

Rapport de stage de fin d'études



# Étude des méthodes de Schwarz non-linéaires Résolution des équations d'Euler

*CIOBANU Oana Alexandra*

*Master 2 -Mécanique et Physique des Matériaux,  
INSTITUT GALILÉE*



Ingénieurs : M<sup>me</sup> RYAN Juliet et M<sup>r</sup> JUVIGNY Xavier

6 septembre 2011

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Environnement du stage</b>	<b>1</b>
1.1	Présentation de l'entreprise . . . . .	1
1.2	Présentation du département . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Équations d'Euler</b>	<b>2</b>
2.1	Variable conservative . . . . .	2
2.2	Variable primitive . . . . .	2
2.3	Propriétés . . . . .	2
2.4	Problème de Riemann . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Discrétisation spatiale des équations d'Euler 1D</b>	<b>5</b>
3.1	Flux de Godunov . . . . .	6
3.2	Flux de Steger Warming . . . . .	7
3.3	Le schéma de Van Leer . . . . .	7
3.4	Le schéma AUSM . . . . .	8
3.5	La méthode de MUSCL-Hancock . . . . .	9
3.6	Conditions aux limites . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Discrétisation temporelle</b>	<b>11</b>
4.1	Schéma d'Euler Explicite . . . . .	12
4.2	Méthode de Runge Kutta . . . . .	12
4.3	Méthodes implicites des différentiation rétrogrades . . . . .	13
4.3.1	Méthode de Newton . . . . .	13
4.3.2	Méthodes de résolution linéaires . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Méthode de Schwarz</b>	<b>16</b>
5.1	Algorithme de Schwarz alterné . . . . .	18
5.2	Algorithme de Schwarz additif . . . . .	18
5.3	Méthode de Newton-Schwarz . . . . .	19
5.4	Méthode de Schwarz-Newton . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>20</b>
6.1	Cas d'une Gaussienne . . . . .	21
6.2	Cas d'une fonction sinusoïdale avec terme source . . . . .	26
6.3	Écoulement dans un tube à choc . . . . .	27
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>34</b>

**Remerciements** Je remercie Mme Juliet Ryan et Mr Xavier JUVIGNY, ingénieurs ONERA pour l'encouragement et pour l'aide précieuse apportée durant ce travail.

# Introduction

Dans le cadre de la mécanique des fluides instationnaires et l'étude de corps en mouvement (Hélicoptère, turbo machines), la méthode chimère est une des méthodes de recouvrement de maillage les plus utilisées avec l'AMR. Elle offre l'avantage de ne pas remailler le problème à chaque pas de temps physique tout en simulant des phénomènes complexes et de pouvoir raffiner localement des zones de fortes activités aérodynamiques.

Cependant, pour le transfert de données entre grilles recouvrantes, cette méthode n'utilise qu'une méthode de Schwarz additif, qui offre certes l'avantage de pouvoir calculer en parallèle des bilans de flux sur chaque maillage, mais offre un faible taux de convergence par rapport au Schwarz multiplicatif ou autres techniques dérivées de ces méthodes de décomposition de domaines.

De plus, les méthodes de Schwarz classique se font par transfert des valeurs du champs aux frontières, ce qui revient à imposer des conditions de type Dirichlet. La convergence de la méthode de Schwarz peut être améliorée par d'autres types de conditions.

L'objet du stage est de faire une étude comparative sur les diverses variantes issues des méthodes de Schwarz classiques. Une autre étude est de remplacer les conditions de type Dirichlet par des conditions de type Fourier/Robin et de comparer le comportement des méthodes de Schwarz avec ces conditions.

Une maquette mettant en œuvre ces diverses méthodes est réalisée dans le cadre des équations d'Euler compressibles discrétisés en volumes finis sur des cas simples.

# 1 Environnement du stage

## 1.1 Présentation de l'entreprise



Premier acteur français de la R&T aéronautique, spatiale et de défense, l'Office national d'études et recherches aérospatiales compte 2 000 salariés, dont 1 500 chercheurs ingénieurs et techniciens, répartis sur huit sites en France. Les ressources de l'Onera proviennent de deux sources :

- \* pour 60 %, de prestations de recherches contractuelles pour les agences de programme et l'industrie
- \* pour 40 %, d'une subvention annuelle de l'état français.

La subvention finance essentiellement les recherches à long terme, qui préparent l'avenir. Les contrats de recherche financent les travaux à moyen et court termes, plus proches de l'application. Tout l'enjeu de la politique scientifique de l'Onera est d'organiser ce flux de connaissances, qui va de l'acquisition de savoirs nouveaux à leur transfert vers l'industrie.

Avec cinq fois plus d'activités sous contrats par chercheur que la moyenne, l'Onera est quotidiennement dans une logique d'évaluation des retombées de chaque projet, en termes de compétitivité pour l'industrie, de progrès pour la défense, d'avancées pour l'environnement et d'accès à l'emploi pour ses doctorants.

## 1.2 Présentation du département

L'Onera est organisé en 17 départements dont un laboratoire mixte Onera/CNRS regroupés en quatre branches scientifiques : les matériaux et structures, la mécanique des fluides et énergétique, la physique, les traitements de l'information et systèmes.

Le département de Traitement de l'information et modélisation (DTIM) fait partie de la branche traitements de l'information et systèmes.

La simulation numérique de phénomènes physiques est un enjeu majeur dans toutes les phases de conception et d'évaluation de systèmes aéronautiques ou spatiaux ; elle est donc utilisée au sein de plusieurs départements de l'Onera. En offrant une expertise dans la modélisation, le développement de méthodes et leur mise en œuvre, expertise transverse aux différentes branches physiques, le département DTIM contribue à ce que l'Onera soit à la hauteur de cet enjeu.

Deux axes thématiques sont observées :

- \* la modélisation mathématiques et simulation numérique
- \* le calcul haute performance (CHP)

Les objectifs de CHP sont :

- \* Augmenter le champ d'application et la qualité de la simulation numérique par le développement de modèles multi-domaines, multi-échelles et par le couplage.
- \* Mettre en place des méthodologies parallèles efficaces pour résoudre ces modèles sur des calculateurs massivement parallèle à mémoire distribuée

## 2 Équations d'Euler

Considérons un fluide parfait. Notons  $\rho$  la masse volumique,  $u$  la vitesse dans la direction  $x$  et  $E$  l'énergie totale du fluide.

$$E = \rho\left(\frac{1}{2}u^2 + e\right)$$

On note  $H$  l'enthalpie totale du fluide  $H = \frac{E+p}{\rho}$ .

On suppose que le fluide est un gaz parfait avec  $\gamma = 1.4$ . La pression est donnée par la loi d'état :

$$p = (\gamma - 1)\rho\left(\frac{E}{\rho} - \frac{1}{2}u^2\right)$$

### 2.1 Variable conservative

Le système des équations d'Euler s'écrit sous la forme conservative :

$$U_t + F(U)_x = 0 \tag{1}$$

où  $U$  désigne le vecteur des variables conservatives :

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}$$

$F(U)$  est le vecteur flux :

$$F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{pmatrix},$$

### 2.2 Variable primitive

Le système des équations d'Euler s'écrit en variables primitives  $\rho, u, p$  :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (u \otimes (\rho u)) + \nabla p = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

où  $a$  est la vitesse de son.

### 2.3 Propriétés

Soit  $e$  l'énergie interne spécifique,  $e = \frac{p}{(\gamma-1)\rho}$  (équation d'état calorique pour un gaz idéal), où  $\gamma = c_p/c_v$  est le taux du chauffage spécifique.

La vitesse de son est donnée par :

$$a = \sqrt{\frac{(\frac{p}{\rho^2} - e_\rho)}{e_p}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

Notons  $A$  la matrice jacobienne du flux  $F(U)$  par rapport aux variables conservatives. L'expression de la matrice  $A$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma-3)u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ \frac{1}{2}(\gamma-2)u^3 - \frac{a^2u}{\gamma-1} & \frac{3-2\gamma}{2}u^2 + \frac{a^2}{\gamma-1} & \gamma u \end{pmatrix}$$

On peut montrer que la matrice  $A$  est diagonalisable et possède trois valeurs propres réelles distinctes  $\lambda_i$ . Il en résulte que le système des équations d'Euler est de type hyperbolique.

Les valeurs propres du jacobien  $A$  sont :

$$\lambda_1 = u - a, \lambda_2 = u, \lambda_3 = u + a$$

les vecteurs propres associés sont :

$$K^{(1)} = \begin{pmatrix} \rho \\ -a \\ \rho a^2 \end{pmatrix}, K^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, K^{(3)} = \begin{pmatrix} \rho \\ a \\ \rho a^2 \end{pmatrix}$$

**Propriété d'homogénéité.** Les équations d'Euler (1) avec l'équation d'état pour un gaz idéal satisfait la propriété d'homogénéité suivante :

$$F(U) = A(U)U$$

Le système des équations d'Euler constitue un système d'équations hyperboliques non linéaires. Une propriété importante d'un tel système est le fait que, même avec des conditions initiales et aux limites parfaitement régulières, il peut apparaître au bout d'un temps fini des solutions discontinues (apparition d'une onde de choc). Cependant la forme intégrale des équations bilan reste valable. On peut donc l'écrire sur un domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$  et de normales extérieures  $n$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \oint_{\Gamma} F \cdot n d\Gamma = 0$$

En présence d'une discontinuité, les relations de saut entre les états amont et aval sont appelées relations de Rankine-Hugoniot.

## 2.4 Problème de Riemann

On appelle problème de Riemann pour les équations d'Euler mono dimensionnelles le problème consistant à chercher une solution des équations

$$U_t + F(U)_x = 0 \quad (2)$$

avec la condition initiale suivante :

$$U(x, 0) = U^{(0)}(x) = \begin{cases} U_L & \text{si } x < 0 \\ U_R & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On s'intéresse aux points  $(x, t)$  tels que  $-\infty < x < \infty$  et  $t > 0$ . En pratique on va supposer  $x \in [x_L, x_R]$  autour du point  $x = 0$ . Physiquement, le problème de Riemann associé aux équations d'Euler est une généralisation du problème tube à choc (deux gaz dans un tube séparés par un diaphragme). La rupture du diaphragme génère une détente d'onde, un contact ou un choc.

Il existe trois ondes associées aux trois champs caractéristiques correspondant aux trois vecteurs propres  $K^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Soit  $W = (\rho, u, p)^t$ . Les trois ondes séparent quatre états constants :  $W_L = (\rho_L, u_L, p_L)^t$ ,  $W_{*L} = (\rho_L, u_L, p_L)^t$  (états constants à gauche),  $W_{*R} = (\rho_R, u_R, p_R)^t$  et  $W_R = (\rho_R, u_R, p_R)^t$  (états constants à droite).

Le champ caractéristique correspondant à  $K^{(2)}$  est linéaire dégénéré et les ondes associées à  $K^{(1)}$  et  $K^{(3)}$  sont non linéaires. L'onde associée à  $K^{(2)}$  est une discontinuité de contact et celles associées à  $K^{(1)}$  et  $K^{(3)}$  sont soit des ondes de détente soit des ondes de chocs.

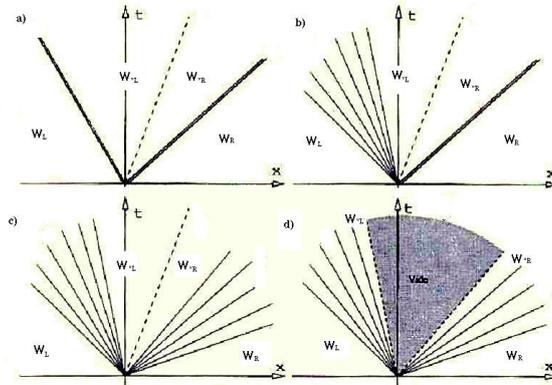


FIGURE 1 – Les différents cas de solution du problème de Riemann

Dans le cas d'une onde de détente on a :

$$\lambda_1(W_L) \leq \lambda_1(W_{*L})$$

Dans le cas d'un choc, les caractéristiques entrent dans l'onde, on a :

$$\lambda_3(W_{*R}) > S_3 > \lambda_3(W_R)$$

ce qui est la condition d'entropie.  $S_3$  est la vitesse du choc.  
Pour l'onde de contact on a :

$$\lambda_2(W_{*L}) = \lambda_2(W_{*R}) = S_2$$

avec  $S_2$  la vitesse de l'onde de contact ; les caractéristiques sont parallèles à l'onde de contact (cas linéaire).

Les invariants de Riemann pour deux ondes de détente sont :

$$\lambda_1 = u - a : \begin{cases} I_L(U, a) = U + \frac{2a}{\gamma-1} = \text{constant} \\ s = \text{constant} \end{cases}$$

$$\lambda_3 = u + a : \begin{cases} I_R(U, a) = U - \frac{2a}{\gamma-1} = \text{constant} \\ s = \text{constant} \end{cases}$$

### 3 Discrétisation spatiale des équations d'Euler 1D

Nous utilisons une formulation aux Volumes Finis. Le domaine de calcul est discrétisé en  $N$  nœuds  $x_i$  régulièrement espacés avec un pas  $\Delta x$  et le temps est discrétisé en intervalles de pas  $\Delta t$ . A partir des équations de conservation, on veut calculer les valeurs de la variable  $U$  au centre de chaque volume de contrôle défini par le maillage. Le domaine  $\Omega$  est donc décomposé en volumes élémentaires notés  $\Omega_i$  de tel sorte que :

$$\Omega = \sum_{i=1}^N \Omega_i$$

Le principe de la méthode est d'intégrer sur une maille élémentaire  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  les lois de conservation. Dans chaque maille, le vecteur des variables conservatives est supposé constant. L'intégration au temps  $t = n\Delta t$  s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial F(U)}{\partial x} dx = 0$$

Notons  $\bar{G}_i^n$  la valeur moyenne d'une grandeur  $G(x, t)$  sur la maille  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ , au temps  $t = n\Delta t$ , définie par :

$$\bar{G}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} G(x, t) dx$$

Et désignons par  $U_i^n$  une valeur approchée de la valeur  $\bar{U}_i^n$  sur la maille  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ , au temps  $t = n\Delta t$ . Le système de lois de conservation peut s'intégrer selon :

$$\Delta x \frac{\partial U_i^n}{\partial t} + \hat{F}_{i+1/2}^n - \hat{F}_{i-1/2}^n = 0$$

La quantité  $\hat{F}_{i+1/2}^n$  est une approximation du flux physique  $F(U)$  sur l'interface  $x_{i+1/2}$ , c'est le flux numérique sur l'interface considérée, fonction des états voisins de l'interface :  $(U_{i-q+1}^n, U_{i-q+2}^n, \dots, U_{i+q}^n)$ . Dans le cas le plus simple, le flux numérique à l'interface  $x_{i+1/2}$  ne dépend que des états directement voisins :  $U_i$  et  $U_{i+1}$ . La manière dont on approche les flux numériques en fonction de l'inconnue discrète détermine le schéma numérique.

La discrétisation spatiale revient à calculer le bilan des flux sur une maille élémentaire. Ce bilan comprend la somme des contributions évaluées sur chaque interface de la maille. Si le même algorithme utilisé pour évaluer le flux numérique à l'interface  $x_{i+1/2}$  est utilisé pour les autres interfaces, le schéma est dit conservatif.

La condition de consistance d'un schéma numérique s'exprime de la façon suivante :

$$\hat{F}_{i+1/2}^n(U, U, \dots, U) = F(U)$$

### 3.1 Flux de Godunov

On considère le système d'équations d'Euler suivant :

$$U_t + F(U)_x = 0 \quad (3)$$

La méthode de Godunov peut être écrite sous la forme conservative suivante :

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i-1/2} - F_{i+1/2})$$

où  $F$  est le flux numérique donné par :

$$F_{i+1/2} = F(U_{i+1/2}(0))$$

si le pas du temps  $\Delta t$  satisfait la condition  $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{S_{max}^n}$ .  $S_{max}^n$  représente le maximum de la vitesse d'onde présente dans le domaine au temps  $t^n$  et on peut définir le nombre de Courant, Cfl maximum

$$C_{cfl} = \frac{\Delta t S_{max}^n}{\Delta x}, \quad 0 < C_{cfl} < 1$$

$U_{i+1/2}(0)$  représente la solution exacte  $U_{i+1/2}(x/t)$  du problème de Riemann évalué en  $x/t = 0$ .  $U_{i+1/2}(x/t)$  peut être facilement obtenu.

$$U_{i+\frac{1}{2}}(x/t) = \sum_{j=1}^I \beta_j K^{(j)} + \sum_{j=I+1}^m \alpha_j K^{(j)}$$

avec  $U_i^n = \sum_{j=1}^m \alpha_j K^{(j)}$ ,  $U_{i+1}^n = \sum_{j=1}^m \beta_j K^{(j)}$  sont décomposés en fonction des vecteurs propres et  $1 \leq I \leq m$  tel que  $x/t \geq \lambda I$ . Donc on a :

$$U_{i-\frac{1}{2}}(0) = U_i^n + \sum_{j=1}^I (\beta_j - \alpha_j) K^{(j)}$$

$$U_{i+\frac{1}{2}}(0) = U_{i+1}^n - \sum_{j=1}^I (\beta_j - \alpha_j) K^{(j)}$$

d'où

$$U_{i+\frac{1}{2}}(0) = \frac{1}{2}(U_i^n + U_{i+1}^n) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^I \text{sign}(\lambda_j) (\beta_j - \alpha_j) K^{(j)}$$

On peut donc calculer le flux numérique entre cellules :

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(F_i^n + F_{i+1}^n) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m |\lambda_j| (\beta_j - \alpha_j) K^{(j)}$$

Une autre possibilité pour écrire le flux de Godunov est la suivante :

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(F_i^n + F_{i+1}^n) - \frac{1}{2}|A|(U_{i+1}^n - U_i^n)$$

Le flux de Godunov peut être écrit sous forme décomposé comme :

$$F_{i+\frac{1}{2}} = A^+ U_i^n + A^- U_{i+1}^n$$

### 3.2 Flux de Steger Warming

Dans le cas des équations d'Euler, le flux numérique est homogène de degré un, conduisant à la propriété

$$F(U) \cdot \nu_{ij} = A(U)U$$

Nous utilisons cette propriété pour décomposer la matrice jacobienne A de la façon suivante :

$$A = A^+ + A^-$$

avec

$$F(U) = F^+(U) + F^-(U)$$

$$A^\pm = \frac{\partial F^\pm}{\partial U}$$

$$F^\alpha = \frac{\rho}{2\gamma} \begin{pmatrix} \lambda_1^\alpha + 2(\gamma - 1)\lambda_2^\alpha + \lambda_3^\alpha \\ (u - a)\lambda_1^\alpha + 2(\gamma - 1)u\lambda_2^\alpha + (u + a)\lambda_3^\alpha \\ (H - ua)\lambda_1^\alpha + (\gamma - 1)u^2\lambda_2^\alpha + (H + ua)\lambda_3^\alpha \end{pmatrix}$$

où  $\alpha = \pm$ ,  $\lambda_i = \lambda_i^+ + \lambda_i^-$  tel que  $\lambda_i^+ \geq 0, \lambda_i^- \leq 0$  et

$$\lambda_i^+ = \frac{1}{2}(\lambda_i + |\lambda_i|), \quad \lambda_i^- = \frac{1}{2}(\lambda_i - |\lambda_i|)$$

$$A^+ = K \text{diag}(\lambda^+) K^{-1}, \quad A^- = K \text{diag}(\lambda^-) K^{-1}$$

### 3.3 Le schéma de Van Leer

Van Leer définit le flux F comme une fonction de densité, vitesse de son et nombre de Mach  $M = \frac{u}{a}$  :

$$F = F(\rho, a, M) = \begin{pmatrix} \rho a M \\ \rho a^2 (M^2 + \frac{1}{\gamma}) \\ \rho a^3 M (\frac{1}{2} M^2 + \frac{1}{\gamma-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{mas} \\ f_{mom} \\ f_{ene} \end{pmatrix}$$

Ce schéma classique trouve sa particularité dans le fait qu'il s'appuie sur une décomposition des flux, on parle alors de schéma FVS (Flux-Vector Splitting). On décompose la matrice jacobienne  $A$  de la façon suivante :

$$A = A^+ + A^-$$

avec

$$A^\pm = \frac{\partial F^\pm}{\partial U}$$

où, pour le système d'équations d'Euler on a

$$F^+ = \frac{1}{4}\rho a(1+M)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2a}{\gamma}(\frac{\gamma-1}{2}M+1) \\ \frac{2a^2}{\gamma^2-1}(\frac{\gamma-1}{2}M+1) + \frac{1}{2}(v^2+w^2) \end{pmatrix}$$

$$F^- = -\frac{1}{4}\rho a(1-M)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2a}{\gamma}(\frac{\gamma-1}{2}M-1) \\ \frac{2a^2}{\gamma^2-1}(\frac{\gamma-1}{2}M-1) + \frac{1}{2}(v^2+w^2) \end{pmatrix}$$

Le nombre Mach sur l'interface de la cellule est donné par :

$$M_{i+1/2} = M_i^+ + M_{i+1}^-$$

avec

$$M^\pm = \begin{cases} \pm \frac{1}{4}(M \pm 1)^2 & \text{si } |M| \leq 1 \\ \frac{1}{2}(M \pm |M|) & \text{si } |M| > 1 \end{cases}$$

La condition de stabilité donnée par Van Leer est la suivante :

$$C_{cfl} = \frac{\Delta t}{\Delta x}(|u| + a) \leq \frac{2\gamma + |M|(3 - \gamma)}{\gamma + 3}$$

$C_{cfl}^{max} = 1$  pour  $|M| = 1$  et  $C_{cfl}^{min} = \frac{2\gamma}{\gamma+3} \approx 0.636...$ , pour  $|M| = 0$  La condition de CFL pour le schéma FVS est plus restrictive que pour la méthode Godunov, où le Cfl est proche d'unité.

### 3.4 Le schéma AUSM

La construction du schéma AUSM, Advection Upstream Splitting Method, est fondée sur la séparation des flux d'Euler en un terme convectif et un terme de pression à l'interface des cellules de contrôle. Ainsi le flux Euler se décompose comme suit :

$$F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u(E + p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ \rho u H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix} = F^c + F^p$$

Le terme convectif peut se développer comme suit :

$$F^c = M \begin{pmatrix} \rho a \\ \rho a u \\ \rho a H \end{pmatrix} = M \vec{F}^c$$

où  $M$  est le nombre de Mach :

$$M = \frac{u}{a}, \quad H = \frac{E + p}{\rho}$$

Le flux  $F_{i+1/2}$  se définit comme suit :

$$F_{i+1/2} = F_{i+1/2}^c + F_{i+1/2}^p$$

$$F_{i+1/2}^c = M_{i+1/2} [\vec{F}^c]_{i+1/2}$$

où

$$[*]_{i+1/2} = \begin{cases} |*|_i & \text{si } M_{i+1/2} \geq 0 \\ |*|_{i+1} & \text{si } M_{i+1/2} \leq 0 \end{cases}$$

Le nombre de Mach sur le centre de la cellule est décomposé comme suit :

$$M_{i+1/2} = M_i^+ + M_{i+1}^-$$

Liou et Steffen suivent Van Leer et choisissent la même décomposition du nombre de Mach :

$$M^\pm = \begin{cases} \pm \frac{1}{4}(M \pm 1)^2 & \text{si } |M| \leq 1 \\ \frac{1}{2}(M \pm |M|) & \text{si } |M| > 1 \end{cases}$$

pour la décomposition de la pression ils proposent deux possibilités :

$$p^\pm = \begin{cases} \frac{1}{2}p(1 \pm M) & \text{si } |M| \leq 1 \\ \frac{1}{2}p \frac{(M \pm |M|)}{M} & \text{si } |M| > 1 \end{cases}$$

et

$$p^\pm = \begin{cases} \frac{1}{4}p(M \pm 1)^2(2 \pm M) & \text{si } |M| \leq 1 \\ \frac{1}{2}p \frac{(M \pm |M|)}{M} & \text{si } |M| > 1 \end{cases}$$

### 3.5 La méthode de MUSCL-Hancock

Monotone Upstream centred Scheme for Conservative Laws ou Variable Extrapolation approach

Pour créer un schéma discret d'ordre deux en espace pour résoudre le système d'équations d'Euler on effectue trois étapes :

I - Reconstruction locale

$$U_i(x) = U_i^n + \frac{x - x_i}{\Delta x} \Delta i, \quad x \in [0, \Delta x]$$

$$U_i^L = U_i(0) = U_i^n - \frac{1}{2} \Delta i, \quad U_i^R = U_i(\Delta x) = U_i^n + \frac{1}{2} \Delta i$$

II - Évolution des  $U_i^L, U_i^R$  avec un temps  $\frac{\Delta t}{2}$  :

$$\begin{cases} \bar{U}_i^L = U_i^L + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(U_i^L) - F(U_i^R)] \\ \bar{U}_i^R = U_i^R + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(U_i^L) - F(U_i^R)] \end{cases}$$

III - Résoudre le problème de Riemann :

$$\begin{cases} U_t + F(u)_x = 0, \\ U(x, 0) = \begin{cases} \bar{U}_i^R, & x < 0 \\ \bar{U}_i^L, & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

pour trouver la solution  $U_{i+1/2}(x/t)$  et  $F_{i+1/2} = F(u_{i+1/2}(0))$ .

## Choix de $\Delta_i$

Notations :

$$\Delta_{i+\frac{1}{2}} = U_{i+1}^n - U_i^n, \Delta_{i-\frac{1}{2}} = U_i^n - U_{i-1}^n$$

1.

$$\Delta_i = \frac{1}{2}(1 + \omega)\Delta_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(1 + \omega)\Delta_{i+\frac{1}{2}}, \omega \in [-1, 1]$$

2.

$$\bar{\Delta}_i = \begin{cases} \max[0, \min(\beta\Delta_{i-1}, \Delta_{i+1}), \min(\Delta_{i-1}, \beta\Delta_{i+1})], & \Delta_{i+1} > 0 \\ \min[0, \max(\beta\Delta_{i-1}, \Delta_{i+1}), \max(\Delta_{i-1}, \beta\Delta_{i+1})], & \Delta_{i+1} < 0 \end{cases}$$

pour  $\beta = 1$  on trouve le limiteur de flux Minbee (ou minmod)

pour  $\beta = 2$  on trouve le limiteur de flux Superbee

3. Une autre possibilité est de trouver un limiteur  $\xi_i$  tel que  $\bar{\Delta}_i = \xi_i \Delta_i$  avec, par exemple

$$\bar{\Delta}_i = \sum_{k=1}^N \bar{\Delta}_i^k(\Delta_{i-1/2}^k, \Delta_{i+1/2}^k)$$

Cet choix amène à un TVD (Variation Diminishing Methods) région pour  $\xi(r)$  tel que :

$$\xi(r) = 0 \quad \text{si } r \leq 0, \quad 0 \leq \xi(r) \leq \min(\xi^L(r), \xi^R(r)) \quad \text{si } r > 0$$

$$\bar{\Delta}_i = \begin{cases} \xi^L(r) = \frac{2\beta_{i-1/2}r}{1-\omega+(1+\omega)r} \\ \xi^R(r) = \frac{2\beta_{i+1/2}}{1-\omega+(1+\omega)r} \\ r = \frac{\Delta_{i-1/2}}{\Delta_{i+1/2}} \end{cases}$$

et  $\beta_{i-1/2} = \frac{2}{1+c}$ ,  $\beta_{i+1/2} = \frac{2}{1-c}$  où  $c$  est le nombre de Courant pour la seule onde présente. Exemple. Le limiteur van Albada :

$$\xi_{va}(r) = \begin{cases} 0, & r \leq 0 \\ \min(\frac{r(1+r)}{1+r^2}, \xi_R(r)), & r \geq 0 \end{cases}$$

## 3.6 Conditions aux limites

$$U_t + F(U)_x = 0 \quad (4)$$

La résolution du système linéaire associé nécessite la définition des valeurs de 'U' sur les frontières du domaine discret.

Les conditions aux limites posées sur le bord du domaine sont de trois types :

- conditions aux limites transmissibles
- conditions aux limites réflexives
- conditions aux limites non-réflexives

En 1D on veut résoudre l'équation (4) sur la région  $a \leq x \leq b$ . Pour avoir un problème bien posé on doit connaître les conditions initiales sur la région  $a \leq x \leq b$  ainsi que les conditions en temps en  $x = a, b$ . Une difficulté apparaît car l'équation (4) contient en général des valeurs propres des deux signes sur les limites ce qui implique une propagation d'onde vers et envers le domaine. Ça devient donc plus convenable de travailler avec la

forme caractéristique sur les limites pour considérer chaque onde séparée.

Les ondes sortantes ( $\lambda_i \leq 0$  en  $x = a$  et  $\lambda_i \geq 0$  en  $x = b$ ) dépendent seulement de l'information sur et entre limites et sont faciles à calculer et stables.

Les ondes entrantes ( $\lambda_i > 0$  en  $x = a$  et  $\lambda_i < 0$  en  $x = b$ ) dépendent des valeurs extérieures aux limites.

### Conditions aux limites transmissibles en 1D

La condition de transmissibilité revient à dire que la valeur  $U$  aux limites prend la valeur de la cellule voisine

$$U_{cl} = U_i$$

### Conditions aux limites réflexives en 1D

$$u_{cl}.n = -u_i.n$$

avec  $u_i$  la vitesse sur la cellule voisine avec la condition limite et  $n$  la normale extérieure.

### Conditions aux limites non -réflexives en 1D

Pour les problèmes qui dépendent du temps est recommandable l'utilisation des conditions aux limites non-réflexives ou de radiation car elles ont la propriété de minimiser la réflexion des ondes sortantes. La condition de non-réflexivité de Hedstrom est : l'amplitude des ondes entrantes est constante en temps sur les limites.

Soit  $l_i$  et  $r_i$  les vecteurs de valeurs propres à gauche, respectivement à droite de A, et  $\lambda_i$  les valeurs propres de A :

$$l_i A = \lambda_i l_i, \quad A r_i = \lambda_i r_i$$

On se ramène à résoudre l'équation :

$$(l_i \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbb{L}_i)|_{x=a,b} = 0$$

avec

$$\mathbb{L}_i = \begin{cases} \lambda_i l_i \frac{\partial U}{\partial x} & \text{si onde sortante} \\ 0 & \text{si onde entrante} \end{cases}$$

Dans le cas où le domaine est divisé en plusieurs sous-domaines, les conditions aux raccords sont de type Dirichlet ou Robin.

## 4 Discrétisation temporelle

De même que l'espace physique l'axe des temps doit être discrétisé. On découpe l'axe des temps en intervalles  $\Delta t$  que nous supposons réguliers pour intégrer numériquement les équations d'Euler. Le champ est calculé à des instants  $t^n = n\Delta t$ .

La discrétisation en temps des équations peut se faire de manière implicite ou explicite. Si les flux sont exprimés en  $t^n$ , la méthode d'intégration est dite explicite, et elle se caractérise par la rapidité de l'intégration des équations sur un pas de temps. Pour

assurer la stabilité de l'intégration le pas de temps peut prendre de très petites valeurs, car il doit vérifier la condition de Courant-Friedricks-Lewy :

$$\Delta t \leq CFL \min_j \left( \frac{\Delta x_j}{|U_j| + a}, \frac{\Delta x_j^2 Re}{4} \right)$$

où le nombre de CFL est proche de l'unité, mais sa valeur peut changer en fonction du schéma explicite utilisé.

Si les flux sont estimés en  $t^{n+1}$ , la méthode d'intégration est dite implicite. La discrétisation implicite permet de s'affranchir des conditions de stabilité de type CFL mais conduit à la résolution de systèmes algébriques à chaque pas de temps, ce qui peut se révéler très coûteux en temps de calcul.

## 4.1 Schéma d'Euler Explicite

La méthode d'Euler est une méthode numérique élémentaire de résolution d'équations différentielles du premier ordre, de la forme

$$\dot{y} = f(t, y)$$

Étant donnée une condition initiale  $(t_0, y_0)$ , la méthode fournit pour tout point une suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'approximations de la valeur  $y$  que prend, lorsqu'elle existe, la solution de l'équation qui correspond à cette condition initiale. En utilisant l'approximation de la dérivée

$$\dot{y}_i \simeq \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i}$$

le schéma d'Euler explicite peut s'écrire par la relation de récurrence

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f(t_n, y_n)$$

## 4.2 Méthode de Runge Kutta

Considérons le problème suivant :

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

La méthode Runge Kutta d'ordre 2 du point milieu est une composition de la méthode d'Euler. Elle consiste à estimer la dérivée au milieu du pas d'intégration :

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} f(t, y_n)$$

$$\dot{y}_{n+\frac{1}{2}} = f\left(t + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}\right)$$

et à refaire le pas d'intégration complet à partir de cette estimation :

$$y_{n+1} = y_n + h \dot{y}_{n+\frac{1}{2}}$$

### 4.3 Méthodes implicites des différentiation rétrogrades

Les méthodes des différentiation rétrogrades sont des méthodes numériques d'intégration basées sur les formules de différentiation rétrogrades (BDF or Backward Differentiation Formulas). Les BDF sont des formules qui donnent une approximation d'une variable dérivée en temps  $t_{n+1}$  à partir de la valeur de sa fonction en temps  $t_n$ . Elles sont des méthodes multi-pas qui utilisent les valeurs approchées  $u_n, u_{n-1}, \dots$  de  $u_n$ .

Une fois que les équations ont été discrétisées sur le domaine spatiale, la solution du problème s'écrit sous la forme d'un vecteur dépendant du temps  $U_h(t)$ , dont les composantes sont les solutions approchées à chaque nœud du domaine discrétisé. Le système semi-discrétisé s'écrit sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires en temps :

$$\frac{dU_h}{dt} + \psi(U_h) = 0$$

où la  $i$ -ème composante de  $\psi$ ,  $\psi_i$  est le flux total prenant en compte les termes convectifs et diffusifs de  $U_h$  pris sur la frontière de la cellule  $i$ , divisé par le volume de la cellule. L'avancement en temps est réalisé grâce à un schéma implicite aux différences rétrogrades d'ordre 2 :

$$\alpha_{n+1}U^{(n+1)} + \alpha_n U^{(n)} + \alpha_{n-1}U^{(n-1)} + \Delta t^{(n)}\psi(U^{(n+1)}) = 0$$

où les coefficients  $\alpha_n$  s'expriment de la façon suivante :

$$\alpha_{n+1} = \frac{1 + 2\tau}{1 + \tau}, \alpha_n = -1 - \tau, \alpha_{n-1} = \frac{\tau^2}{1 + \tau}$$

$\Delta t^{(n)}$  est le pas de temps à la  $n$ -ième itération et

$$\tau = \frac{\Delta t^{(n)}}{\Delta t^{(n-1)}}$$

$$U_t + F(U)_x = 0 \tag{5}$$

Le système non-linéaire est ensuite linéarisé pour chaque nœud  $i$  de la manière suivante :

$$[\alpha_{n+1} + \Delta t^{(n)} \frac{d\psi_i}{dU_i}(U_i^{(n)})](U^{(n+1)} - U^{(n)}) = -\Delta t^{(n)}\psi(U_i^{(n)}) - \alpha_{n+1}U_i^{(n)} - \alpha_n U_i^{(n)} - \alpha_{n-1}U_i^{(n-1)}$$

Les jacobiens  $\frac{d\psi_i}{dU_i}(U_i^{(n)})$  sont calculés avec un schéma d'ordre 2 pour les flux convectifs. Dans le cas particulier où  $\tau = 0$  la méthode BDF devient une méthode d'Euler Implicite.

#### 4.3.1 Méthode de Newton

Dans cette section nous décrivons l'algorithme de Newton inexact, combiné avec un solveur linéaire et une approximation du Jacobien. À cause des contraintes mémoires nous utilisons des algorithmes sans stockage des matrices. Lorsque le jacobien n'intervient qu'au travers des produits matrices-vecteurs, chaque produit peut être approché par un schéma aux différences finies. Soit

$$F(u) = \Delta t^{(n)}\psi(U_i^{(n)}) + \alpha_{n+1}U_i^{(n)} + \alpha_n U_i^{(n)} + \alpha_{n-1}U_i^{(n-1)}$$

et

$$J = \frac{\partial F}{\partial u} = \alpha_{n+1} + \Delta t^{(n)} \frac{d\psi_i}{dU_i}(U_i^{(n)})$$

Le système à résoudre devient :

$$J\delta u = -F(u) \tag{6}$$

### Algorithme

Soit  $\eta$  la tolérance relative pour la norme du résidu ;

convergence := false ;

choisir  $u_0$  :

$i := 0$  ;

jusqu'à convergence de Newton

- résoudre de manière approchée  $J\delta u = -F(u)$
- appelle Linéaire-Solveur(J,F, $\delta_i$ )
- $u_{i+1} := u_i + \delta_i$
- si  $\|F(u_{i+1})\| < \eta\|F(u_0)\|$  alors
- convergence := true
- sinon
- $i := i+1$
- fin si

fin

**Backtracking** Une fois l'algorithme inexact de Newton mis en œuvre on se pose des questions concernant l'efficacité de cet algorithme, comment choisir le critère d'arrêt aussi que la globalisation de la méthode de façon compatible avec le critère d'arrêt. Pour cela on ajoute une stratégie de backtracking qui est basée sur une méthode de convergence globale pour un problème de la forme  $\min_{u \in \mathbb{R}^n} M(u)$ , où M est choisi tel que le minimum global de M est un zéro de F.

Dans ce cas si p est une direction de descente dans  $\mathbb{R}^n$   $u_{k+1}$  à la forme  $u_{k+1} = u_k + \lambda p$ , où  $0 < \lambda < 1$  est tel que  $M(u_k + \lambda p) < M(u_k)$ . L'existence de p est assuré si p est une direction de descente pour M à  $u_k$ .

Si  $M = \|F\|^2/2$  ou  $M = \|F\|$ , le vecteur p est une direction de descente pour M à  $u_k$  si  $\|F'(u_k)p + F(u_k)\| < \|F(u_k)\|$ . Donc on a que  $\delta u_k$  est une direction de descente pour M. Pour assurer la convergence de  $\{u_k\}$  vers un minimum de M à chaque itération on a besoin d'une décroissance suffisante de M.

Pour cela on choisit  $\lambda$  par une approche backtracking. La convention la plus souvent utilisée est d'initialiser  $\lambda$  a 1 et d'exécuter un "backtrack", c'est à dire réduire  $\lambda$  jusqu'à ce que M soit suffisamment petit.

### Algorithme backtracking

\*Soit  $M(u) = \frac{1}{2}F(u)^t F(u)$  et  $\delta u$  une direction de descente en u

\*cet algorithme calcule un réel  $\lambda$  satisfaisant  $M(u + \lambda \delta u) < M(u)$

choisir  $\mu \in (0, \frac{1}{2})$

$\lambda := 1$ .

while  $M(u + \lambda \delta u) > M(u) + \mu \lambda F(u)^t J(u) \delta u$  do

-  $\lambda := \rho\lambda$  avec  $\rho \in (0, 1)$   
 end do

### 4.3.2 Méthodes de résolution linéaires

Après plusieurs transformations, on se ramène à résoudre un système linéaire sous la forme :

$$A\Delta U = b$$

Notons  $x = \Delta U$ . Supposons qu'on peut écrire la matrice inversible  $A$  sous la forme d'une décomposition :

$$A = (\mathcal{L} + \mathcal{D} + \mathcal{U})$$

#### 1. Gauss-Seidel

On pose  $M = \mathcal{L} + \mathcal{D}$ . Puisque  $\mathcal{D}$  ne contient que des éléments non nuls par hypothèse,  $\det M \neq 0$  donc  $M$  est inversible. De plus  $M$  est, par construction, triangulaire inférieure, donc aisément inversible. On obtient ainsi une méthode itérative appelée méthode itérative de Gauss-Seidel par points, et qui s'écrit en notation matricielle :

$$(\mathcal{L} + \mathcal{D})x_{k+1} = -\mathcal{U}x_k + b, \quad k \in \mathbb{N}$$

soit encore

$$x_{k+1} = -(\mathcal{L} + \mathcal{D})^{-1}\mathcal{U}x_k + (\mathcal{L} + \mathcal{D})^{-1}b$$

La matrice  $(\mathcal{L} + \mathcal{D})^{-1}\mathcal{U}$  est appelée matrice de Gauss-Seidel par points.

Un des avantages de cette méthode est qu'il suffit de conserver un seul vecteur en mémoire. L'algorithme de Gauss-Seidel est un algorithme apparenté à la méthode de décomposition multiplicateur de Schwarz.

#### 2. Méthode de relaxation

On garde la même décomposition de  $A$ .

La méthode de relaxation consiste à calculer une succession de solutions approchées du système exact suivant :

$$(\mathcal{L} + \mathcal{D} + \mathcal{U})x = -R$$

On considère une méthode de relaxation qui parcourt le domaine en aval et en amont :

$$(\mathcal{L} + \mathcal{D})x^{p+\frac{1}{2}} = -R - \mathcal{U}x^p$$

$$(\mathcal{D} + \mathcal{U})x^{p+1} = -R - \mathcal{L}x^{p+\frac{1}{2}}$$

où  $p$  est le nombre de cycles de relaxation. Le choix du nombre de cycles de relaxation conduit vers une vitesse de convergence satisfaisante. La valeur 2 est un bon choix.

Pour une solution initiale nulle on a :

$$\Delta^{p=0} = 0$$

$$(\mathcal{L} + \mathcal{D})x^{p=\frac{1}{2}} = -R$$

$$(\mathcal{D} + \mathcal{U})x^{p=1} = -R - \mathcal{L}x^{p=\frac{1}{2}}$$

d'où

$$\begin{aligned}(\mathcal{D} + \mathcal{U})x^{p=1} &= \mathcal{D}x^{p=\frac{1}{2}} \\ (\mathcal{L} + \mathcal{D})D^{-1}(\mathcal{D} + \mathcal{U})x^{p=1} &= -R\end{aligned}$$

Un cycle de la méthode de relaxation avec l'initialisation nulle est équivalent avec un schéma implicite LDU.

Dans le cas 1D la solution résultante est la solution exacte.

### 3. GMRES

La méthode GMRES ou la généralisation de la Méthode de Minimisation du Résidu est une méthode de projection basée sur la projection de la solution approchée sur  $K_n$  orthogonalement à  $L = AK_n$ , où  $K_n$  est le n-ième sous-espace de Krylov avec  $v_1 = r_0/\|r_0\|$ . GMRES donne une approximation de la solution exacte de  $Ax = b$  par le vecteur  $x_n \in K_n$  qui minimise la norme du résidu  $\|Ax_n - b\|$ .

La solution approchée par GMRES est le vecteur unique de  $x_0 + K_n$  qui minimise  $J(y) = \|b - Ay\|_2$ . Comme d'autres méthodes itératives, GMRES est souvent combiné avec des méthodes de preconditionnement pour accroître la vitesse de convergence. Dans cet étude on a analysé et programmé l'algorithme GMRES flexible. Cet algorithme est basé sur l'algorithme GMRES preconditionné à droite.

L'idée est de résoudre :

$$AM^{-1}u = b, u = Mx$$

où M représente le preconditionneur, une matrice symétrique définie positive qui approche A. Contrairement au cas GMRES preconditionné à droite cette fois le preconditionneur peut changer à chaque pas : L'algorithme est le suivant :

- définie  $r_0 = b - Ax_0$ ,  $\beta = \|r_0\|_2$  et  $v_1 = r_0/\beta$
- pour j allant de 1 à n faire :
  - $z_j := M_j^{-1}v_j$
  - $w := Az_j$
  - pour i allant de 1 à j faire :
    - $h_{i,j} := (w, v_i)$
    - $w := w - h_{i,j}v_i$
  - fin pour
  - $h_{j+1,j} = \|w\|_2$  et  $v_{j+1} = w/h_{j+1,j}$
  - $Z_n := [z_1, \dots, z_n]$ .  $H_m = \{h_{i,j}\}_{1 \leq i \leq j+1; 1 \leq j \leq m}$
  - fin pour
  - $y_n = \operatorname{argmin}_y \|\beta e_1 - H_m y\|_2$ ,  $x_n = x_0 + Z_n y_n$
  - si convient arrêter
  - sinon  $x_0 = x_n$  et on reprend l'algorithme

L'algorithme GMRES est très sensible à la condition de CFL et il est plus coûteux, donc on a vite abandonné cette méthode.

## 5 Méthode de Schwarz

Beaucoup de problèmes d'ingénierie peuvent être formulés comme des problèmes aux limites sur des géométries complexes. Dans leur forme originale ces problèmes sont coûteux ou difficiles à résoudre et ne sont pas particulièrement adaptés au parallélisme.

Pour enlever ce problème H.A. Schwarz (1870) a eu l'idée de décomposer le domaine en sous-domaines avec recouvrement. Cette décomposition ayant comme but la réduction de la dimension et la simplification de la forme du problème.

Soit  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  une partition du domaine  $\Omega$  tel que  $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ .

On note  $\Gamma_3^1 = \partial\Omega_1 \cap \Omega_2$  et  $\Gamma_3^2 = \partial\Omega_2 \cap \Omega_1$  les bords respectifs de  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  intersectant avec le domaine opposé.

Les maillages utilisés sont de deux types : maillages coïncidents et maillages non-coïncidents non conformes.

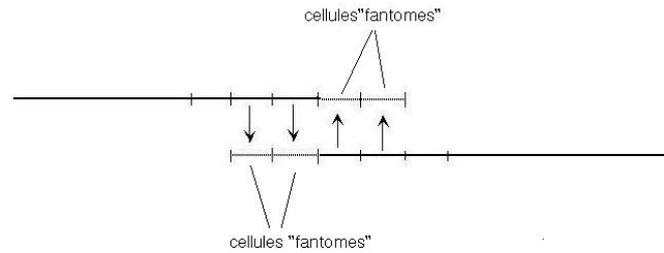


FIGURE 2 – Maillages coïncidents

Dans le cas de maillages coïncidents, les cellules fantômes reçoivent l'information dont on a besoin à partir des cellules internes du deuxième domaine.

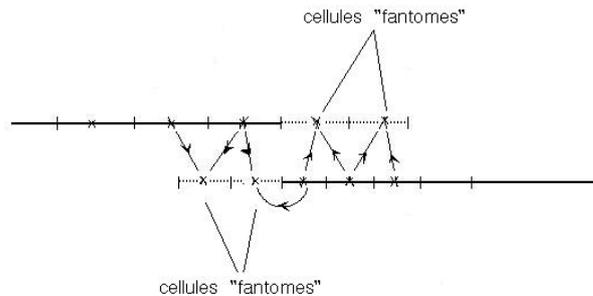


FIGURE 3 – Maillages non-coïncidents

Dans le cas de maillages non-coïncidents, les valeurs des cellules fantômes sont trouvées par interpolation linéaire.

## 5.1 Algorithme de Schwarz alterné

L'idée est d'utiliser un algorithme de point fixe où, à chaque itération, on met à jour des conditions de Dirichlet sur  $\Gamma_3^1$  et  $\Gamma_3^2$  en prenant la trace de la solution du domaine opposé à l'itération précédente :

1. Choisir les solutions initiales pour chaque sous-domaine
2. Pour  $k = 1, 2, \dots$ 
  - Résoudre

$$\begin{cases} Lu_1^k = f \text{ sur } \Omega_1 \\ u_1^k = g \text{ sur } \partial\Omega_1 \\ u_1^k = u_2^{k-1} \text{ sur } \Gamma_3^1 \end{cases}$$

- Résoudre

$$\begin{cases} Lu_2^k = f \text{ sur } \Omega_2 \\ u_2^k = g \text{ sur } \partial\Omega_2 \\ u_2^k = u_1^k \text{ sur } \Gamma_3^2 \end{cases}$$

Avec condition limite de Robin :

1. Choisir les solutions initiales pour chaque sous-domaine
2. Pour  $k = 1, 2, \dots$ 
  - Résoudre

$$\begin{cases} Lu_1^k = f \text{ sur } \Omega_1 \\ \frac{\partial u_1^k}{\partial n_1} + \lambda_1 u_1^k = g \text{ sur } \partial\Omega_1 \\ \frac{\partial u_1^k}{\partial n_1} + \lambda_1 u_1^k = \frac{\partial u_2^{k-1}}{\partial n_1} + \lambda_1 u_2^{k-1} \text{ sur } \Gamma_3^1 \end{cases}$$

- Résoudre

$$\begin{cases} Lu_2^k = f \text{ sur } \Omega_2 \\ \frac{\partial u_2^k}{\partial n_2} + \lambda_2 u_2^k = g \text{ sur } \partial\Omega_2 \\ \frac{\partial u_2^k}{\partial n_2} + \lambda_2 u_2^k = \frac{\partial u_1^k}{\partial n_2} + \lambda_2 u_1^k \text{ sur } \Gamma_3^2 \end{cases}$$

## 5.2 Algorithme de Schwarz additif

L'algorithme de Schwarz additif avec les conditions aux limites de Dirichlet est le suivant :

1. Choisir les solutions initiales pour chaque sous-domaine
2. Pour  $k = 1, 2, \dots$ 
  - Résoudre

$$\begin{cases} Lu_1^k = f \text{ sur } \Omega_1 \\ u_1^k = g \text{ sur } \partial\Omega_1 \\ u_1^k = u_2^{k-1} \text{ sur } \Gamma_3^1 \end{cases}$$

- Résoudre

$$\begin{cases} Lu_2^k = f \text{ sur } \Omega_2 \\ u_2^k = g \text{ sur } \partial\Omega_2 \\ u_2^k = u_1^{k-1} \text{ sur } \Gamma_3^2 \end{cases}$$

Outre une parallélisation aisée, on peut généraliser cette méthode à plus de deux domaines :

1. Choisir les solutions initiales pour chaque sous-domaine

2. Pour  $k = 1, 2, \dots$ 
  - Résoudre pour  $i=1, \dots$

$$\begin{cases} Lu_i^k = f \text{ sur } \Omega_i \\ u_i^k = g \text{ sur } \partial\Omega_i \\ u_i^k = u_{i-1}^{k-1} \text{ sur } \Gamma_{left}^i \\ u_i^k = u_{i+1}^{k-1} \text{ sur } \Gamma_{right}^i \end{cases}$$

### 5.3 Méthode de Newton-Schwarz

Dans le cas de plusieurs sous-domaines on étudie les raccords entre sous-domaines. Dans le but d'obtenir une meilleure convergence dans un temps plus court on a décidé d'essayer deux nouvelles méthodes en imbriquant la méthode de Schwarz avec la méthode de Newton. Une étude similaire est entreprise par Florian Haeberlein<sup>1</sup>, Laurence Halpern et Anthony Michel<sup>1</sup> pour résoudre des problèmes non-linéaires dépendants du temps.

#### Algorithme

- Soit  $\eta$  la tolérance relative pour la norme du résidu ;  
 Soit  $\epsilon$  la tolérance pour un saut entre deux sous-domaines ;  
 convergence := false ;  
 choisir  $u_0$  ;  
 $i := 0$  ;  
 jusqu'à convergence de Newton :  
 - tant que saut de la solution aux raccords  $> \epsilon$  :  
 - pour chaque sous-domaine :  
 - résoudre de manière approchée  $J\delta u = -F(u)$   
 - appelle Linéaire-Solveur(J,F, $\delta_i$ )  
 - calcul saut  $\delta u$   
 - échange données (Dirichlet ou Robin) aux raccords pour  $\delta u$   
 - fin tant que  
 -  $u_{i+1} := u_i + \delta_i$   
 - si  $\|F(u_{i+1})\| < \eta \|F(u_0)\|$  alors  
 - convergence := true  
 - sinon  
 -  $i := i+1$   
 - fin si  
 - mettre à jour la solution  $u$

### 5.4 Méthode de Schwarz-Newton

#### Algorithme

- Soit  $\eta$  la tolérance relative pour la norme du résidu ;  
 Soit  $\epsilon$  la tolérance pour un saut entre deux sous-domaines ;  
 saut = 1e+6 ;  
 tant que saut de la solution aux raccords  $> \epsilon$  :  
 - pour chaque sous-domaine, algorithme de Newton local :  
 - convergence := false ;

- choisir  $u_0$  ;
- $i := 0$  ;
- jusqu'à convergence de Newton :
  - résoudre de manière approchée  $J\delta u = -F(u)$
  - appelle Linéaire-Solveur(J,F, $\delta_i$ )
  - $u_{i+1} := u_i + \delta_i$
  - si  $\|F(u_{i+1})\| < \eta \|F(u_0)\|$  alors
  - convergence := true
  - sinon
  - $i := i+1$
  - fin si
- fin Newton local
- calcul saut u
- échange données (Dirichlet ou Robin) aux raccords pour u

## 6 Résultats numériques

L'implémentation des différentes méthodes est faite à l'aide des logiciels C et Python.

Dans le but d'améliorer la manipulation des fichiers de données numériques de simulation de mécanique des fluides on introduit le format de données générique CGNS ou CFD (Computational Fluid Dynamics) General Notation System , c'est à dire qu'on définit une structure de données Python sous la forme d'un arbre CGNS.

L'arbre est composé de nœuds, chaque nœud pouvant avoir des fils qui peuvent être aussi des nœuds.

La structure nœud est une séquence python (liste) qui contient quatre entrées : nom, valeur, liste contenant un ou plusieurs fils,type.

Nom	string
Valeur	numpy array
Fils	liste de noeuds
Type	string

Exemple :

```
tree = ['ShockTube', timeOut, zone,'CGNSBase.t']
zone = ['Tube',np.array([[6,1,1],[5,1,1]]),[grid,boundaries,initSol,GridConnectivity], 'Zone.t']
```

Pour tout test présenté on résout le système d'équations d'Euler en 1D. On choisit de montrer des résultats dans le cas d'un maillage divisé en plusieurs maillages coïncidents. L'utilisation de maillages non- coïncidents nous ramène à des solutions similaires.

Dans ce chapitre plusieurs cas tests sont illustrés pour comparer l'efficacité de méthodes implémentées. Pour valider nos méthodes on commence par des tests dont on connaît la solution exacte. On compare les méthodes Euler Explicite d'ordre 1 , Runge Kutta d'ordre 2 avec les méthodes BDF d'ordre 2 sous les différentes formes : avec  $p * q$  itérations de Newton,  $p$  itérations de Newton et  $q$  itérations de Schwarz et aussi avec la solution exacte qu'on connaît.

Pour tout test présenté on résout le système d'équations (1) en 1D.

Dans le cas de la méthode BDF le système linéaire est résolu par la méthode linéaire de relaxation LU qui est une méthode exacte en 1D. Pour avoir la même performance avec l'algorithme Gauss-Seidel plusieurs itérations sont nécessaires et donc on va comparer leur efficacité dans le cas 2D qui fait l'objet de la suite immédiate de ce stage.

## 6.1 Cas d'une Gaussienne

Le premier test est le cas d'une fonction gaussienne dont on translate à gauche où à droite. Les données sont :

- Fonction pour le tourbillon :
- $dT(r) = -(\gamma - 1)\beta^2 e^{\frac{1-r^2}{8\gamma\pi^2}}$
- $\beta = 5$
- État infini :
- $T_{inf} = 1, U_{inf} = 1, V_{inf} = 0, W_{inf} = 0$
- $\rho = (T_{inf} + dT(r))^{\frac{1}{\gamma-1}}$
- Le taux du chauffage spécifique  $\gamma = 1.4$ .
- la pression et la vitesse sont constantes  $p = \gamma, u = U_{inf}$

Le domaine de définition est  $[0, 1]$  et la gaussienne est centrée en 0.5. Au temps final  $T = 1.00$  la courbe gaussienne finit un tour complet et donc on peut comparer la solution approchée trouvée avec la solution initiale.

Dans un premier cas on a choisi de résoudre les équations d'Euler avec un flux de Van Leer qui est d'ordre 1 et on compare la solution de la méthode de Euler Explicite avec les méthodes BDF d'ordre 1 équivalentes à une méthode d'Euler Implicite.

- Conditions limites de Dirichlet
- Pour les méthodes BDF on fixe  $p = 2, q = 2$
- Le domaine  $[0, 1]$  est décomposé en  $N = 200$  cellules uniformément réparties.
- Le paramètre variable est  $n$ , le nombre de sous-domaines.

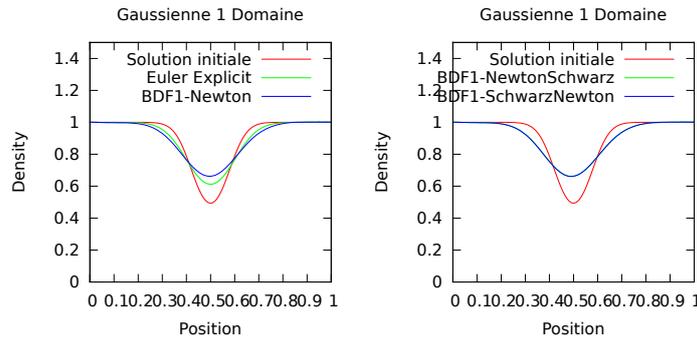


FIGURE 4 – Courbes de la Densité. Méthodes de résolution d'ordre 1 en espace et 1 en temps

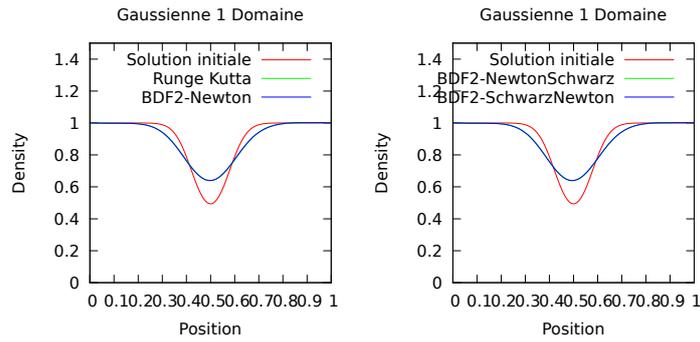


FIGURE 5 – Courbes de la Densité. Méthodes de résolution d’ordre 1 en espace et 2 en temps

On observe que la solution approchée dans le cas d’une méthode d’ordre 2 est plus précise qu’une méthode d’ordre 1 ce qui était attendu car on avance dans l’approximation de la dérivée. Comme on avait mentionné on peut observer que les méthodes explicites sont précises, mais elles sont plus sensibles au CFL. Pour passer à l’ordre 2 en espace on utilise un schéma MUSCL avec Van Leer.

Dans la suite on montre que des courbes obtenues par des méthodes d’ordre 2 en temps et 2 en espace.

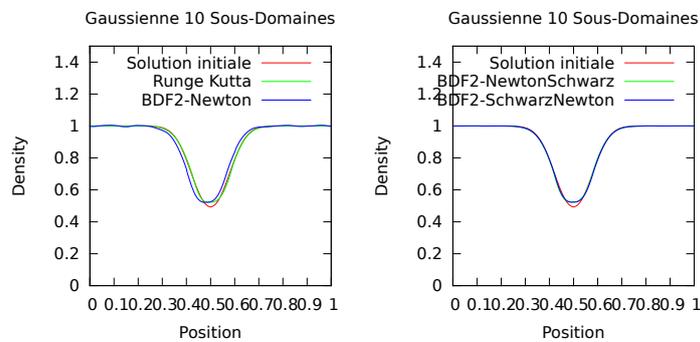


FIGURE 6 – Courbes de la Densité. Méthodes de résolution d’ordre 2 en espace et 2 en temps

Pour mieux observer l’importance des méthodes BDF dans l’analyse numérique, on agrandit la CFL à 1.2.

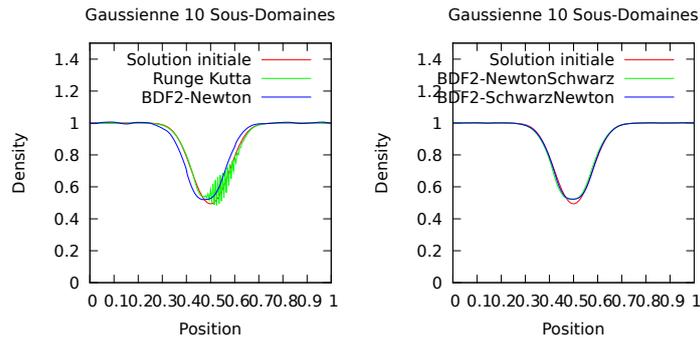


FIGURE 7 – Courbes de la Densité. CFL=1.2

Pour un ordre plus élevé, même pour une cfl de 0.9 on peut observer que les méthodes explicites ont des problèmes : on observe des oscillations autour du pique. Pour une cfl plus grand ( $> 1$ ) la solution explose. Cela ne se produit pas dans le cas d'une méthode implicite.

Une autre différence peut être observé au niveau de la figure 9 par exemple où on observe que la méthode BDF sans itérations de Schwarz présente certains dénivellations au niveaux de raccords; elles sont dues au fait qu'on arrête les cycles à un nombre fixé et donc on n'atteint pas toujours le seuil de convergence demandé.

Si on change les conditions aux limites de Dirichlet avec des conditions de Robin, on échange plus d'informations entre deux sous-domaines et on observe que les méthodes BDF avec  $p * q$  itérations de Newton ou Newton-Schwarz ne finissent pas un cycle de la gaussienne dans un temps  $t = 1$ , d'où une erreur plus considérable.

La méthode de Runge Kutta d'ordre 2 fournit une courbe de référence et sera toujours appliquée sur des sous-domaines liés par des conditions limites de Dirichlet.

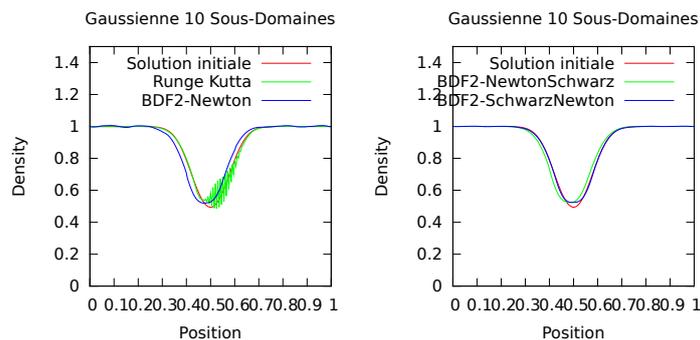


FIGURE 8 – Courbes de la Densité. CFL=1.2. Condition limite de Robin

## Calcul d'erreurs $L^2$

Calcul d'erreurs en fonction de nombre de sous-domaine

$N=200$  mailles ;

- Conditions aux limites de Dirichlet

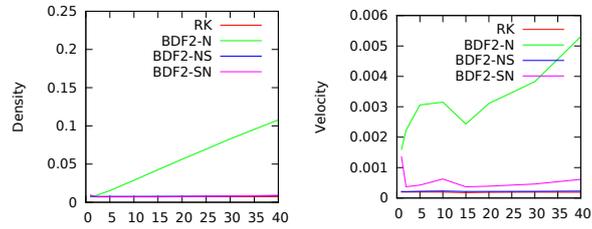


FIGURE 9 – Courbes d'erreur de la Densité. CFL=1.2

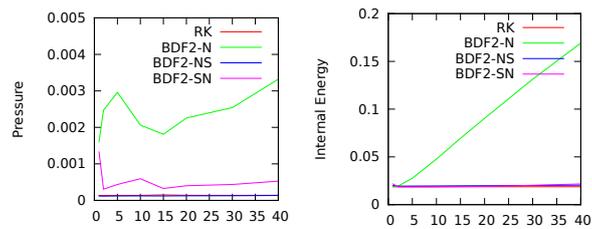


FIGURE 10 – Courbes d'erreur d'Énergie Interne. CFL=1.2

– Conditions aux limites de Robin

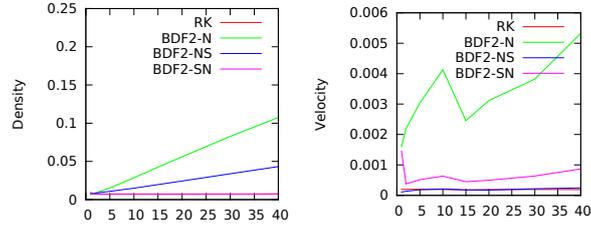


FIGURE 11 – Courbes d’erreur de la Densité. CFL=1.2. Condition limite de Robin

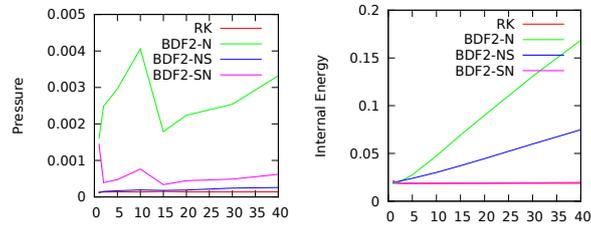


FIGURE 12 – Courbes d’erreur d’Énergie Interne. CFL=1.2. Condition limite de Robin

Calcul d’erreurs en fonction de la CFL

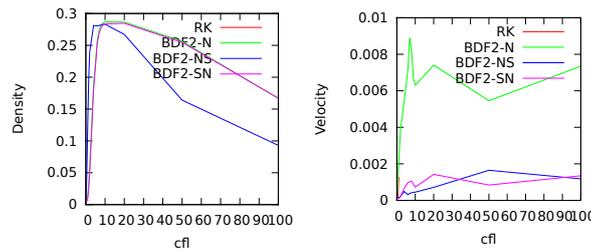


FIGURE 13 – Courbes d’erreur de la Densité. Condition limite de Robin

On observe que les méthodes BDF sont moins sensibles au CFL qui peut prendre de très grandes valeurs (100 sur la figure). Nous observons dans les courbes des erreurs  $L^2$  en fonction du nombre de sous-domaines que les erreurs des méthodes implicites sont plus élevées et aussi que l’erreur de la méthode BDF-Newton est beaucoup plus considérable, tandis que les autres méthodes BDF ont un comportement correct.

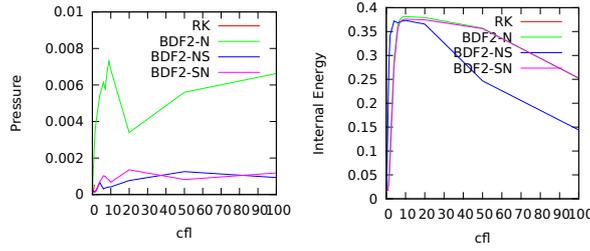


FIGURE 14 – Courbes d’erreur d’Énergie Interne. Condition limite de Robin

## 6.2 Cas d’une fonction sinusoïdale avec terme source

On cherche à résoudre le système des équations d’Euler suivant :

$$U_t + F(U)_x = S \quad (7)$$

où  $S$  est tel que

$$U = \begin{pmatrix} \sin(kx - \omega t) + c \\ \sin(kx - \omega t) + c \\ (\sin(kx - \omega t) + c)^2 \end{pmatrix}$$

est une solution exacte.

Les paramètres sont :

$$k = 2.0, \quad \omega = 0.5, \quad c = 4.0$$

On a choisi de représenter la solution pour un domaine de  $N = 200$  mailles, divisé en 10 sous-domaines entre lesquels on applique une condition limite de Robin.

Le schéma en espace est un schéma de MUSCL-Hancock créée avec l’aide d’un schéma Van-Leer.

Pour chaque méthode on compare le temps d’exécution ainsi que les erreurs relatives  $L^2$  :

- Méthodes BDF2 avec conditions aux limites de Dirichlet

Méthode	Runge Kutta	Euler Explicite	BDF2-Newton	BDF2-NS	BDF2-SN
tps (s)	2.8521	1.4389	71.2185	118.6035	81.6452

- Méthodes BDF2 avec conditions aux limites de Robin

Méthode	Runge Kutta	Euler Explicite	BDF2-Newton	BDF2-NS	BDF2-SN
tps (s)	2.8521	1.4389	72.7607	150.7196	84.4782

Méthode	BDF2-Newton	BDF2-NS	BDF2-SN	Euler Explicite	Runge Kutta
densité	0.00076758	0.00090295	0.0004809	0.0044567	0.00020345
vitesse	0.00042195	0.00062192	0.0005533	0.0063291	0.00032187
pression	0.00075176	0.00091928	0.00053458	0.0034518	0.00027637
énergie	0.00046472	0.00037721	0.00032226	0.0027237	0.00010173

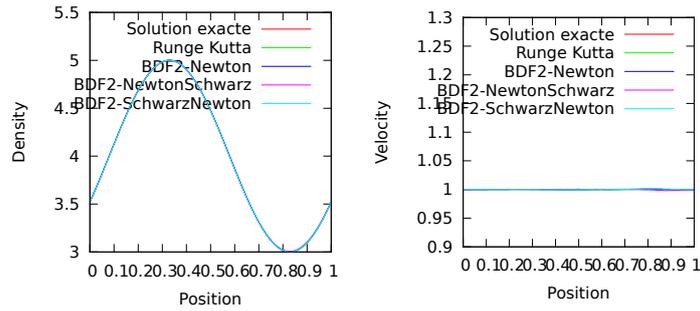


FIGURE 15 – A gauche : courbes de la Densité. A droite : courbe de la vitesse

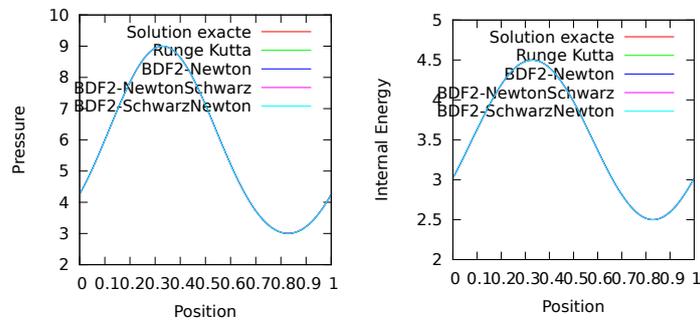


FIGURE 16 – A gauche : courbes de la pression. A droite : courbe de l'Énergie Interne

On observe que, comme attendu les méthodes explicites sont meilleures, avec un temps de résolution et une erreur relative plus petits. Entre les méthodes BDF, faisant une comparaison qualité, temps d'exécution et erreur relative on trouve que la méthode BDF-Schwarz Newton est la plus performante.

### 6.3 Écoulement dans un tube à choc

Une des configurations possibles pour la solution du problème de Riemann est de prendre des conditions initiales qui correspondent à l'écoulement dans un tube à choc où la discontinuité initiale entre les deux gaz est réalisée par un diaphragme localisé à  $x_0$ . Dans l'expérience, ce diaphragme est enlevé à l'instant  $t = 0$  et l'écoulement se développe ensuite. Pour cette configuration, on reprend les tests analysés par Eleuterio F. Toro dans [1].

L'objectif des tests présentés dans ce paragraphe est d'évaluer la performance de la méthode implicite de BDF d'ordre 2 sous les différentes formes que nous avons proposé pour traiter le problème du tube à choc. Nous allons également effectuer une comparaison

entre schémas FVS.

Comme détaillé dans Chap.2 on suppose pour les 2 tests suivants deux états constants :  $W_L = (\rho_L, u_L, p_L)^t$  et  $W_R = (\rho_R, u_R, p_R)^t$  séparées par une discontinuité en  $x = x_0$ . Les valeurs de  $W_L, W_R$  sont données par le tableau suivant :

Test	$\rho_L$	$u_L$	$p_L$	$\rho_R$	$u_R$	$p_R$
1	1.0	0.75	1.0	0.125	0.0	0.1
2	1.0	-2.0	0.4	1.0	2.0	0.4

Les solutions sont calculées à l'intérieur du domaine spatial  $[0, 1]$ . Les solutions numériques sont obtenues pour 200 nœuds. La valeur initiale choisie du nombre de CFL est de 0.9, les conditions aux limites sont transmissibles. Le fluide considéré ici est l'air donc le taux du chauffage spécifique est  $\gamma = 1.4$ .

Pour chaque test on choisit une position convenable pour  $x_0$ , la position de la discontinuité initiale et le temps final. On connaît aussi la solution exacte en résolvant un problème de Riemann. Les quantités résultantes comparées sont : la densité  $\rho$ , la vitesse  $u$ , la pression  $p$  et l'énergie interne spécifique  $e$ .

**Test 1.** Le test 1 est une version modifiée du test Sod ; la solution consiste dans une onde de choc à droite, une onde de contact et une onde de détente à gauche. L'approximation numérique d'une onde de choc fait apparaître une région de transition. Cette propagation de la solution peut paraître insatisfaisante, mais c'est une solution numérique typique ; en effet la plupart des méthodes d'ordre un ont une propagation plus large.

Une caractéristique satisfaisante est que pour la CFL choisie l'onde de choc est monotone, on n'a pas de fausses oscillations dans le voisinage du choc.

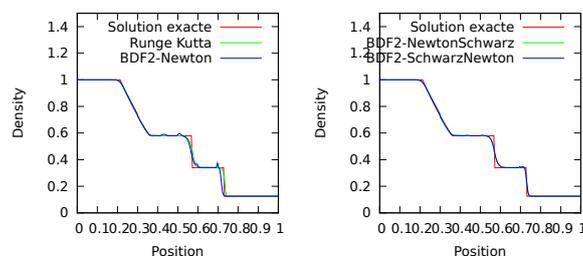


FIGURE 17 – Courbes de la Densité pour 10 Sous-domaines. Condition limite de Dirichlet

Dans les deux premiers cas en appliquant des conditions aux raccords de Robin on observe une amélioration de la solution. Dans le cas d'un écoulement dans un tube à choc les solutions sont moins bonnes, cela est due au fait que le problème n'est pas bien posé. Sur les figures suivantes on observe une région de transition avec quelques oscillations au niveau des raccords pour la méthode BDF-Newton, des oscillations qui sont corrigées avec les autres méthodes BDF.

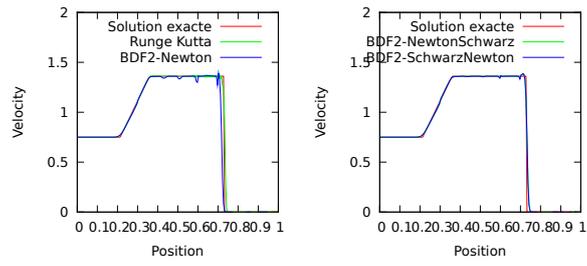


FIGURE 18 – Courbes de la Vitesse pour 10 Sous-domaines. Condition limite de Dirichlet

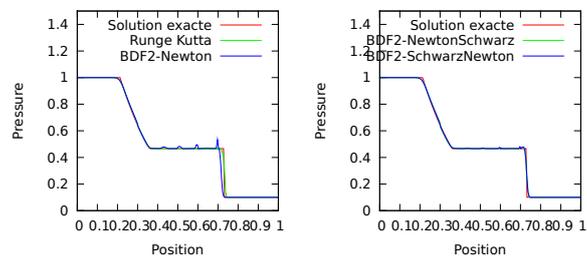


FIGURE 19 – Courbes de la Pression pour 10 Sous-domaines. Condition limite de Dirichlet

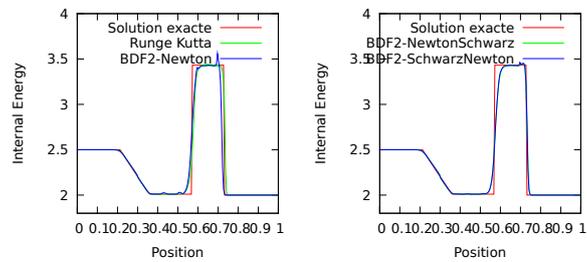


FIGURE 20 – Courbes d'Énergie Interne pour 10 Sous-domaines. Condition limite de Dirichlet

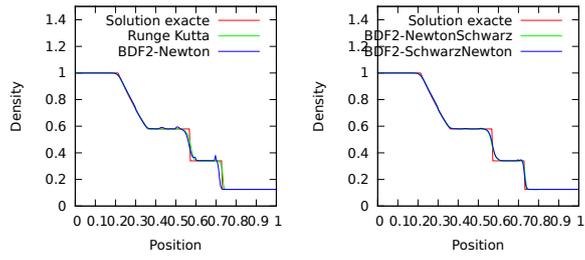


FIGURE 21 – Courbes de la Densité pour 10 Sous-domaines. Condition limite de Dirichlet

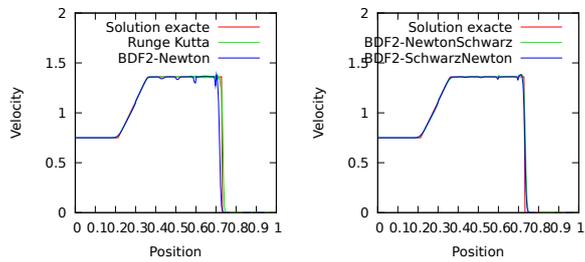


FIGURE 22 – Courbes de la Vitesse pour 10 Sous-domaines. Condition limite de Robin

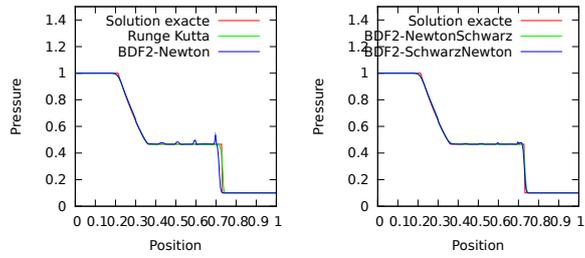


FIGURE 23 – Courbes de la Pression pour 10 Sous-domaines. Condition limite de Robin

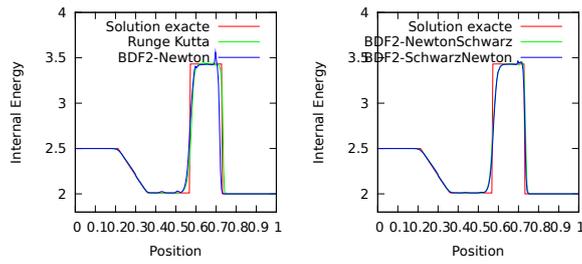


FIGURE 24 – Courbes d'Énergie Interne pour 10 sous-domaines. Condition limite de Robin

**Test 2.** La solution du test 2 consiste en deux ondes de détente symétriques et une onde de contact de vitesse zéro. On applique des conditions aux limites de Robin, le schéma est d'ordre 2 en espace MUSCL(AUSM) avec un limiteur minmod. Le schéma AUSM est plus sensible à la CFL. En faisant plusieurs tests on observe que la méthode BDF2-Newton n'est convergente que pour un CFL très petit  $< 0.2$ , la méthode BDF2-Schwarz-Newton est convergente pour un  $CFL < 0.6$  et que la méthode BDF2-Newton-Schwarz est la méthode la moins sensible au CFL dans ce cas, elle est convergente pour un  $CFL < 0.7$ . Le résultat est valable aussi pour un limiteur Van Albada. On observe ici l'importance d'un bon limiteur vu qu'avec les limiteurs Superbee la méthode ne converge pas.

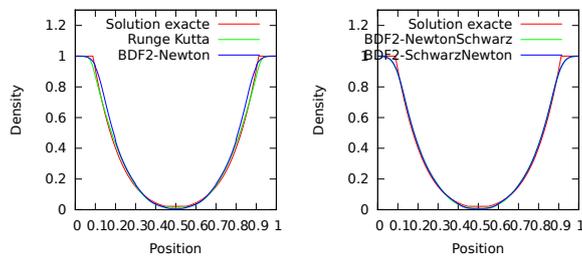


FIGURE 25 – Densité pour 10 Sous-domaines. Condition limite de Dirichlet

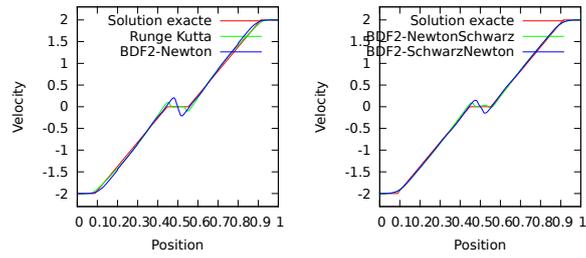


FIGURE 26 – Vitesse pour 10 Sous-domaines. Condition limite de Dirichlet

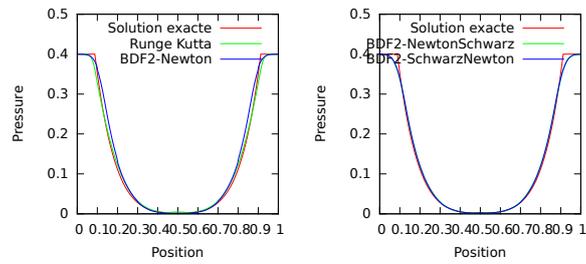


FIGURE 27 – Pression pour 10 Sous-domaines. Condition limite de Dirichlet

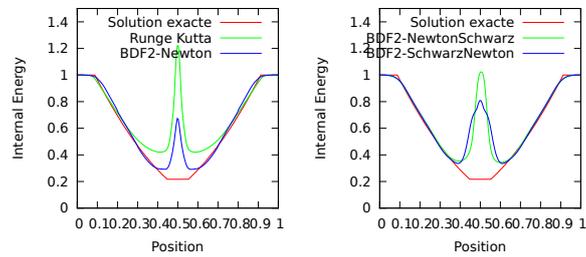


FIGURE 28 – Énergie pour 10 Sous-domaines. Condition limite de Dirichlet

On observe que les solutions approchées pour la densité, la vitesse et la pression convergent vers la solution exacte. Les courbes résultantes par les méthodes BDF-Newton Schwarz et BDF-Schwarz Newton sont plus proche de la solution exacte. Dans ce qui concerne la solution approchée de l'énergie interne on observe une pique à l'intérieur de la courbe solution exacte. Ce résultat est similaire avec le résultat trouvé de Eleuterio F. Toro en [1].

## 7 Conclusion

Durant ce stage, on a mis en œuvre un code python et C qui résout des méthodes mono dimensionnelles d'Euler par différentes méthodes. Des méthodes de Schwarz ont été introduites à l'intérieur des méthodes BDF pour les optimiser.

Les résultats étaient satisfaisant en terme de précision, de plus les méthodes implicites BDF-Newton et BDF-Schwarz Newton sont rapides et très efficaces pour traiter des problèmes de grande taille et permettent d'augmenter le CFL. La méthode BDF-Newton Schwarz s'est révélée comme une méthode très lente et pas suffisamment performante dans le cas mono-dimensionnelle.

La résolution des équations d'Euler en deux et trois dimensionnes et l'analyse des différentes méthodes proposées sont une suite logique de ce stage et font le sujet d'une thèse. L'introduction des conditions espace temps est aussi un étude intéressant à poursuivre.

## Références

- [1] Eleuterio F. Toro.  
Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Springer 1999
  
- [2] Kevin W. Thompson  
Time Dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems. Journal of computational physics 1987
  
- [3] Remi Choquet  
Étude de la méthode de Newton-GMRES. Application aux équations de Navier-Stokes compressibles. Thèse 1995