", calculables analytiquement (le nombre de cas est fini).

Les Wrappers développés sous la plate-forme OPENTURNS pour la première analyse permettent de faire appel facilement à l'outil ASERIS-BE (cfr à l'annexe B.2. Pour la seconde analyse, le tirage sans remise n'étant pas possible sous OPENTURNS, il a fallu revoir l'architecture du code et faire un interfaçage avec *R*.

Les connaissances par ailleurs acquises dans mon cursus, au niveau de la modélisation des incertitudes et de l'usage de la plate-forme OPENTURNS, m'ont permis de mener à bien cette tâche.





CONCLUSION

Deux grandes parties ont animé mon stage de fin d'études, la première étant la continuité de mes travaux de PFE, la seconde axée sur la réalisation d'une étude statistique sur la distribution de courant dans une structure interne d'avion.

Tout d'abord, concernant la première partie, j'ai été amené à travailler sur le logiciel *MEFISTO* et sa validité par rapport à un code éléments finis. Cette phase de validation a consisté en l'étude des paramètres d'entrée des deux logiciels et bien évidemment des valeurs en sortie tel les courants se répartissant dans la structure. La problématique traitée est celle des effets indirects foudre sur des structures invariantes par translation avec un code en deux dimensions. La foudre engendre des perturbations au niveau des équipements et il convient de dimensionner rapidement les niveaux de tension/courant que doivent tenir ces équipements lorsque les structures sont encore à l'état de définition (carbone, métal).

Le logiciel *MEFISTO* a été testé avec succès sur les cas-tests proposés.

En effet, les solutions obtenues avec *MEFISTO* sont proches de celles que l'on obtient avec un solveur éléments finis, notamment à basse fréquence.

La répartition des courants est identique entre les deux codes de calcul indépendamment de la fréquence. Dans le domaine temporel, les différences au niveau des crêtes sont de l'ordre de 1%. Les résultats des champs sont cohérents et l'erreur entre les deux méthodes de calcul (Biot et Savart sous *MEFISTO*, représentation intégrale sous *ELF12T*) est en moyenne de l'ordre de -30 à -60 dB. Ce qui est très encourageant.

La méthode filaire trouve ainsi sa justification par une cohérence des résultats et une rapidité de calcul.

La deuxième problématique est celle de la répartition de courant dans une structure complexe. La prise en compte des incertitudes au niveau des résistances des jonctions, ou bien la considération d'un état de défaillance sont au coeur du problème.

On effectue des calculs avec un solveur éléments finis 3D :

- Pour un état de charge nominal, le calcul est effectué complètement ;
- La prise en compte des incertitudes/défaillance avec le solveur 3D est coûteuse. La technique Multiport permet de s'affranchir du calcul complet en résolvant, pour un scénario donné, un système de petite dimension. Cette technique rend la prise en compte des aléas possible.

Les résultats obtenus sont intéressants. En effet, on a pu d'une part :

- Analyser les résultats obtenus sur un scénario donné d'incertitudes sur les valeurs de résistances ;
- Évaluer "la perturbation du système", c'est à dire lorsqu'une famille est aléatoire, quelle est la configuration du courant ;
- Quantifier l'évolution (en moyenne) de la crête de courant dans une famille de jonctions (résistances) dans la perspective d'études de probabilités de dépassement de seuil.

D'autre part, sur un scénario de type défaillance, on a pu évaluer l'évolution de la crête. Les résultats correspondent à la physique du problème et permettent de s'assurer, de hiérarchiser les ports sensibles sur lesquels une protection peut être ajoutée.

Pour ma part, il a fallu m'insérer dans un cadre spécifique au début de mon PFE/stage et de ce fait, j'ai dû apprendre les mots, les habitudes, les procédés et les outils utilisés dans mon nouvel environnement. J'ai ainsi compris que pour m'insérer dans un environnement professionnel, il fallait comprendre le rôle de l'entreprise et tout ce qu'elle conçoit. Au début, je pensais être égaré car je pensais que chaque personne parlait un vocabulaire assez spécifique qui m'était incompréhensible. Petit à petit, je suis parvenu à me fondre dans le service, pour pouvoir effectuer un travail juste.

J'ai eu à apprendre deux outils totalement différents que sont *MEFISTO* et *ELF12T*, donc à comprendre ce sur quoi ils se basent (considérations physiques/mathématiques) et leur do-



maine de validité. Dans la perspective de simuler des cas-tests identiques, j'ai eu à développer des routines me permettant d'automatiser les cas-tests, c'est-à-dire à partir d'un cas-test établi sous *MEFISTO*, on génère tous les fichiers nécessaires pour *ELF2T*. Ceci a pu se faire notamment en collaboration avec les développeurs de l'IHM afin d'effectuer le transfert de maillage. J'ai aussi développé les routines de comparaison pour établir la concordance des résultats entre les deux méthodes, à réécrire les routines de post-processing notamment pour alléger l'IHM (donc générer des menus et simplifier les codes) ou encore pour éviter la manipulation de fichiers qui peut être parfois coûteuse (transformée de Fourier inverse par exemple), à contribuer à la nouvelle IHM du logiciel MEFISTO dans la phase de spécification.

Dans la phase d'analyse statistique, j'ai développé des scripts Python sous la plate-forme OPEN-TURNS spécifiques qui permettent de faire appel aux outils de simulation dont je dispose. Ces scripts comprennent notamment les routines de lecture/écriture spécifiques à ces outils, de sauvegarde binaire mais surtout de configuration des projets d'études et la prise en compte des aléas.

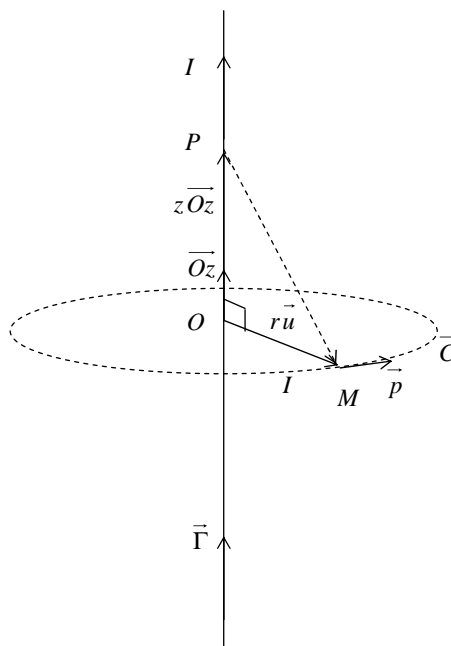
J'ai pu développer mes connaissances sur les outils de simulation, les méthodes et l'utilisation des modèles appropriés pour des contextes physiques spécifiques. D'un point de vue technique, j'ai essentiellement utilisé des outils tels Scilab car ce qui est demandé dans une première approche est de valider l'adéquation entre outils et phénomène attendu et non utiliser des langages complexes dans le but d'optimiser sans "justifier" de l'intérêt. J'ai aussi développé mes compétences en langage Python notamment dans le traitement des incertitudes. J'ai pu par cette occasion apporter mes connaissances dans un domaine en pleine expansion qu'est le traitement des incertitudes dans l'industrie. J'ai eu à utiliser les enseignements acquis pour les appliquer à un contexte industriel où l'enjeu ici est de taille car permet de dimensionner des structures dans des phases avant projet. Au-delà de ces compétences techniques, j'ai acquis quelques compétences fonctionnelles dans le domaine de l'électromagnétisme. Tout ceci en m'intégrant dans un service de grande envergure pour des problématiques importantes.

Les cours théoriques et pratiques acquis à Sup Galilée tels que programmation, analyse numérique, éléments finis, physique ou encore probabilités/statistiques/modélisation des incertitudes m'ont conférés des bases solides nécessaires à un ingénieur mathématicien. Au-delà de ces compétences techniques, SuP Galilée m'a transmis un savoir faire me permettant de comprendre et de construire un raisonnement logique. C'est cette façon de penser qui est primordiale et qui permet de se défaire du côté technique tout en ayant la capacité de s'adapter à n'importe quel contexte. Cette mission s'est avérée très riche en enseignements. En effet, j'ai pu m'intégrer dans un projet important avec tout ce que cela implique. J'ai appris à utiliser un environnement de développement spécifique, à utiliser de nouveaux outils, à assimiler de nouvelles connaissances, à apporter mon savoir et élaborer des solutions techniques pour obéir à des spécifications. Cette expérience a été pour moi fructueuse tant sur le plan personnel que professionnel. Après mon expérience dans le domaine du nucléaire l'an dernier au travers de mon stage au CEA, j'ai pu aujourd'hui découvrir le secteur aéronautique. Les enjeux ne sont pas les mêmes et le challenge est plus important dans ce dernier car il y a de gros enjeux financiers avec des qualifications/certification et des clients à satisfaire. Il n'en reste pas moins que l'équipe est tout aussi disponible et sait donner le meilleur en restant humain.

A. MEFISTO : Compléments physiques (Copyright© Gilles Akoun, EADS IW)

A.1. Biot et Savart et théorème d'Ampère

Biot et Savart et théorème d'Ampère



Formule de Biot et Savart :

$$\vec{H}(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Gamma}} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}$$

Soit aussi en écriture :

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Gamma}} \frac{I d\vec{r}' \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

$$\vec{OM} = \vec{r} = r\vec{u}$$

$$\vec{OP} = \vec{r}' = z\vec{Oz}$$

$$\vec{PM} = \vec{r} - \vec{r}' = r\vec{u} - z\vec{Oz}$$

$$d\vec{r}' = dz\vec{Oz}$$



$$\begin{aligned}\vec{H}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{r}} \frac{I dz \vec{Oz} \wedge (\vec{ru} - z \vec{Oz})}{\sqrt{r^2 + z^2}^3} = \frac{I}{4\pi} \int_{\vec{r}} \frac{r dz (\vec{Oz} \wedge \vec{u})}{\sqrt{r^2 + z^2}^3} = \frac{I}{4\pi} \vec{p} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r dz}{\sqrt{r^2 + z^2}^3} \\ \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{I}{4\pi} \vec{p} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r dz}{\sqrt{r^2 + z^2}^3} = \frac{I}{4\pi r} \vec{p} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r^2 dz}{\sqrt{r^2 + z^2}^3} = \frac{I}{4\pi r} \vec{p} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}^3} \quad \text{avec } \xi = \frac{z}{r}\end{aligned}$$

Soit à calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}^3}$:

La fonction $f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}^3}$ est paire en ξ donc : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}^3} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}^3}$

D'autre part :

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} - \xi \left(\frac{1}{2} \frac{2\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}^3} \right) = \frac{1 + \xi^2}{\sqrt{1 + \xi^2}^3} - \frac{\xi^2}{\sqrt{1 + \xi^2}^3} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}^3}$$

Donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}^3} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}^3} = 2 \left[\frac{\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} \right]_0^{+\infty} = 2[1 - 0] = 2$$

Finalement on obtient $\vec{H}(\vec{r})$:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{2\pi r} \vec{p}$$

On trouve bien le théorème d'Ampère :

$$\oint_{\vec{C}} \vec{H}(\vec{r}) d\vec{r} = I$$

Vu la symétrie de révolution du problème on peut écrire :

$$\vec{H}(\vec{r}) = H(r) \vec{p} \quad \text{avec } r = \|\vec{r}\|$$

En effet, on arrive alors : $\oint_{\vec{C}} \vec{H}(\vec{r}) d\vec{r} = 2\pi r H(r) = I \Leftrightarrow H(r) = \frac{I}{2\pi r}$



Calcul MEFISTO avec N conducteurs filaires infinis :

On considère N fils infinis parallèles selon \vec{Oz} et traversés par un courant I_k pour $1 \leq k \leq N$ placées en $O_k(x_k, y_k, 0)$ soit $\vec{r}_k = x_k \vec{Ox} + y_k \vec{Oy}$, on calcul alors le champ $\vec{H}(\vec{r})$ pour $\vec{r} = x \vec{Ox} + y \vec{Oy}$ dans le repère (O, x, y) , alors on a selon le théorème de superposition :

$$\vec{H}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^N \vec{H}_k(\vec{r}) = \sum_{k=1}^N \frac{I_k}{2\pi \|\vec{r} - \vec{r}_k\|} \vec{p}_k = \sum_{k=1}^N \frac{I_k}{2\pi \|\vec{r} - \vec{r}_k\|} (\vec{Oz} \wedge \vec{u}_k)$$

Soit encore ;

$$\vec{H}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^N \frac{I_k}{2\pi \|\vec{r} - \vec{r}_k\|} (\vec{Oz} \wedge \vec{u}_k) = \sum_{k=1}^N \frac{I_k}{2\pi \|\vec{r} - \vec{r}_k\|^2} (\vec{Oz} \wedge (\vec{r} - \vec{r}_k))$$

Avec :

$$\vec{r} - \vec{r}_k = (x - x_k) \vec{Ox} + (y - y_k) \vec{Oy}$$

$$\|\vec{r} - \vec{r}_k\| = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}$$

$$\vec{Oz} \wedge (\vec{r} - \vec{r}_k) = \begin{vmatrix} 0 & x - x_k & -(y - y_k) \\ 1 & y - y_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_k & -(y - y_k) \\ y - y_k & 0 \end{vmatrix} = -(y - y_k) \vec{Ox} + (x - x_k) \vec{Oy}$$

Donc :

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N I_k \left(-\frac{y - y_k}{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2} \vec{Ox} + \frac{x - x_k}{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2} \vec{Oy} \right)$$

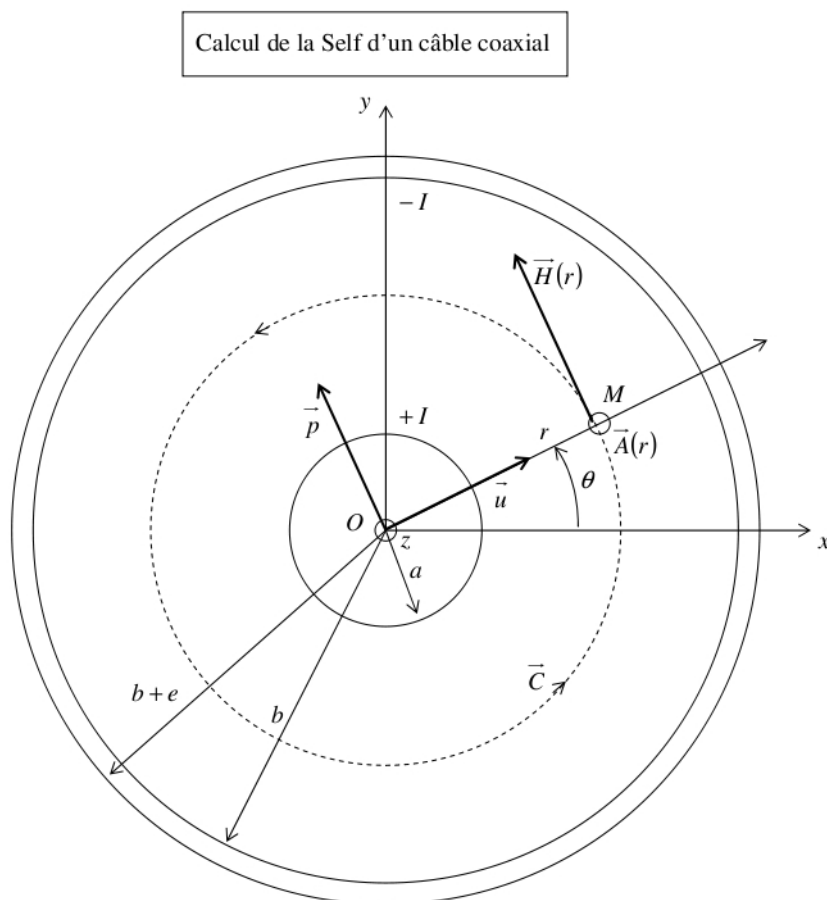
Soit encore :

$$H_x(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N I_k \frac{y - y_k}{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}$$

$$H_y(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N I_k \frac{x - x_k}{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}$$



A.2. Calcul de la self d'un câble coaxial



Densité de courant $\vec{j}(r)$ selon r :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 \leq r \leq a & \vec{j}(r) = \frac{I}{\pi a^2} \vec{Oz} \\ a < r < b & \vec{j}(r) = \vec{0} \\ b \leq r \leq b+e & \vec{j}(r) = -\frac{I}{\pi((b+e)^2 - b^2)} \vec{Oz} \\ r > b+e & \vec{j}(r) = \vec{0} \end{array} \right.$$

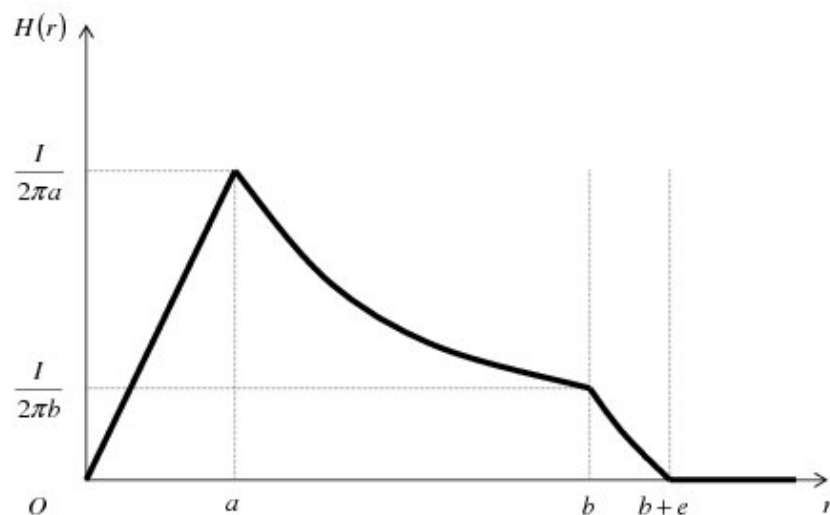


Théorème d'Ampère :

$$\oint_C \vec{H}(r) d\vec{l} = \iint_S \vec{j}(r) d\vec{S}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq a \quad H(r) 2\pi r = j(r) \pi r^2 = I \frac{r^2}{a^2} \\ a \leq r \leq b \quad H(r) 2\pi r = I \\ b \leq r \leq b+e \quad H(r) 2\pi r = I + j(r) \pi (r^2 - b^2) = I \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{(b+e)^2 - b^2} \right) \\ r > b+e \quad H(r) 2\pi r = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq a \quad H(r) = \frac{I}{2\pi a^2} r \\ a \leq r \leq b \quad H(r) = \frac{I}{2\pi r} \\ b \leq r \leq b+e \quad H(r) = \frac{I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{(b+e)^2 - b^2} \right) = \frac{I}{2\pi r} \frac{(b+e)^2 - r^2}{(b+e)^2 - b^2} \\ r > b+e \quad H(r) = 0 \end{array} \right.$$





Potentiel Vecteur $\vec{A}(r) = A(r)\vec{Oz}$:

$$\vec{B} = \mu_o \vec{H} = \text{rot } \vec{A} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{array} \right.$$

Il vient alors :

$$\vec{B} = \mu_o \vec{H} = \text{rot } \vec{A} \quad \left| \begin{array}{l} 0 \\ -\frac{dA}{dr} \\ 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \mu_o H(r) = -\frac{dA}{dr}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq a \quad \frac{dA}{dr} = -\frac{\mu_o I}{2\pi a^2} r \\ a \leq r \leq b \quad \frac{dA}{dr} = -\frac{\mu_o I}{2\pi r} \\ b \leq r \leq b+e \quad \frac{dA}{dr} = -\frac{\mu_o I}{2\pi r} \frac{(b+e)^2 - r^2}{(b+e)^2 - b^2} \\ r > b+e \quad \frac{dA}{dr} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq a \quad A(r) = -\frac{\mu_o I}{4\pi a^2} r^2 + C_1^{ste} \\ a \leq r \leq b \quad A(r) = -\frac{\mu_o I}{2\pi} \text{Log}(r) + C_2^{ste} \\ b \leq r \leq b+e \quad A(r) = -\frac{\mu_o I}{2\pi \left((b+e)^2 - b^2 \right)} \left((b+e)^2 \text{Log}(r) - \frac{1}{2} r^2 \right) + C_3^{ste} \\ r > b+e \quad A(r) = C_4^{ste} \end{array} \right.$$

Le potentiel vecteur $A(r)$ est continu et nul l'infini :



$$\left\{ \begin{array}{l} A(a) = -\frac{\mu_o I}{4\pi a^2} a^2 + C_1^{ste} = -\frac{\mu_o I}{2\pi} \text{Log}(a) + C_2^{ste} \\ A(b) = -\frac{\mu_o I}{2\pi} \text{Log}(b) + C_2^{ste} = -\frac{\mu_o I}{2\pi((b+e)^2 - b^2)} \left((b+e)^2 \text{Log}(b) - \frac{1}{2}b^2 \right) + C_3^{ste} \\ A(b+e) = -\frac{\mu_o I}{2\pi((b+e)^2 - b^2)} \left((b+e)^2 \text{Log}(b+e) - \frac{1}{2}(b+e)^2 \right) + C_3^{ste} = C_4^{ste} \\ A(+\infty) = C_4^{ste} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1^{ste} = \frac{\mu_o I}{4\pi} + \frac{\mu_o I}{2\pi} \text{Log}\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{\mu_o I}{2\pi((b+e)^2 - b^2)} \left((b+e)^2 \text{Log}\left(\frac{b+e}{b}\right) - \frac{1}{2}((b+e)^2 - b^2) \right) \\ C_2^{ste} = \frac{\mu_o I}{2\pi} \text{Log}(b) + \frac{\mu_o I}{2\pi((b+e)^2 - b^2)} \left((b+e)^2 \text{Log}\left(\frac{b+e}{b}\right) - \frac{1}{2}((b+e)^2 - b^2) \right) \\ C_3^{ste} = \frac{\mu_o I}{2\pi((b+e)^2 - b^2)} \left((b+e)^2 \text{Log}(b+e) - \frac{1}{2}(b+e)^2 \right) \\ C_4^{ste} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq a \quad A(r) = \frac{\mu_o I}{4\pi} \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) + \\ \quad + \frac{\mu_o I}{2\pi} \text{Log}\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{\mu_o I}{2\pi((b+e)^2 - b^2)} \left((b+e)^2 \text{Log}\left(\frac{b+e}{b}\right) - \frac{1}{2}((b+e)^2 - b^2) \right) \\ a \leq r \leq b \quad A(r) = \frac{\mu_o I}{2\pi} \text{Log}\left(\frac{b}{r}\right) + \frac{\mu_o I}{2\pi((b+e)^2 - b^2)} \left((b+e)^2 \text{Log}\left(\frac{b+e}{b}\right) - \frac{1}{2}((b+e)^2 - b^2) \right) \\ b \leq r \leq b+e \quad A(r) = \frac{\mu_o I}{2\pi((b+e)^2 - b^2)} \left((b+e)^2 \text{Log}\left(\frac{b+e}{r}\right) + \frac{1}{2}(r^2 - (b+e)^2) \right) \\ r > b+e \quad A(r) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq a \quad A(r) = \frac{\mu_o I}{4\pi} \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) + \frac{\mu_o I}{2\pi} \text{Log}\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{\mu_o I}{2\pi} \frac{(b+e)^2}{((b+e)^2 - b^2)} \text{Log}\left(\frac{b+e}{b}\right) - \frac{\mu_o I}{4\pi} \\ a \leq r \leq b \quad A(r) = \frac{\mu_o I}{2\pi} \text{Log}\left(\frac{b}{r}\right) + \frac{\mu_o I}{2\pi} \frac{(b+e)^2}{((b+e)^2 - b^2)} \text{Log}\left(\frac{b+e}{b}\right) - \frac{\mu_o I}{4\pi} \\ b \leq r \leq b+e \quad A(r) = \frac{\mu_o I}{2\pi} \frac{(b+e)^2}{((b+e)^2 - b^2)} \text{Log}\left(\frac{b+e}{r}\right) + \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{r^2 - (b+e)^2}{((b+e)^2 - b^2)} \\ r > b+e \quad A(r) = 0 \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq a \quad A(r) = -\frac{\mu_o I}{4\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \frac{\mu_o I}{2\pi} \text{Log}\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{\mu_o I}{2\pi} \frac{(b+e)^2}{((b+e)^2 - b^2)} \text{Log}\left(\frac{b+e}{b}\right) \\ a \leq r \leq b \quad A(r) = \frac{\mu_o I}{2\pi} \text{Log}\left(\frac{b}{r}\right) + \frac{\mu_o I}{2\pi} \frac{(b+e)^2}{((b+e)^2 - b^2)} \text{Log}\left(\frac{b+e}{b}\right) - \frac{\mu_o I}{4\pi} \\ b \leq r \leq b+e \quad A(r) = \frac{\mu_o I}{2\pi} \frac{(b+e)^2}{((b+e)^2 - b^2)} \text{Log}\left(\frac{b+e}{r}\right) + \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{r^2 - (b+e)^2}{((b+e)^2 - b^2)} \\ r > b+e \quad A(r) = 0 \end{array} \right.$$

Calcul de la Self par unité de longueur du câble coaxial avec le flux :

$$\Phi = LI = \int_0^{+\infty} B(r) dr \cdot 1 = \mu_0 \int_0^{+\infty} H(r) dr$$

$$\Phi = LI = \mu_0 \left(\int_0^a H(r) dr + \int_a^b H(r) dr + \int_b^{b+e} H(r) dr + \int_{b+e}^{+\infty} H(r) dr \right)$$

$$L_{\text{int}} I = \mu_0 \int_0^a H(r) dr = \frac{\mu_o I}{2\pi a^2} \int_0^a r dr = \frac{\mu_o I}{4\pi} \Leftrightarrow L_{\text{int}} = \frac{\mu_o}{4\pi}$$

$$L_{\text{air}} I = \mu_0 \int_a^b H(r) dr = \frac{\mu_o I}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_o I}{2\pi} \text{Log}\left(\frac{b}{a}\right) \Leftrightarrow L_{\text{air}} = \frac{\mu_o}{2\pi} \text{Log}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$L_{\text{ext}} I = \mu_0 \int_b^{b+e} H(r) dr = \frac{\mu_o I}{2\pi((b+e)^2 - b^2)} \int_b^{b+e} \left(\frac{(b+e)^2}{r} - r \right) dr$$

$$L_{\text{ext}} I = \frac{\mu_o I}{2\pi} \frac{(b+e)^2}{(b+e)^2 - b^2} \text{Log}\left(\frac{b+e}{b}\right) - \frac{\mu_o I}{4\pi} \Leftrightarrow L_{\text{ext}} = \frac{\mu_o}{2\pi} \left(\frac{(b+e)^2}{(b+e)^2 - b^2} \text{Log}\left(\frac{b+e}{b}\right) - \frac{1}{2} \right)$$

Développement limité de L_{ext} quand $e \ll b$:

$$L_{\text{ext}} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{(b+e)^2}{(b+e)^2 - b^2} \text{Log}\left(\frac{b+e}{b}\right) - \frac{\mu_o}{4\pi} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{\left(1 + \frac{e}{b}\right)^2}{\left(1 + \frac{e}{b}\right)^2 - 1} \text{Log}\left(1 + \frac{e}{b}\right) - \frac{\mu_o}{4\pi}$$

On pose $\varepsilon = \frac{e}{b}$, il faut faire le développement à l'ordre 2 de

$$\frac{(1+\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^2 - 1} \text{Log}(1+\varepsilon) :$$



$$\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2}{2\varepsilon\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon\right)} \text{Log}(1+\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} (1+2\varepsilon+\varepsilon^2) \left(1-\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{4}\varepsilon^2+\dots\right) \left(\varepsilon-\frac{1}{2}\varepsilon^2+\frac{1}{3}\varepsilon^3+\dots\right)$$

$$\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2}{2\varepsilon\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon\right)} \text{Log}(1+\varepsilon) = \frac{1}{2} (1+2\varepsilon+\varepsilon^2) \left(1-\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{4}\varepsilon^2+\dots\right) \left(1-\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon^2+\dots\right) \approx \frac{1}{2} (1+\varepsilon)$$

$$L_{ext} = \frac{\mu_o}{2\pi} \left(\frac{(b+e)^2}{(b+e)^2 - b^2} \text{Log}\left(\frac{b+e}{b}\right) - \frac{1}{2} \right) \approx \frac{\mu_o}{2\pi} \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{e}{b}\right) - \frac{1}{2} \right) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{e}{b}$$

$$L_{ext} \approx \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{e}{b}$$

Finalement la Self globale L sera :

$$L = L_{int} + L_{air} + L_{ext} \approx \frac{\mu_o}{4\pi} + \frac{\mu_o}{2\pi} \text{Log}\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{e}{b}$$

Retrouvons le flux Φ avec le potentiel vecteur $A(r)$:

On considère un parcours rectangulaire $\vec{\Gamma}$ de longueur 1 selon Oz et variant entre $r=0$ et $r=b+e$ selon Or :

$$A(0) \cdot 1 - A(b+e) \cdot 1 = \int_{\vec{\Gamma}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{\vec{S}} \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_{\vec{S}} \mu_o \vec{H} \cdot d\vec{S} = \Phi = LI$$

Ce qui donne aussi :

$$A(0) - A(b+e) = \int_0^{b+e} -\frac{dA}{dr} dr = \int_0^{b+e} \mu_o H(r) dr \cdot 1 = \Phi = LI$$

Comme $A(b+e) = 0$:

$$A(0) = \Phi = LI$$

Donc :

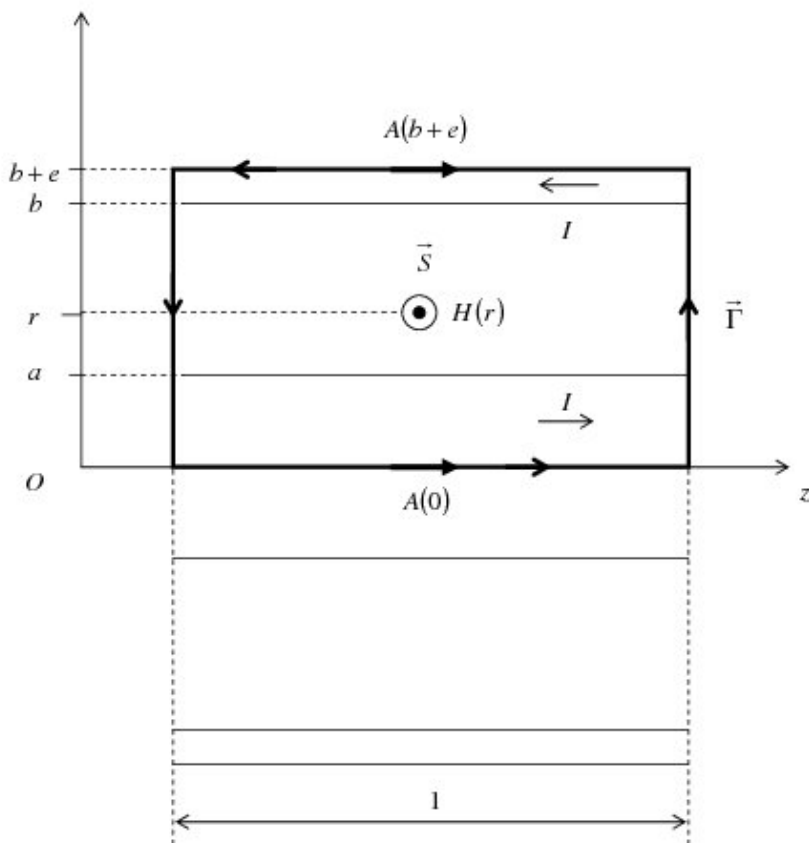
$$A(0) = \frac{\mu_o I}{2\pi} \text{Log}\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{\mu_o I}{2\pi} \frac{(b+e)^2}{((b+e)^2 - b^2)} \text{Log}\left(\frac{b+e}{b}\right)$$

$$= \left(\frac{\mu_o I}{4\pi} + \frac{\mu_o I}{2\pi} \text{Log}\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{(b+e)^2}{((b+e)^2 - b^2)} \left(\text{Log}\left(\frac{b+e}{b}\right) - \frac{1}{2} \right) \right) I$$

On retrouve alors :

$$L = \frac{\mu_o I}{4\pi} + \frac{\mu_o I}{2\pi} \text{Log}\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{(b+e)^2}{((b+e)^2 - b^2)} \left(\text{Log}\left(\frac{b+e}{b}\right) - \frac{1}{2} \right) = L_{int} + L_{air} + L_{ext}$$

$$L \approx \frac{\mu_o I}{4\pi} + \frac{\mu_o I}{2\pi} \text{Log}\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{e}{b}$$





De la même manière, on obtient :

$$A(b) = \frac{\mu_o I}{2\pi} \left(\frac{(b+e)^2}{((b+e)^2 - b^2)} \right) \text{Log} \left(\frac{b+e}{b} \right) - \frac{\mu_o I}{4\pi} = \Phi_{ext} = L_{ext} I$$

Donc :

$$L_{ext} = \frac{\mu_o}{2\pi} \left(\frac{(b+e)^2}{((b+e)^2 - b^2)} \right) \text{Log} \left(\frac{b+e}{b} \right) - \frac{1}{2} \approx \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{e}{b}$$

Remarque importante sur les Selfs :

Comme les courants sont distribués sur le domaine (*int*) et (*ext*), les valeurs de L_{int} et L_{ext} sont surestimées, tandis que L_{air} est exacte. Pour calculer toutes ces Selfs , il faut passer par un calcul de l'Energie dans les 3 domaines (*int*), (*air*) et (*ext*).

Calcul des Selfs par les Energies magnétiques par unité de longueur selon Oz :

$$Wem_{(int)} = \frac{1}{2} L_{int} I^2 = \iiint_{(int)} \frac{1}{2} \mu_o \overline{H}^2 d\tau = \int_0^a \frac{1}{2} \mu_o H^2(r) 2\pi r dr \cdot l = \mu_o \pi \int_0^a H^2(r) r dr$$

$$Wem_{(int)} = \mu_o \pi \int_0^a H^2(r) r dr = \mu_o \pi \int_0^a \frac{I^2 r^2}{4\pi^2 a^4} r dr = \frac{1}{2} I^2 \frac{\mu_o}{2\pi a^4} \int_0^a r^3 dr = \frac{1}{2} I^2 \frac{\mu_o}{8\pi}$$

$$L_{int} = \frac{\mu_o}{8\pi}$$

$$Wem_{(air)} = \frac{1}{2} L_{air} I^2 = \iiint_{(air)} \frac{1}{2} \mu_o \overline{H}^2 d\tau = \int_a^b \frac{1}{2} \mu_o H^2(r) 2\pi r dr \cdot l = \mu_o \pi \int_a^b H^2(r) r dr$$

$$Wem_{(air)} = \mu_o \pi \int_a^b H^2(r) r dr = \mu_o \pi \int_a^b \frac{I^2}{4\pi^2 r^2} r dr = \frac{1}{2} I^2 \frac{\mu_o}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{1}{2} I^2 \frac{\mu_o}{2\pi} \text{Log} \left(\frac{b}{a} \right)$$

$$L_{air} = \frac{\mu_o}{2\pi} \text{Log} \left(\frac{b}{a} \right)$$



$$\begin{aligned}
 Wem_{(ext)} &= \frac{1}{2} L_{ext} I^2 = \iiint_{(ext)} \frac{1}{2} \mu_o \vec{H}^2 d\tau = \int_b^{b+e} \frac{1}{2} \mu_o H^2(r) 2\pi r dr \cdot 1 = \mu_o \pi \int_b^{b+e} H^2(r) r dr \\
 Wem_{(ext)} &= \mu_o \pi \int_b^{b+e} H^2(r) r dr = \mu_o \pi \int_b^{b+e} \frac{I^2}{4\pi^2 r^2} \frac{((b+e)^2 - r^2)^2}{((b+e)^2 - b^2)^2} r dr \\
 Wem_{(ext)} &= \frac{1}{2} I^2 \frac{\mu_o}{2\pi((b+e)^2 - b^2)^2} \int_b^{b+e} \frac{((b+e)^2 - r^2)^2}{r} dr \\
 Wem_{(ext)} &= \frac{1}{2} I^2 \frac{\mu_o}{2\pi((b+e)^2 - b^2)^2} \int_b^{b+e} \left(\frac{(b+e)^4}{r} - 2(b+e)^2 r + r^3 \right) dr \\
 Wem_{(ext)} &= \frac{1}{2} I^2 \frac{\mu_o}{2\pi((b+e)^2 - b^2)^2} \left((b+e)^4 \text{Log}\left(\frac{b+e}{b}\right) - (b+e)^2((b+e)^2 - b^2) + \frac{1}{4}((b+e)^4 - b^4) \right) \\
 \boxed{L_{ext} = \frac{\mu_o}{2\pi((b+e)^2 - b^2)^2} \left((b+e)^4 \text{Log}\left(\frac{b+e}{b}\right) - (b+e)^2((b+e)^2 - b^2) + \frac{1}{4}((b+e)^4 - b^4) \right)}
 \end{aligned}$$

On pose $\varepsilon = \frac{e}{b} \ll 1$, il faut faire le développement limité de L_{ext} :

$$L_{ext} = \frac{\mu_o}{2\pi((1+\varepsilon)^2 - 1)^2} \left((1+\varepsilon)^4 \text{Log}(1+\varepsilon) - (1+\varepsilon)^2((1+\varepsilon)^2 - 1) + \frac{1}{4}((1+\varepsilon)^4 - 1) \right)$$

Eléments de base du D.L :

$$(1+\varepsilon)^2 - 1 = 2\varepsilon + \varepsilon^2 = 2\varepsilon \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon \right)$$

$$((1+\varepsilon)^2 - 1)^2 = 4\varepsilon^2 \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon \right)^2 = 4\varepsilon^2 \left(1 + \varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon^2 \right)$$

$$(1+\varepsilon)^4 = 1 + 4\varepsilon + 6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 + \varepsilon^4$$

$$(1+\varepsilon)^4 - 1 = 4\varepsilon + 6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 + \varepsilon^4 = 4\varepsilon \left(1 + \frac{3}{2}\varepsilon + \varepsilon^2 + \frac{1}{4}\varepsilon^3 \right)$$

$$\text{Log}(1+\varepsilon) = \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{3}\varepsilon^3 - \frac{1}{4}\varepsilon^4 \dots = \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^3 \dots \right)$$

$$L_{ext} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{1}{4\varepsilon \left(1 + \varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon^2 \right)} \left((1 + 4\varepsilon + 6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 + \varepsilon^4) \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^3 \dots \right) \right.$$

$$\left. - (1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2) \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon \right) + \left(1 + \frac{3}{2}\varepsilon + \varepsilon^2 + \frac{1}{4}\varepsilon^3 \right) \right)$$



$$L_{ext} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{1}{4\epsilon \left(1 + \epsilon + \frac{1}{4}\epsilon^2\right)} \left(1 + \left(4 - \frac{1}{2}\right)\epsilon + \left(6 + \frac{1}{3} - 2\right)\epsilon^2 - 2\left(1 + \left(2 + \frac{1}{2}\right)\epsilon + (1+1)\epsilon^2\right) + 1 + \frac{3}{2}\epsilon + \epsilon^2\right)$$

$$L_{ext} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{1}{4\epsilon \left(1 + \epsilon + \frac{1}{4}\epsilon^2\right)} \left(1 - 2 + 1 + \left(4 - \frac{1}{2} - 4 - 1 + \frac{3}{2}\right)\epsilon + \left(4 + \frac{1}{3} - 4 + 1\right)\epsilon^2\right)$$

$$L_{ext} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{1}{4\epsilon \left(1 + \epsilon + \frac{1}{4}\epsilon^2\right)} \frac{4}{3}\epsilon^2 = \frac{\mu_o}{6\pi} \epsilon$$

$$L_{ext} = \frac{\mu_o}{6\pi} \frac{e}{b}$$

Finalement on aura pour L :

$$L = L_{int} + L_{air} + L_{ext} \simeq \frac{\mu_o}{8\pi} + \frac{\mu_o}{2\pi} \text{Log}\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{\mu_o}{6\pi} \frac{e}{b}$$

On trouve bien que les Selfs L_{int} et L_{ext} sont plus petites que celles calculées avec les flux. Par contre L_{air} n'est pas modifiée.





B. Présentation de *MEFISTO* et quelques codes mis en place

B.1. Mefisto : IHM

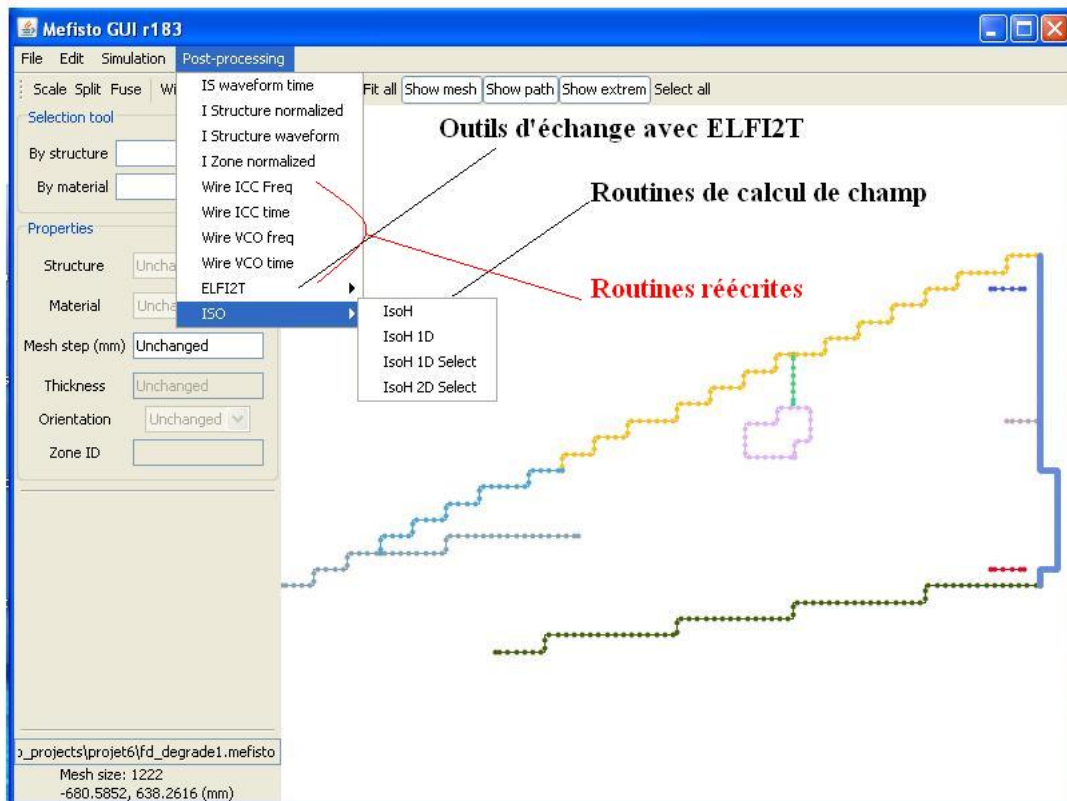


FIG. B.1.: Interface du logiciel

La figure B.1 représente une capture d'écran du logiciel. Les outils de post-processing, notamment le calcul de champ, ont été développées. Les routines de comparaison de code n'ont pas été ajoutées à l'IHM.

Via le menu ELFI2T, on peut écrire les fichiers de données correspondant à ELFI2T pour le calcul et post-pro. Les autres routines permettent essentiellement de calculer les courants au niveau d'une zone ou structure en fréquentiel ou temporel suivant une forme d'onde donnée (A, B, D et H).

B.2. Quelques codes développés

Listing B.1: Fonctions et routines pour le multiport

```
from numpy import *
from openturns import *
from os import system
from math import *
from os import times
import time
from struct import *
from os import getcwd

#####
```



```
##### Routines compatibles Multiport 1.2 #####
##### Sofiane HADDAD, Juillet 2009 #####

class a_famille:
    '''Generation d'une famille de jonctions'''
    def __init__( self ):
        self.size_ = 0
        self.indices_ = []
        self.name_ = ''
        self.Rnom_ = ( 0., 0. )
        self.fem_ = ( 0., 0. )
    def giveName( self , name ):
        self.name_ = name
    def getName( self ):
        return self.name_
    def giveRnom( self , R ):
        self.Rnom_ = R
    def getRnom( self ):
        return self.Rnom_
    def giveFem( self , R ):
        self.fem_ = R
    def getFem( self ):
        return self.fem_
    def AddElement( self , ele ):
        for i in range( len( ele ) ):
            self.indices_.append( ele [ i ] )
            self.size_ = self.size_ + 1
    def Infos( self ):
        print "Famille: ", self.name_
        print "R_nominale: ", self.Rnom_
        print "Nombre d'elements: ", self.size_
    def hasPort( self , n ):
        cnt=1
        t=0
        i=0
        while ( ( i <= self.size_ - 1 ) and cnt == 1 ):
            if ( self.indices_ [ i ] == n ):
                t=1
                cnt=0
            if ( i == self.size_ - 1 ):
                cnt=0
            i=i+1
        return t
    def getDimension( self ):
        return self.size_

class multifamille:
    '''Multifamille permet de regrouper toutes les familles d'un projet Multiport'''
    def __init__( self ):
        self.nf_ = 0
        self.f_ = []
        self.np_ = 0
        self.ns_ = 0
    def AddFamily( self , f ):
        self.f_.append( f )
        self.inc_.append( 0 )
        self.nf_ = self.nf_ + 1
        self.np_ = self.np_ + f.getDimension()
    def Infos( self ):
        print "Nombre de familles: ", self.nf_
        print "Nombre de ports: ", self.np_
    def whereis( self , i ):
        for k in range( self.nf_ ):
            g = self.f_ [ k ]
            r = g.hasPort( i )
            if ( r == 1 ):
                break
        return k
    def MakeList( self ):
        A = zeros( ( self.np_ , 5 ) )
        for i in range( self.np_ ):
            A [ i , 0 ] = i + 1
            indf = self.whereis( i + 1 )
            Rnom = self.f_ [ indf ].Rnom_ # complexe
            fem = self.f_ [ indf ].fem_
            # Recupere ou se trouve le i-eme port
            # fonction whereis(i)
            A [ i , 1 ] = Rnom [ 0 ]
            A [ i , 2 ] = Rnom [ 1 ]
            A [ i , 3 ] = fem [ 0 ]
            A [ i , 4 ] = fem [ 1 ]
        return A

    def write_mp01( A , np , ns , lf , conv , project ):
        '''Ecriture du fichier mp01'''

```



```

Donnees : matrice contenant les valeurs de Zc et Fem par port (dim: np x 5)
nombre de ports complets
liste des frequences de calcul
convention idft (+/-) (+iwt/-iwt)
Chemin d'accès du projet (sans .mp01)
Resultat : Liste contenant les valeur des Zc/Fem
But : Generer les donnees pour un calcul multiport
Exemple : write_ivp01(A,44,0,[0.1,360,800],'-','/home/')
Version : 1.0
Remarques : Compatible Multiport 1.2
Auteur : S.HADDAD
sofiane.haddad@eads.net

'''
s=[]
s.append("#version_1.0\n")
s.append("#convention"+"_" +conv+"iwt\n")
s.append("#nports:_"+str(np)+"_+_nsources:_"+str(ns)+"_+_nfreqs:_"+str(len(lf))+"_+\n")
s.append("#ZC:_DIAGONAL\n")
for k in range(len(lf)):
    freq=lf[k]
    s.append(str(freq)+"\n")
    for i in range(np):
        s.append(str(int(A[i,0]))+"_")
        for j in range(4):
            s.append(str(A[i,j+1])+"_")
        s.append("\n")
fp=open(project,'w')
fp.writelines(s)
fp.close()
return s

def uncertain(Z,m,k,e):
    '''Z la matrice contenant les valeurs de charge Zc et Fem pour chaque port
    m une 'multi-famille'
    k indice de la famille incertaine
    e les elements a mettre (remplacement des valeurs de Zc)
    Hypothese importante: Aleas sur Zc, Zc reelle'''
    f=m.f[k]
    res=[]
    for i in range(f.getDimension()):
        j=f.indices[i]
        Z[j-1,1]=e[i]
        res.append(j)
    return res

# Lecture d'un fichier ip01/vp01
def read_ivp01(ivp01file,np):
    '''Lecture d'un fichier ip01/vp01
    Donnees : fichier ip01/vp01
    nombre de ports
    Resultat : Liste contenant les valeur des courants/tensions a chaque port
    But : Recuperer les donnees issues d'un calcul multiport
    Exemple : read_ivp01(/home/mp/barrel/barrel.ip01,44)
    Version : 1.0
    Remarques : Compatible Multiport 1.2
    Auteur : S.HADDAD
    sofiane.haddad@eads.net'''
    fp=open(ivp01file,'r')
    s=fp.readlines()
    fp.close()
    y=[]
    # on demarre la lecture a la 3 eme ligne
    for l in s[3:len(s)]:
        k=1
        for j in range(np):
            val1=l.split()[k]
            k=k+1
            val2=l.split()[k]
            c=float(val1)*float(val1)+float(val2)*float(val2)
            y.append(sqrt(c))
            k=k+1
    return y

def ListToMatrix(mylist,nl,nc):
    '''Transforme une liste en matrice numpy
    pratique lorsque l'on souhaite utiliser des operateurs min/max par exemple'''
    nll=len(mylist)
    Z=zeros((nl,nc))
    if(nl*nc==nll):
        k=0
        for i in range(nl):
            for j in range(nc):
                Z[i,j]=mylist[k]
                k=k+1

```



`return Z`

Listing B.2: Definition d'un projet

```

from numpy import *
from openturns import *
from os import system
from math import *
from os import times
import time
from struct import *
from os import getcwd
from multiport import *

#####
### Definition Cas Etude ###
#####
cas_etude='/home/haddad/calcul_incertitudes/Multiport/barrel_44_ports/cas_etude/Barrel_case_1.1ac_multifamille'

m=multifamille() # creation multifamille

f1=a_famille()
f1.giveName('SOURCE')
f1.giveRnom((0.,0.))
f1.giveFem((115.,0))
f1.AddElement([1])
m.AddFamily(f1)

f2=a_famille()
f2.giveName('Rload')
f2.giveRnom((2.3,0.))
f2.giveFem((0.,0))
f2.AddElement([2])
m.AddFamily(f2)

f3=a_famille()
f3.giveName('ST1')
f3.giveRnom((4.e-6,0))
e=[]
for i in range(6):
    e.append(i+3)
e.append(27)
f3.AddElement(e)
m.AddFamily(f3)

f4=a_famille()
f4.giveName('ST2')
f4.giveRnom((4.e-6,0))
e=[]
for i in range(6):
    e.append(i+9)
e.append(28)
f4.AddElement(e)
m.AddFamily(f4)

f5=a_famille()
f5.giveName('RT1')
f5.giveRnom((4.e-6,0))
e=[]
for i in range(3):
    e.append(i+15)
e.append(21)
e.append(22)
e.append(23)
f5.AddElement(e)
m.AddFamily(f5)

f6=a_famille()
f6.giveName('RT2')
f6.giveRnom((4.e-6,0))
e=[]
for i in range(3):
    e.append(i+18)
e.append(24)
e.append(25)
e.append(26)
f6.AddElement(e)
m.AddFamily(f6)

f7=a_famille()
f7.giveName('Jxxx') # Jxxx
f7.giveRnom((0.1,0.))
e=[]
for i in range(16):
    e.append(i+29)

```



```
f7.AddElement(e)
m.AddFamily(f7)

inc=4 # Famille incertaine —> 5 eme famille, ie RT1
dim=m.f_[inc].getDimension()

# Matrice Charge/FEM pour tous les ports
A=m.MakeList()
# Frequences de calcul du projet
freq=[0.1,360.,800.]

# Fichiers de stockages
mp01save="/home/haddad/calcul_incertitudes/Multiport/barrel_44_ports/Analyse1/inc_RT1/mp01"
ip01save="/home/haddad/calcul_incertitudes/Multiport/barrel_44_ports/Analyse1/inc_RT1/ip01"
vp01save="/home/haddad/calcul_incertitudes/Multiport/barrel_44_ports/Analyse1/inc_RT1/vp01"
```

Listing B.3: Etude

```
from numpy import *
from openturns import *
from posix import system
from math import *
from os import times
import time
from struct import *
from multiport import *
from casetude import *

# Nettoyage avant chaque simulation
Nettoyage="rm -f "+ "_" +mp01save+".bin"+ " "+ip01save+".bin"+ " "+vp01save+".bin"
system("rm -f "+ "_" +mp01save+".bin"+ " "+ip01save+".bin"+ " "+vp01save+".bin")

# Wrapper OpenTurns
class FUNC(OpenTURNPythonFunction) :
    def __init__(self) :
        OpenTURNPythonFunction.__init__(self, dim, 1)
    def f(self, X) :
        ind=uncertain(A,m,inc,X)
        a=A[:,1:len(A[0,:])]
        a=a.reshape((4*m.np_,1)) # On retire la colonne numeros de ports
        l=a.tolist()
        # idee de save
        fp=open(mp01save+'.bin',"ab")
        for i in range(len(l)):
            hs=pack('f',l[i][0])
            fp.write(hs)
        fp.close()
        s=write_mp01(A,m.np_,m.ns_,freq,conv,cas_etude+'.mp01')

# Execution du code Multiport
rc = system(cmd)
if (rc != 0):
    throw
y=read_ivp01(cas_etude+'.ip01',m.np_)
l=ListToMatrix(y,3,m.np_)
l=l.transpose()
fp=open(ip01save+'.bin',"ab")
a=l.reshape((3*m.np_,1))
l=a.tolist()

for i in range(len(l)):
    hs=pack('f',l[i][0])
    fp.write(hs)
fp.close()

y=read_ivp01(cas_etude+'.vp01',m.np_)
V=ListToMatrix(y,3,m.np_)
V=V.transpose()
fp=open(vp01save+'.bin',"ab")
a=V.reshape((3*m.np_,1))
l=a.tolist()
for i in range(len(l)):
    hs=pack('f',l[i][0])
    fp.write(hs)
fp.close()
res=[]
# On choisit la famille des observables
global family
family=inc
li=[]
for i in range(len(m.f_[family].indices_)):
    li.append(m.f_[family].indices_[i]-1)
res.append(l[li,0].max())
return res
```



```

f=NumericalMathFunction(FUNC())

tic=time.time()

# Definition des variables aleatoires
Rnom=m.f_[inc].getRnom()
Rmin=Rnom[0]/5.
Rmax=Rnom[0]*4.
N=10000 # Nombre de simulations

# Lois des entrees
distribution = Uniform(Rmin,Rmax)

# Matrice de correlation de Spearman
RS = CorrelationMatrix(dim)

# Evaluation de la correlation
R=NormalCopula.GetCorrelationFromSpearmanCorrelation(RS)
copuleNormal = NormalCopula(R)

# Creation des marginales
collectionMarginals= DistributionCollection(dim)
for i in range(dim):
    collectionMarginals[i] = Distribution(distribution)

# Creation du vecteur aleatoire en entree
inputDistribution= ComposedDistribution(collectionMarginals , Copula(copuleNormal))

# Description
inputDescription = Description(dim)
for i in range(dim):
    inputDescription [i] = str(i+1)
inputDistribution.setDescription(inputDescription)

# Loi en entree
inputRandomVector=RandomVector(inputDistribution)

# Variable d'interet
outputVariableOfInterest=RandomVector(f,inputRandomVector)

#####
##### Tendances centrales #####
#####
fp=open('my_datas.bin','wb')
hs=pack('i',N)
fp.write(hs)
hs=pack('i',m.np_)
fp.write(hs)
hs=pack('i',m.ns_)
fp.write(hs)
hs=pack('i',len(freq))
fp.write(hs)
fp.close()

Sample=inputRandomVector.getNumericalSample(N)
# Calcul de la reponse
outputNumericalSample=f(Sample)

toc=time.time()
print "Temps mis pour N=",N," :",toc-tic

s=[] # Getion liste/chaine de caracteres/fichier

s.append("tic" + "_" + str(tic) + "_" + "toc" + "_" + str(toc) + "_" + "time_" + "_" + str(toc-tic)+ "_\n")

# Fichier de sauvegarde: Temps de calcul
ftmp=open("my_time.dat",'w')
ftmp.writelines(s)
ftmp.close()

```

Listing B.4: Post-traitement d'une simulation

```

from numpy import *
from openturns import *
from os import system
from math import *
from os import times
import time
from struct import *
from os import getcwd
from multiport import *
from casetude import *

#####
##### Routines Post-Traitement Multiport #####

```



```
##### Sofiane HADDAD, Juillet 2009 #####

# Chargement des donnees du projet (taille echantillon, nombre ports...)
fp=open('my_datas.bin','rb')
flux=fp.read()
hs=unpack('iiii',flux)
fp.close()
N=hs[0]
np=hs[1] # nbre ports
ns=hs[2] # nbre sources
nf=hs[3] # nbre freq

nv=N*(np+ns)*nf

format=''

# Chargemnt du fichier contenant les valeurs de courant
fp=open(ip01save+'.bin','rb')
flux1=fp.read()
fp.close()

# Chargemnt du fichier contenant les valeurs de tension
fp=open(vp01save+'.bin','rb')
flux2=fp.read()
fp.close()

# Chargemnt du fichier contenant les valeurs de charges
fp=open(mp01save+'.bin','rb')
flux3=fp.read()
fp.close()

It=zeros((np*N,nf))
Vt=zeros((np*N,nf))
Mt=zeros((np*N,4))
format=''
for i in range(nv):
    format=format+'f'
I=unpack(format,flux1)
V=unpack(format,flux2)

for i in range(N*np):
    format=format+'f'
M=unpack(format,flux3)

k=0
for i in range(np*N):
    for j in range(nf):
        It[i,j]=I[k]
        Vt[i,j]=V[k]
        k=k+1

k=0
for i in range(np*N):
    for j in range(4):
        Mt[i,j]=M[k]
        k=k+1

cmd="multiport.exe" + " " + "-j" + cas_etude+".j01" + " " + "-m" + " " + cas_etude+".mp01" + " " + "-c" + conv + str

#####
# Calcul pour des valeurs nominales ###
#####
s=write_mp01(A,m.np_,m.ns_,freq,conv,cas_etude+'.mp01')
# Execution du code Multiport
system(cmd)
y=read_ivp01(cas_etude+'.ip01',m.np_)
I=ListToMatrix(y,3,m.np_)
I=I.transpose()
y=read_ivp01(cas_etude+'.vp01',m.np_)
V=ListToMatrix(y,3,m.np_)
V=V.transpose()

Inom=[]
Vnom=[]
for k in range(m.nf_):
    li=[]
    for i in range(len(m.f_[k].indices_)):
        li.append(m.f_[k].indices_[i]-1)
    Inom.append(I[li,0].max())
    Vnom.append(V[li,0].min())

mean=[]
std=[]
assym=[]
applat=[]
```

```

meanv=[]
stdv=[]
assymv=[]
applatv=[]
disp=[]
dispv=[]
for k in range(m.nf_):
    fam=fam.f_[k]
    ind=fam.indices
    for l in range(len(ind)):
        ind[l]=ind[l]-1
    out=NumericalSample(N,1)
    outv=NumericalSample(N,1)
    for n in range(N):
        deb=n*m.np_
        fin=deb+m.np_
        I=lt[deb:fin,:]
        V=Vt[deb:fin,:]
        I=I[ind,:]
        V=V[ind,:]
        out[n][0]=I[:,0].max()
        outv[n][0]=V[:,0].min()
print "Famille:", fam.name_
print "Moyenne_I(max)= ", out.computeMean()[0]
print "Moyenne_V(min)= ", outv.computeMean()[0]
print "Ecart_type_I(max)= ", sqrt(out.computeCovariance()[0,0])
print "Ecart_type_V(min)= ", sqrt(outv.computeCovariance()[0,0])
print "Coefficient_d'asymetrie_I(max)= ", out.computeSkewnessPerComponent()[0]
print "Coefficient_d'aplatissement_I(max)= ", out.computeKurtosisPerComponent()[0]
print "Coefficient_d'asymetrie_V(min)= ", outv.computeSkewnessPerComponent()[0]
print "Coefficient_d'aplatissement_V(min)= ", outv.computeKurtosisPerComponent()[0]
if( sqrt(out.computeCovariance()[0,0]) > 1.e-7):
    kernel=KernelSmoothing()
    smooothed=kernel.buildImplementation(out)
    ksPDF=smooothed.drawPDF()
    draw_ks =ksPDF.getDrawable(0)
    draw_ks.setLegendName("Imax")
    ksPDF.setYTitle("Densite_de_probabilite")
    ksPDF.getDrawable(draw_ks,0)
    titre="Loi_des_max_I("+m.f_[k].getName()+")"
    ksPDF.setTitle(titre)
    filename="PDF_I_"+m.f_[k].getName()
    ksPDF.draw(filename , 320 , 480 ,GraphImplementation.PNG)
if( sqrt(outv.computeCovariance()[0,0]) > 1.e-7):
    kernel=KernelSmoothing()
    smooothed=kernel.buildImplementation(outv)
    ksPDF=smooothed.drawPDF()
    draw_ks =ksPDF.getDrawable(0)
    draw_ks.setLegendName("Vmin")
    ksPDF.setYTitle("Densite_de_probabilite")
    ksPDF.getDrawable(draw_ks,0)
    titre="Loi_des_min_V("+m.f_[k].getName()+")"
    ksPDF.setTitle(titre)
    filename="PDF_V_"+m.f_[k].getName()
    ksPDF.draw(filename , 320 , 480 ,GraphImplementation.PNG)
#Show(ksPDF)
csvfile="outi_"+m.f_[k].getName()+".csv"
out.exportToCSVFile(csvfile)
csvfile="outv_"+m.f_[k].getName()+".csv"
outv.exportToCSVFile(csvfile)
mean.append(out.computeMean()[0])
std.append(sqrt(out.computeCovariance()[0,0]))
applat.append(out.computeKurtosisPerComponent()[0])
assym.append(out.computeSkewnessPerComponent()[0])
meanv.append(outv.computeMean()[0])
stdv.append(sqrt(outv.computeCovariance()[0,0]))
applatv.append(outv.computeKurtosisPerComponent()[0])
assymv.append(outv.computeSkewnessPerComponent()[0])
q95=out.computeQuantile(0.95)[0]
q05=out.computeQuantile(0.05)[0]
med=out.computeQuantile(0.5)[0]
disp.append((q95-q05)/med)
q95=outv.computeQuantile(0.95)[0]
q05=outv.computeQuantile(0.05)[0]
med=outv.computeQuantile(0.5)[0]
dispv.append((q95-q05)/med)

tlist=[]
tlist.append("Donnees :uuu"+"uuuu"+"I(max)+"uuuuuuuu"+"V(min)+"\n")
tlist.append("-----uuu"+"uuuu"+"-----"+"uuuuuuuu"+"-----+"\n")
for k in range(m.nf_):
    tlist.append("Famille_u:"+uuuu+m.f_[k].name_+"\n")
    tlist.append("Moyennes :uu"+"uuuu"+str(mean[k])+uuuuuuuu+str(meanv[k])+"\n")
    tlist.append("Std :uuuuuuuu"+"uuuu"+str(std[k])+uuuuuuuu+str(stdv[k])+"\n")
    tlist.append("Applat :uuuu"+"uuuu"+str(applat[k])+uuuuuuuu+str(applatv[k])+"\n")
    tlist.append("Assym :uuuuuu"+"uuuu"+str(assym[k])+uuuuuuuu+str(assymv[k])+"\n")
    tlist.append("Dispersion :"+uuuu+str(disp[k])+uuuuuuuu+str(dispv[k])+"\n")

```




```
ftmp=open("Repartition.dat",'w')
ftmp.writelines(tlist)
ftmp.close()
```

Listing B.5: Routine de comparaison de courant normalisé

```
//*****
// Comparaison de courant normalisé par zone
//*****

function CompareIZoneNormalized(meffile, notUsed);

// Chargement des résultats
results_file=meffile+'_results.dat';
load(results_file);
CURRENTMEF=I0;
CURRENTMEF_PLUS = CURRENTMEF(:,indice_PLUS);
TOTAL_CURRENTMEF = sum(CURRENTMEF_PLUS,'c');

// Loading results
elefile=meffile+'_ele2T';
A=fscanfMat(elefile);
[n m]=size(A);
nele=A(n,1);
nf=n/nele;
CURRENT=matrix(A(:,2),nele,nf)+%i*matrix(A(:,3),nele,nf);
CURRENT2T=CURRENT';
CURRENT2T_PLUS = CURRENT2T(:,indice_PLUS);
TOTAL_CURRENT2T = sum(CURRENT2T_PLUS,'c');

if nb_zone==0
    fprintf('%io(2)','No Zone in ELFI2T/Mefisto file ... \n');
    return
else
    fprintf('%io(2)','Nombre de zone : %d',nb_zone)
    for k = 1 : size(numzone,1);

        xset('window',2600+k);
        indice_zone = find(ZONE==numzone(k));

        ZONE_CURRENT2T = sum(CURRENT2T(:,indice_zone),'c');
        ZONE_CURRENTMEF = sum(CURRENTMEF(:,indice_zone),'c');

        // Tracé du courant normalisé
        plot2d(f,abs(ZONE_CURRENT2T./TOTAL_CURRENT2T),5,logflag='ln');
        plot2d(f,abs(ZONE_CURRENTMEF./TOTAL_CURRENTMEF),10,logflag='ln');
        tit=sprintf('Zone %d courant (normalized) on %d',k);
        f1=get('current_figure');
        a=f1.children;
        a.thickness=1;
        e=a(1).children
        f1.children.thickness = 1;
        f1.children.font_size = 3;
        f1.children.font_color = -1;
        f1.children.x_label.text = "Hz";
        f1.children.y_label.text = "A";
        f1.children(1).title.text = tit;
        f1.children.title.font_size = 2;
        f1.children.x_label.font_size = 3;
        f1.children.y_label.font_size = 3;
        e.children.thickness=2;
        xgrid;
        h=legend('ELFI2T','MEFISTO');
        clear indice_zone;
        filename=sprintf("%s%d",meffile+"_compare_zone_",k)
        xs2jpg(2600+k,filename)
    end //fin for
end

endfunction
```

Listing B.6: Exemple de calcul d'erreur de champ

```
// *****
// Post-processing validation
// Auteur : Sofiane Haddad
// *****

clear
xdel(winsid());
clc;
lines(0);
stacksize(6e7);
```



```

// *****
// Loading files
// *****
exec("C:\Sofiane\Work\mefisto_projects\datas.sce",-1)

projet=projet6;

//fichier de donnees de champs
chp_bs=projet+".mef_HField.dat";

try
    load(chp_bs);
catch
    messagebox("Vous devez lancer le calcul complet des cartes de champs")
end

Hxbs=Hx;
Hybs=Hy;
Hbs=H;
chp_proche=projet+".mef_HProcheField.dat";

try
    load(chp_proche);
catch
    messagebox("Vous devez lancer le calcul PROCHE")
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
// Analyse comparative pour la frequence 0.1 Hz
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
HHxbs=Hxbs(:,:1);
HHx=Hx(:,:1);
HHxerr=HHxbs-HHx;

HHybs=Hybs(:,:1);
HHy=Hy(:,:1);
HHyerr=HHybs-HHy;

// Calcul de l'erreur (en dB)
Herr=20*log10(sqrt(abs(HHxerr).^2+abs(HHyerr).^2));

// Niveaux d'affichage
nmin=-130;
nmax=1;
nniv=64;
dx=(nmax-nmin)/(nniv-1);
nz=[nmin:dx:nmax];

xset('window',0);
xset("colormap",jetcolormap(nniv));
colorbar(nmin,nmax);
contourf(tabxp,tabyp,Herr,nz);
tit=sprintf('Erreur L2 (en dB) âf=0.1 Hz');
xtitle(tit);
fd=get("current_axes");
fd.axes_visible(1)="off";
fd.axes_visible(2)="off";
h=legend('');
fd=get("current_entity");
fd.visible="off";

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
// Analyse comparative pour la frequence 1e6 Hz
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
HHxbs=Hxbs(:,:61);
HHx=Hx(:,:4);
HHxerr=HHxbs-HHx;

HHybs=Hybs(:,:61);
HHy=Hy(:,:4);
HHyerr=HHybs-HHy;

Herr=20*log10(sqrt(abs(HHxerr).^2+abs(HHyerr).^2));

xset('window',1);
xset("colormap",jetcolormap(nniv));
colorbar(nmin,nmax);
contourf(tabxp,tabyp,Herr,nz);
tit=sprintf('Erreur L2 (en dB) âf=1e5 Hz');
xtitle(tit);
fd=get("current_axes");
fd.axes_visible(1)="off";
fd.axes_visible(2)="off";
h=legend('');
fd=get("current_entity");
fd.visible="off";

// Sauvegarde des fichiers pour rapports
xs2jpg(0,projet+"ErrL2BF")

```



```
|xs2jpg(1, projet+"ErrL2HF")  
// Information visuelle: fin du post-pro  
|mprintf("Done")
```



Bibliographie

- [1] EADS-EDF-PHIMECA.
OpenTURNS Reference Guide, version 0.13.1.
Technical report, 2009.
- [2] Frederick W. Grover.
Inductance Calculations.
Technical report.
- [3] S. HADDAD.
Validation du code de calcul ELFI2T.
Technical report, SupGalilee, 2009.
- [4] G.Sylvand I. Terrasse and T.Abboud.
Modélisation des phénomènes de propagation d’ondes : équations intégrales.
Technical report, Cours de mathématiques appliquées de l’école polytechnique, 2008.
- [5] I. Stegun M. Abramowitz.
Handbook of mathematical functions.
Technical report, 1964.
- [6] F. Mangeant and J-M.Martinez.
Cours MACS Sup Galilée : Incertitudes en industrie.
Technical report, 2009.
- [7] R. PERRAUD.
Mefisto guide user.
Technical report, EADS-IW, 2009.
- [8] I. Terrasse.
Notes de programmation du code ELFI2T.
Technical report, EADS-IW, 2007.