

ALSTOM HYDRO FRANCE  
Grenoble  
France  
<http://www.alstom.com/>



Yacine AZILAL  
Sup Galilée  
MACS 3  
Année 2011



## RAPPORT DE STAGE

---

# Incertitude sur la prédiction du couple hydraulique de ma- nœuvre de directrices de tur- bines hydrauliques

---

Maîtres de stage

EMMANUEL FLORES  
CLÉMENTINE PRIEUR  
LAURENCE VIRY

Enseignants

OLIVIER LAFITTE  
EMMANUEL AUDUSSE

Yacine AZILAL

15 septembre 2011



## Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers Piere LEROY pour m'avoir pris en stage, ainsi qu'à Emmanuel FLORES mon maître de stage pour son accueil chaleureux, sa confiance et ses conseils qui m'ont permis d'organiser mon travail d'un point de vue professionnel.

Je me dois également de remercier Clémentine PRIEUR, professeur à l'université Joseph Fourier, ainsi qu'à Laurence VIRY, Ingénieur CIMENT pour leur suivi et leurs précieuses remarques durant toutes les étapes de mon stage.

J'adresse aussi mes remerciements aux autres membres de l'équipe pour la bonne ambiance et les quelques conseils toujours bienvenus. Plus particulièrement à Joel MARIN pour ses réponses à mes questions, ainsi que les autres stagiaires du service qui m'ont accompagné durant ce stage.

C'est un réel plaisir de travailler dans une telle équipe.

## Note

◇  
« La  
connaiss-  
sance s'ac-  
quiert par l'expé-  
rience, tout le reste  
n'est que de l'infor-  
mation » - Al-  
bert Ein-  
stein  
◇

## Résumé

Les directrices sont des profils situés autour de la turbine (16 à 24 directrices) qui pivotent autour d'un axe de rotation et dont la manœuvre permet le réglage du fonctionnement des turbines hydrauliques par variation du débit dans la turbine. Le but est de prédire les efforts à appliquer afin de dimensionner l'organe de manœuvre (vérin Hydraulique). Plusieurs moyens de calculs sont à notre disposition, à savoir :

- soit une approche fluide parfait 2D (code interne) ;
- soit RANS (CFX,OpenFOAM) ;

Il s'agit de calculer l'écoulement pour plusieurs ouvertures et par intégration du champ de pression sur le profil d'en calculer le couple. Le but de l'étude est de déterminer les paramètres influençant les résultats qu'ils soient de nature hydraulique (débit d'entrée, angle d'entrée), géométrique (position de l'axe de rotation, définition du profil) ou bien numérique (fluide parfait, RANS, modèle de turbulence, loi de paroi). L'approche utilisée pour cette étude est une approche stochastique d'analyse de sensibilité globale.

# Sommaire

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Présentation du groupe ALSTOM</b>	<b>2</b>
1.1 Présentation générale . . . . .	2
1.2 Alstom Hydro France . . . . .	2
1.2.1 Le site d'Alstom Grenoble . . . . .	3
1.2.2 Les différents types de turbines hydrauliques . . . . .	3
<b>2 Présentation du sujet</b>	<b>8</b>
<b>3 Analyse de sensibilité globale</b>	<b>10</b>
3.1 Objectifs de l'analyse de sensibilité . . . . .	10
3.2 Méthodes d'analyse de sensibilité . . . . .	10
3.3 Indices de sensibilité . . . . .	11
3.3.1 Définitions . . . . .	11
3.3.2 Interprétation . . . . .	14
3.4 Estimation des indices de sensibilité . . . . .	15
3.4.1 Méthode de Monte-Carlo . . . . .	15
3.5 Métamodèle . . . . .	17
3.5.1 Méthode des polynômes de chaos . . . . .	18
3.5.2 Modèle additif . . . . .	22
<b>4 Applications</b>	<b>25</b>
4.1 Utilitaire . . . . .	25
4.2 Cas de fluide parfait (dbgr) . . . . .	27
4.2.1 DBGR . . . . .	27
4.2.2 La géométrie étudiée . . . . .	27
4.2.3 Les paramètres incertains . . . . .	28
4.2.4 Méthode de Monte-Carlo . . . . .	30
4.2.5 Méthode des polynômes de chaos . . . . .	31
4.2.6 Comparaison des deux méthodes . . . . .	33
4.2.7 Comparaison avec la mesure . . . . .	33
4.2.8 Etudes complémentaires (influence de l'angle de la directrice et du calage) . . . . .	35
4.2.9 Conclusion . . . . .	38
4.3 Cas de fluide visqueux (RANS, OpenFoam) . . . . .	39
4.3.1 OpenFoam . . . . .	39
4.3.2 La géométrie étudiée . . . . .	39
4.3.3 Les paramètres incertains . . . . .	39
4.3.4 Résultats . . . . .	40

4.3.5 Etude complémentaire . . . . .	41
<b>5 Conclusion</b>	<b>43</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>44</b>

## ANNEXES

<b>A</b>	<b>Application du modèle additif</b>	<b>1</b>
<b>B</b>	<b>Analyse de sensibilité par les scatterplots</b>	<b>3</b>
<b>C</b>	<b>Validation des fonctions Monte-Carlo et Polynômes de chaos</b>	<b>5</b>
<b>D</b>	<b>Modification du repère définissant l’axe du tourillon</b>	<b>8</b>
D.1	Méthode de Monte-Carlo . . . . .	10
D.2	Méthode des polynômes de chaos . . . . .	11
<b>E</b>	<b>Codes</b>	<b>13</b>
E.1	Monte-Carlo . . . . .	13
E.2	Polynômes de chaos . . . . .	15
E.3	Fonction appelant le logiciel fluide parfait (dbgr) . . . . .	19
E.4	Fonction appelant le logiciel fluide visqueux (OpenFOAM) . . . . .	25

# Table des figures

1.1	Structure du centre Technique de Grenoble . . . . .	3
1.2	Turbine Pelton . . . . .	4
1.3	Turbine Bulbe . . . . .	4
1.4	Turbine Kaplan . . . . .	5
1.5	Turbine pompe . . . . .	5
1.6	Turbine Francis . . . . .	6
1.7	Schéma d'une centrale hydraulique . . . . .	7
1.8	Turbine hydraulique . . . . .	7
2.1	Directrice et avant directrice . . . . .	8
2.2	Double grille . . . . .	9
4.1	Schéma générique d'une étude d'incertitude . . . . .	25
4.2	Organisation du code . . . . .	26
4.3	Double grille . . . . .	28
4.4	Angle d'entrée . . . . .	29
4.5	Variation de la position du tourillon . . . . .	29
4.6	Indices de sensibilités de premiers ordres et totaux par Monte-Carlo	30
4.7	Indices de sensibilités de premiers ordres et totaux par les polynômes de chaos . . . . .	32
4.8	Couple moyen et fourchette pour chaque ouverture . . . . .	34
4.9	Indices de sensibilité pour chaque ouverture . . . . .	35
4.10	Indices de sensibilité en introduisant l'angle d'ouverture pour $\gamma = 20^\circ$	36
4.11	Indices de sensibilité en introduisant le calage . . . . .	38
4.12	Indices de sensibilité (OpenFOAM) . . . . .	40
4.13	Indices de sensibilité (OpenFOAM) en rajouttant l'intensité et la longueur de turbulence . . . . .	42
A.1	Contribution partielle des variables avec les intervalles de confiances	2
B.1	Scatterplots . . . . .	3
C.1	Indice de premier ordre du paramètre $X_1$ . . . . .	6
C.2	Indice de premier ordre du paramètre $X_1$ . . . . .	6
C.3	Indice de premier ordre du paramètre $X_3$ . . . . .	6
D.1	Variation de la position du tourillon . . . . .	8
D.2	Directrice suivant l'axe OX . . . . .	9
D.3	Directrice suivant l'axe OY . . . . .	9
D.4	Indices de sensibilités de premiers ordres et totaux par Monte-Carlo	10



D.5	Indices de sensibilités de premiers ordres et totaux par les polynômes de chaos . . . . .	11
-----	----------------------------------------------------------------------------------------------	----

---

# Introduction

## Généralités

J'ai été amené à réaliser un stage de six mois pour découvrir le monde industriel, un domaine d'activité et appliquer mes acquis pédagogiques. Je l'ai effectué au sein d'ALSTOM HYDRO FRANCE du 15 mars au 16 septembre 2011.

Ce stage a été une opportunité pour moi de travailler dans une entreprise d'envergure internationale et m'a permis de travailler dans une équipe de recherche et développement.

C'est dans ce cadre que j'ai mis en pratique mes connaissances acquises ces dernières années, mais également appris à m'adapter, à m'organiser et optimiser.

## Cahier des charges

J'avais pour but de faire une analyse de sensibilité globale sur le couple hydraulique de manœuvre de directrices en mettant en place un outil pouvant être repris facilement et applicable à d'autres types de calculs CFD.

Le projet comprend deux parties : étudier les méthodes d'analyse de sensibilité et mettre en œuvre la méthode la plus adaptée à notre problématique. Ensuite l'appliquer sur le cas du fluide parfait en premier lieu et pour le cas fluide visqueux en second lieu et comparer les résultats de la simulation avec les résultats expérimentaux.

Pour ce qui est de l'utilisation de logiciel, nous nous sommes orientés vers les logiciels libres.

Après avoir présenté l'entreprise ALSTOM, nous nous intéresserons à quelques notions théoriques ainsi qu'aux applications réalisées. Enfin nous ferons le bilan de ce stage.

---

# 1 Présentation du groupe ALSTOM

## 1.1 Présentation générale



ALSTOM est un des leaders mondiaux dans les infrastructures d'énergie et de transport.

il est présent dans 70 pays avec un capital de €14.18 Mds et un chiffre d'affaires de €19.7 Mds. Le groupe ALSTOM compte deux métiers, le transport et l'énergie et trois secteurs :

- 🌐 **Alstom Power**, construction de centrales électrique et service auprès des exploitants de centrales, numéro un des équipements d'hydroélectricité (barrage d'Itaipu au Brésil, barrage des Trois Gorges en chine),
- 🌐 **Alstom Transport**, équipements et services de transport ferroviaire, l'entreprise détient le second rang mondial dans les transports ferroviaires urbains,
- 🌐 **Alstom Grid**, solution de transmission d'électricité,

## 1.2 Alstom Hydro France

Alstom Hydro France est une filiale d'Alstom Power. elle est spécialisée dans la conception et la réalisation de centrales hydroélectriques (conception et fabrication des turbines hydrauliques et mise en service et maintenance des centrales). Alstom Hydro France est le leader mondial des solutions et services hydroélectriques : plus de 25 % de la capacité de production installée, soit l'équivalent de 450GW de turbines et d'alternateurs. La filiale emploie aujourd'hui plus de 7000 personnes.



### 1.2.1 Le site d'Alstom Grenoble

Le site de Grenoble réunit 2 entités : l'unité de Grenoble (production) et le centre de technologie des turbines. Le centre de technologie possède quatre activités principales :

- La recherche et développement,
- La conception hydraulique,
- La conception mécanique,
- Le laboratoire et essais sur site.

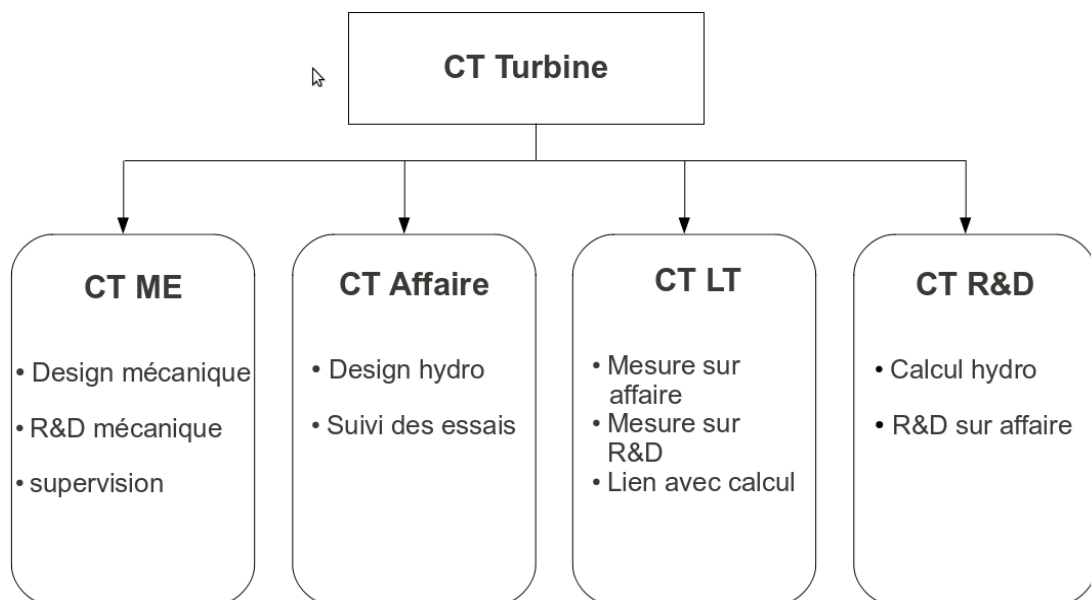


FIGURE 1.1 – Structure du centre Technique de Grenoble

Ce centre est spécialisé dans la partie turbine des projets hydroélectriques. Les différentes étapes de la conception mécanique et hydraulique y sont réalisées. Ce centre possède l'expertise dans le tracé des roues, la validation mécanique des aubes, les essais sur modèles réduits et prototypes.

Le service R&D est chargé de développer de nouveaux outils qui sont ensuite diffusés aux chargés d'affaires du centre technologique ainsi que dans les différentes unités d'Alstom et de faire des études spécifiques sur des phénomènes physiques complexes.

### 1.2.2 Les différents types de turbines hydrauliques

Le centre de technologie de Grenoble conçoit plusieurs types de turbines :

### Turbine Pelton

C'est une turbine à action, constituée d'une roue à augets mise en mouvement par un jet d'eau provenant d'un injecteur. Les turbines Pelton sont utilisées pour des hautes chutes d'eau (200 à 1800m).

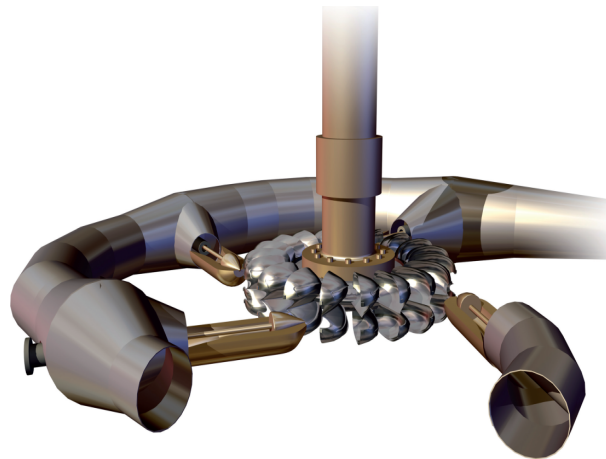


FIGURE 1.2 – Turbine Pelton

### Turbine Bulbe

Les turbines bulbe, sont utilisées pour des chutes basses ou moyennes (5 à 30m) et forts débits.

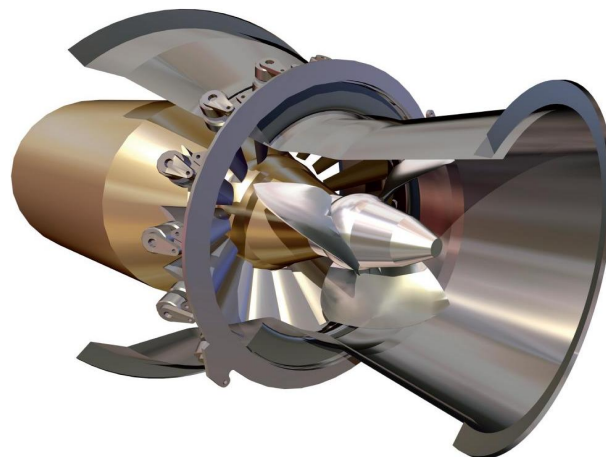


FIGURE 1.3 – Turbine Bulbe

### Turbine Kaplan

Les turbines Kaplan sont adaptées pour le turbinage des faibles chutes (15 à 50m), dont la roue est similaire à une hélice de bateau et dont les pales sont soit fixes (hélice) soit réglables (Kaplan).

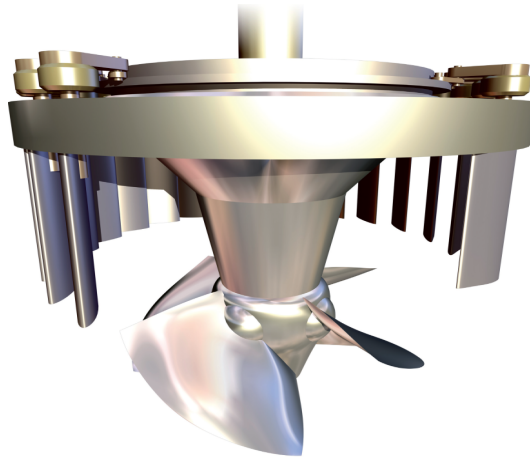


FIGURE 1.4 – Turbine Kaplan

### Turbine-pompe

Les turbines-pompe ont deux modes de fonctionnement : turbine pour la production d'électricité et pompe pour remonter de l'eau dans le bassin supérieur en période de faible consommation. Elles sont utilisées pour toutes les chutes (de 10 m à 1200 m)

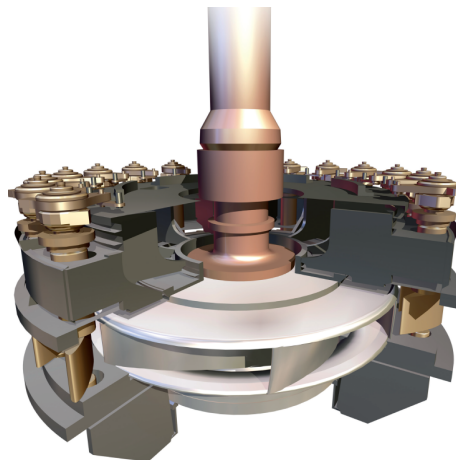


FIGURE 1.5 – Turbine pompe

### Turbine Francis

Les turbines Francis sont des turbines à réaction qui utilisent à la fois la vitesse de l'eau (énergie cinétique) et une différence de pression. Ces turbines couvrent une gamme étendue de hauteurs de chute (40 à plus de 600m).

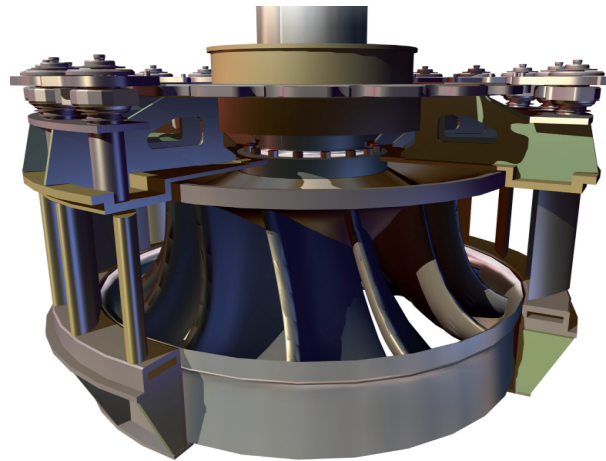


FIGURE 1.6 – Turbine Francis

Ce sont les turbines Francis qui nous intéressent et sur lesquelles nous avons effectué notre étude d'analyse de sensibilité. Avant de présenter le sujet du stage on va présenter d'abord le schéma d'une turbine hydraulique.

### Schéma d'une turbine hydraulique

L'énergie hydraulique est produite par la transformation de l'énergie cinétique de l'eau en énergie électrique par l'intermédiaire d'une turbine hydraulique couplée à un générateur électrique.

Le barrage qui est placé sur la rivière (figure 1.7) crée un important réservoir d'eau. La différence de masse et d'élévation entre le niveau du réservoir amont et aval donne à l'eau une grande énergie potentielle, cette dernière est transformée en énergie cinétique en dirigeant l'eau à l'intérieur de la centrale hydraulique par la conduite forcée.

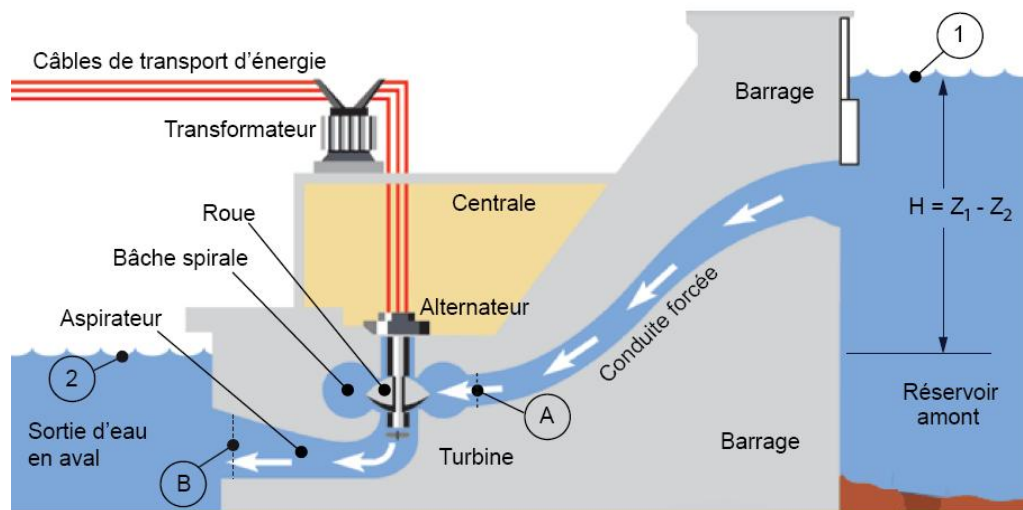


FIGURE 1.7 – Schéma d'une centrale hydraulique

L'écoulement tourne ensuite autour de la machine dans la bêche, qui donne une vitesse circonférentielle à l'eau et distribue également le débit.

L'eau pénètre ensuite dans les avant-directrices (figure 1.8), qui sont fixes et tout de suite après dans les directrices pivotantes qui donnent l'orientation finale au fluide et contrôlent le débit dans la machine en fonction de leur ouverture.

Le mouvement de l'eau entraîne la rotation de la roue, qui entraîne à son tour la rotation du rotor de l'alternateur. Cette énergie mécanique est convertie en énergie électrique par le mouvement du rotor dans le stator de l'alternateur. L'eau est retournée à la rivière par l'aspirateur.

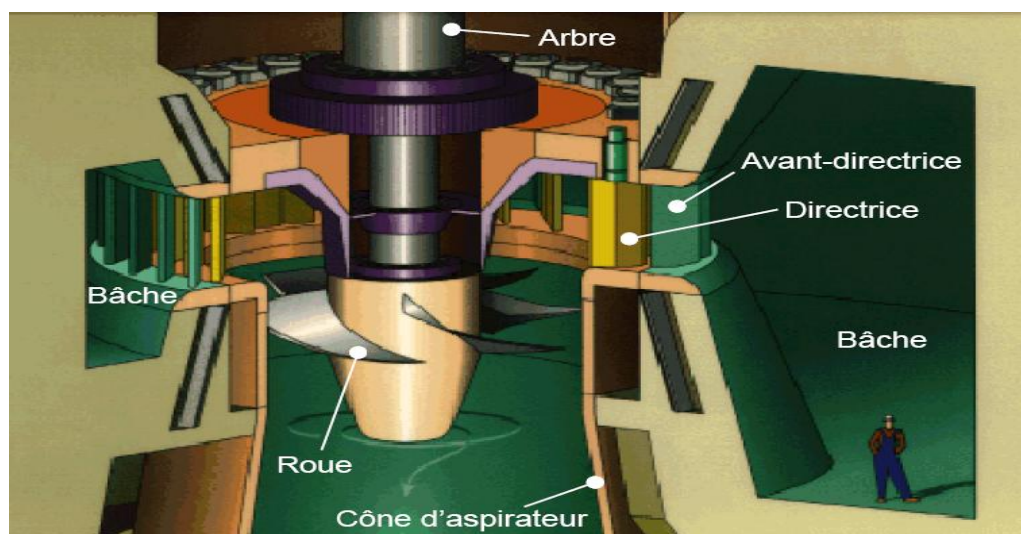


FIGURE 1.8 – Turbine hydraulique



---

## 2 Présentation du sujet

Le but de notre étude est de déterminer les paramètres qui influencent le calcul du couple hydraulique appliqué sur la directrice, qu'ils soient de nature hydraulique (débit d'entrée, angle d'entrée), ou géométrique (position de l'axe de rotation, définition du profil), l'influence du modèle numérique est aussi prise en compte (fluide parfait, fluide visqueux, modèle de turbulence, loi de paroi).

Pour cela on a mis en place une approche stochastique d'analyse de sensibilité globale à savoir la méthode des polynômes de chaos et la méthode de Monte-Carlo ( dite méthode de Sobol).

Les directrices sont des organes des machines hydrauliques, qui ont pour rôle de régler le débit d'entrée de la roue grâce à une rotation autour d'un axe fixe.

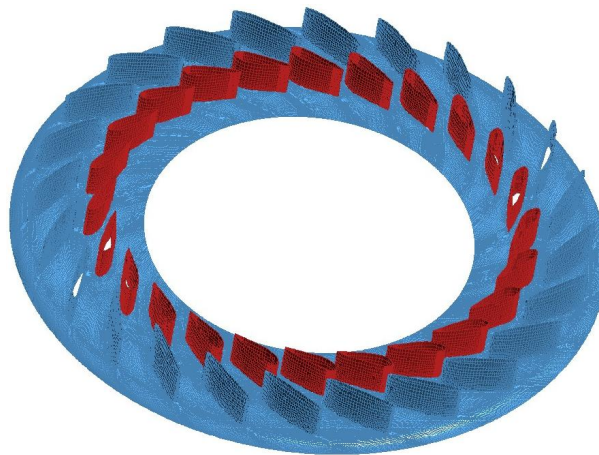
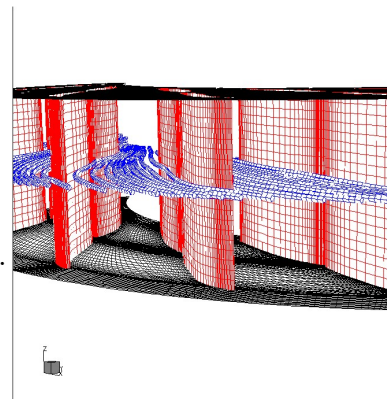


FIGURE 2.1 – Directrice et avant directrice

L'eau traverse ce qu'on appelle une double grille, avant le passage dans la turbine. La double grille est constituée :

- D'une part d'avant-directrices, immobiles, sur lesquelles est fixé le conduit d'amenée de l'eau. Leur fonction principale est le maintien de la structure mécanique. Elles permettent également de guider l'eau.
- D'autre part de directrices, mobiles, permettant de régler le débit passant à travers la turbine. La double grille n'a pas de mouvement de rotation global comme la turbine.



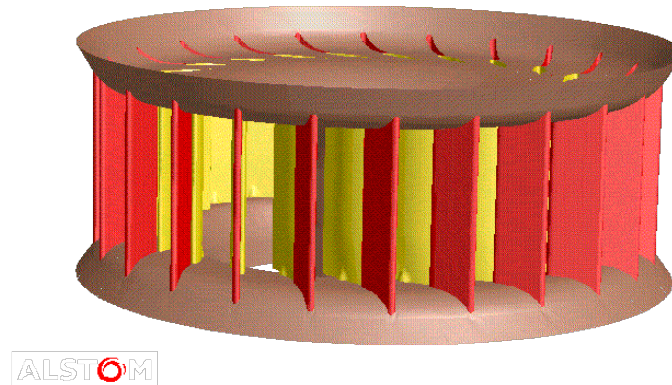


FIGURE 2.2 – Double grille

C'est cette partie de la machine hydraulique qui va être étudiée lors de notre étude d'analyse de sensibilité globale, la modélisation est faite sur la double grille en utilisant un logiciel interne d'Alstom qui s'appelle **dbgr** pour le modèle fluide parfait et **OpenFoam** qui est un logiciel Open source<sup>1</sup> pour le modèle fluide visqueux.

1. C'est un logiciel dont le code source est ouvert au publique

---

## 3 Analyse de sensibilité globale

L'analyse de sensibilité globale étudie l'impact de la variabilité des entrées d'un modèle (numérique ou autre) sur la variabilité de la sortie. Elle repose sur l'évaluation des indices de sensibilité qui quantifient la contribution d'une variable ou d'un groupe de variables à la variance de la sortie et permet ainsi de déterminer la manière dont réagissent les sorties du modèle à des perturbations sur les variables d'entrée.

### 3.1 Objectifs de l'analyse de sensibilité

L'analyse de sensibilité nous permet de déterminer :

- 🌐 **Les variables qui influencent ou qui contribuent le plus à la variabilité de la réponse du modèle**, on peut réduire les erreurs de la sortie si on connaît les variables les plus influentes, soit en diminuant les erreurs sur les entrée influentes ou en restructurant le modèle pour réduire l'effet des erreurs sur la sortie
- 🌐 **Les variables qui contribuent le moins à la variabilité de la réponse du modèle**, dans ce cas on peut fixer ces variables à leur espérance, pour les rendre déterministes et ainsi obtenir un modèle avec moins de variables d'entrée.
- 🌐 **Si le modèle est fidèle au phénomène ou processus modélisé**, car si l'analyse de sensibilité nous montre qu'une variable est influente fortement alors qu'on sait qu'elle ne l'est pas ou vis versa, alors dans ce cas le modèle n'est pas fidèle au processus.
- 🌐 **Les variables ou groupe de variables en interaction**, ceci nous permet de comprendre les relations entre la sortie et les variables d'entrée.

### 3.2 Méthodes d'analyse de sensibilité

Saltelli [1] regroupe les méthodes d'analyse de sensibilité de la manière suivante :

- les méthodes traitant l'analyse de sensibilité pour l'analyse de risques *SORM* et *FORM*
- les méthodes bayésiennes
- les méthodes graphiques
- les méthodes basées sur l'étude de la variance

C'est la dernière classe de méthodes qui nous intéresse dans le cadre de ce stage, elle consiste à déterminer la part de variance de la sortie due à la variance de chaque

variable d'entrée. Pour chaque type de modèle (linéaire, monotone, général) il existe des mesures de sensibilité qui expliquent la sensibilité du modèle aux variables d'entrée. La méthode que nous adoptons ici est une méthode générale basée sur la décomposition de la variance car nous n'avons aucune hypothèse sur notre modèle.

### 3.3 Indices de sensibilité

#### 3.3.1 Définitions

Considérons le modèle suivant :

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (3.1)$$

où les variables d'entrée  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont indépendantes

La fonction  $f$  modélise le lien entre les facteurs  $X_i$  et la sortie  $Y$ .

Dans le cadre de notre étude :

- Les  $X_i$  sont les paramètres d'entrée.
- $f$  est le code numérique.
- $Y$  est le résultat ou la sortie du code numérique.

**Définition 3.3.1** *L'indice de sensibilité qui exprime la sensibilité de  $Y$  à  $X_i$  est donné par*

$$S_i = \frac{V(E[Y|X_i])}{V(Y)} \quad (3.2)$$

*Cet indice est appelé indice de sensibilité de premier ordre, il quantifie la part de la variance de  $Y$  due à la variable  $X_i$*

Pourquoi la variance de l'espérance conditionnelle ?

Pour mesurer l'influence d'une variable d'entrée  $X_i$  sur la variance de la sortie  $Y$ , il faut fixer la variable  $X_i$  à une valeur fixe  $x_i$  et mesurer de combien la variance de  $Y$  décroît, ce qui revient à étudier la variance de  $Y$  sachant  $X_i = x_i$

$$V(Y|X_i = x_i)$$

Plus la variable  $X_i$  est influente plus cette quantité sera petite.

Le choix de la valeur de  $x_i$  pose problème. Pour remédier à cela il faut prendre la moyenne de cette variance conditionnelle pour toutes les valeurs de  $x_i$ .

$$E[V(Y|X_i = x_i)]$$

Le théorème suivant est très utile dans la suite :

**Théorème 3.3.1 (Théorème de la variance totale)** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires ayant le même espace de probabilité  $\Omega$ . On suppose  $V(Y) < \infty$ . Alors

$$V(Y) = E[V(Y|X)] + V(E[Y|X])$$

Grâce au théorème de la variance totale on peut déduire qu'étudier la quantité  $E[V(Y|X_i = x_i)]$  revient à étudier la quantité  $V(E[Y|X_i = x_i])$ , cette dernière quantité est d'autant plus grande que la variable  $X_i$  est influente sur la variance de la sortie  $Y$ . Pour avoir une quantité indicative normalisée on divise par la variance de  $Y$  et on obtient l'indice de sensibilité définie par (3.2).

On peut estimer l'importance des entrées sur la sortie du modèle dans le cadre général d'un modèle non linéaire et non monotone, en utilisant la décomposition de  $f$  en somme de fonctions élémentaires (Hoeffding [3], voir aussi B. Iooss [2], pour une revue)

**Théorème 3.3.2 (Décomposition ANOVA)** Toute fonction  $f$  définie sur  $[0, 1]^n$  de carré intégrable admet une décomposition unique

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0 + \sum_{i=1}^n f_i(x_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{i,j}(x_i, x_j) + \dots + f_{1,2,\dots,n}(x_1, \dots, x_n) \quad (3.3)$$

où les fonctions de la décomposition  $f_I$ , au nombre de  $2^n$ , vérifient les conditions suivantes :

- $f_I$  ne dépend que des composantes de  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , dont l'indice est dans  $I$  (ensemble d'indices)
- $f_0 = \int f(x) dx$
- $\forall I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}, \forall i \in I, \int_0^1 f_I(x) dx_i = 0$

Cette décomposition a été utilisée par I. M. Sobol pour l'analyse de sensibilité, c'est pour cette raison qu'on l'appelle aussi décomposition de Sobol (B. Iooss [2]).

Cette décomposition est unique et les termes  $f_I$  peuvent être calculés en utilisant l'espérance conditionnelle de la sortie du modèle  $Y$  (A. Saltelli et M. Ratto [4]).

$$\begin{aligned} f_0 &= E[Y] \\ f_i &= E[Y|X_i] - E[Y] \\ f_{i,j} &= E[Y|X_i, X_j] - f_i - f_j - E[Y] \end{aligned}$$

Où les  $X_i$  sont les paramètres d'entrée (variables aléatoires) supposées indépendantes et uniformes sur  $[0, 1]$ .

L'équation (3.3) permet d'obtenir la décomposition de la variance fonctionnelle.

**Théorème 3.3.3 (Décomposition de la variance)** *La variance du modèle (3.1) se décompose en :*

$$V = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \dots + V_{1,2,\dots,n}, \quad (3.4)$$

où

$$\begin{aligned} V_i &= V(E[Y|X_i]) \\ V_{ij} &= V(E[Y|X_i, X_j]) - V_i - V_j \\ &\vdots \\ V_{1,\dots,n} &= V - \sum_{i=1}^n V_i - \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} - \dots - \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-1} \leq n} V_{i_1,\dots,i_{n-1}} \end{aligned}$$

Le théorème de décomposition va nous permettre de calculer les variances conditionnelles  $V(E[Y|X_I])$  où  $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Définition 3.3.2 (Indices d'ordre supérieur)** *L'indice de sensibilité définit par 3.2 est dit de premier ordre dans la mesure où il ne représente que la part d'incertitude due à une seule variable. On définit les indices de sensibilités d'ordre supérieur représentant l'incertitude due à un groupe de variable avec la prise en compte des interactions entre les variables :*

$$S_{i_1, i_2, \dots, i_k} = \frac{V(E[Y|X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}])}{V(Y)}$$

Cet indice exprime la sensibilité de la variance de  $Y$  aux variables  $\{X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}\}$ . Pour un sous ensemble  $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ , l'ordre de l'indice  $S_I = \frac{V(E[Y|X_I])}{V(Y)}$  est égal à la cardinalité du sous ensemble d'indice  $I$ .

En divisant les deux termes à droite et à gauche de l'équation (3.4) par la variance de la sortie  $V$ , on obtient :

$$1 = \sum_{i=1}^n S_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} S_{i,j} + \dots + S_{1,2,\dots,n}, \quad (3.5)$$

### Remarque 3.3.1

🌀 La somme des indices de sensibilité de premier ordre et d'ordre supérieur est égale à 1 (découle de la décomposition de la variance) et comme tous ces indices sont positifs leur interprétation devient facile : plus l'indice est grand plus la variable aura d'importance.

- 🌐 Le nombre d'indices d'ordre un et d'ordre supérieur est égale à  $2^n - 1$  ce qui veut dire que le nombre d'indices de sensibilité est d'autant plus grand que le nombre de paramètres est grand, ce qui rend difficile voir impossible le calcul et l'interprétation de ces indices quand le nombre de paramètres d'entrée  $n$  est très grand.

Pour détourner cette difficulté, Homma et Saltelli [5] ont alors défini un nouvel indice, qui est dit indice de sensibilité totale et qui permet d'exprimer la sensibilité de la variance de la sortie à la variable d'entrée plus les interactions de celle-ci avec les autres variables (B. Iooss [2]).

**Définition 3.3.3 (indice de sensibilité totale)** Pour réduire le coût de l'analyse de sensibilité on s'intéresse alors à l'indice de sensibilité totale. L'indice de sensibilité totale  $S_{T_i}$  d'une variable d'entrée  $X_i$  est défini comme la somme de tous les indices de sensibilité relatifs à la variables  $X_i$ .

$$S_{T_i} = \sum_{I \subseteq \{1,2,\dots,n\}, i \in I} S_I \quad (3.6)$$

On peut aussi définir l'indice de sensibilité totale par :

$$S_{T_i} = 1 - \frac{V(E[Y|X_{\sim i}])}{V(Y)} \quad (3.7)$$

avec

$$X_{\sim i} = X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n$$

**Exemple :**

Pour un modèle à 4 variables  $X_1, X_2, X_3, X_4$  :

$$\begin{aligned} S_{T_1} &= S_1 + S_{12} + S_{13} + S_{14} + S_{123} + S_{124} + S_{134} + S_{1234} \\ S_{T_2} &= S_2 + S_{12} + S_{23} + S_{24} + S_{123} + S_{124} + S_{234} + S_{1234} \\ S_{T_3} &= S_3 + S_{13} + S_{23} + S_{34} + S_{123} + S_{234} + S_{134} + S_{1234} \\ S_{T_4} &= S_4 + S_{14} + S_{24} + S_{34} + S_{124} + S_{234} + S_{134} + S_{1234} \end{aligned}$$

et

$$1 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_{12} + S_{13} + S_{14} + S_{23} + S_{24} + S_{34} + S_{123} + S_{124} + S_{134} + S_{234} + S_{1234}$$

### 3.3.2 Interprétation

Pour un indice  $i$  donné :

- 🌐 Si l'indice de sensibilité de premier ordre  $S_i$  est grand alors la variable d'entrée  $X_i$  à elle seule influence fortement la variabilité de la sortie  $Y$ .
- 🌐 Si l'indice de sensibilité totale est petit, alors la variable d'entrée  $X_i$  n'influence que peu la variabilité de la sortie  $Y$  même en prenant en compte la présence des autres variables d'entrée.
- 🌐 Si les deux indices de sensibilité de premier ordre et totale d'une variable d'entrée  $X_i$  sont égaux, alors les interactions entre  $X_i$  et les autres variables d'entrée n'influencent pas la variation de la sortie.

### 3.4 Estimation des indices de sensibilité

Le calcul des indices de sensibilité est généralement difficile car la fonction  $f$  est complexe et non connue analytiquement, ce qui est le cas de notre étude, donc il est nécessaire d'estimer les indices de sensibilité. Il existe plusieurs méthodes d'estimation des indices de sensibilité, par exemple : la méthode de Monte-Carlo, méthode FAST, méthode de McKay, ..., dans le cadre de notre étude nous avons utilisé la méthode de Monte-Carlo pour sa simplicité et son exactitude. Toutefois cette méthode est un très gourmande en temps de calcul.

#### 3.4.1 Méthode de Monte-Carlo

##### Définition

Les méthodes de Monte-Carlo reposent sur la loi des grands nombre. On simule un grand nombre de variables aléatoires  $(X_i)_i$  indépendantes et de même loi  $X$ , on prend alors la moyenne  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$  qui nous donne une approximation de  $E[X]$ . La convergence est assurée par la loi des grands nombres.

##### Théorème 3.4.1 (loi des grands nombre)

Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoire intégrables, iid<sup>1</sup>. Alors

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \longrightarrow E[X_1], \text{ ps et dans } L^1$$

La convergence a eu lieu ps<sup>2</sup> et dans  $L^1$ , si de plus  $(X_i)_{i \geq 1}$  est de carré intégrable la convergence a lieu dans  $L^2$ .

##### Estimation des indices de sensibilité par Monte-Carlo

On considère un  $N$ -échantillon de réalisation des variables aléatoires  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  :

$$X^N = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})_{k=1:N}$$

L'espérance et la variance de  $Y$  sont alors approchées par :

$$E[Y] \simeq \tilde{Y} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$$

$$V(Y) \simeq \tilde{V}(Y) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f^2(x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}) - \tilde{Y}^2$$

I.M. Sobol [6] a construit une méthode pour estimer la variance d'une espérance conditionnelle, qui est nécessaire pour l'estimation des indices de sensibilité. On a

1. indépendantes et identiquement distribuées

2. presque sûrement



$$\begin{aligned}
V(E[Y|X_i]) &= E[E[Y|X_i]^2] - E[E[Y|X_i]]^2 \\
&= E[E[Y|X_i]^2] - E[Y]^2
\end{aligned}$$

L'espérance de  $Y$  étant déjà estimée il nous reste à estimer l'espérance du carré de l'espérance de  $Y$  sachant  $X_i$ , cette dernière est estimée par I.M. Sobol [6] comme une espérance simple en faisant varier durant les appels à la fonction  $f$  tous les paramètres sauf le  $i^{\text{ème}}$ .

Pour pouvoir réaliser une telle simulation on a besoin de deux échantillons de réalisation des entrées  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  notés  $X_1^N$  et  $X_2^N$

L'estimateur de la quantité  $E[E[Y|X_i]^2]$  noté  $\tilde{E}$  est donné par :

$$\begin{aligned}
\tilde{E} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_{k1}^{(1)}, \dots, x_{k(i-1)}^{(1)}, x_{ki}^{(1)}, x_{k(i+1)}^{(1)}, \dots, x_{kn}^{(1)}) \\
&\quad \times f(x_{k1}^{(2)}, \dots, x_{k(i-1)}^{(2)}, x_{ki}^{(1)}, x_{k(i+1)}^{(2)}, \dots, x_{kn}^{(2)}).
\end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$V(E[Y|X_i]) \simeq \tilde{E} - \tilde{Y}^2$$

L'indice de sensibilité de premier ordre  $S_i = \frac{V(E[Y|X_i])}{V(Y)}$  est alors estimé par :

$$\tilde{S}_i = \frac{\tilde{E} - \tilde{Y}^2}{\tilde{V}(Y)}$$

Pour l'indice de sensibilité totale on rappelle l'expression (3.7)

$$S_{T_i} = 1 - \frac{V(E[Y|X_{\sim i}])}{V(Y)}$$

On a

$$\begin{aligned}
V(E[Y|X_{\sim i}]) &= E[E[Y|X_{\sim i}]^2] - E[E[Y|X_{\sim i}]]^2 \\
&= E[E[Y|X_{\sim i}]^2] - E[Y]^2
\end{aligned}$$

Il nous faut juste estimer la quantité  $E[E[Y|X_{\sim i}]^2]$  (l'espérance du carré de l'espérance conditionnelle sachant tous les autres paramètres sauf  $X_i$ ). Notons par  $\tilde{E}_{\sim i}$  son estimateur, I.M. Sobol [6] propose de caculer  $\tilde{E}_{\sim i}$  comme pour une espérance classique en faisant varier durant l'appel à la fonction  $f$  le  $i^{\text{ème}}$  paramètre uniquement, on a alors :

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{\sim i} = & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_{k1}^{(1)}, \dots, x_{k(i-1)}^{(1)}, x_{ki}^{(1)}, x_{k(i+1)}^{(1)}, \dots, x_{kn}^{(1)}) \\ & \times f(x_{k1}^{(1)}, \dots, x_{k(i-1)}^{(1)}, x_{ki}^{(2)}, x_{k(i+1)}^{(1)}, \dots, x_{kn}^{(1)}).\end{aligned}$$

On obtient donc l'estimation de l'indice de sensibilité totale :

$$\tilde{S}_{T_i} = 1 - \frac{\tilde{E}_{\sim i} - \tilde{Y}^2}{\tilde{V}(Y)}$$

### Coût des simulations Monte-Carlo

- Pour une taille d'échantillon Monte-Carlo  $N$ , le nombre de simulations nécessaires pour estimer les indices de sensibilité est  $2N$ , car on utilise deux échantillons.
- Pour estimer les indices de sensibilité de premier ordre et les indices totaux il faut  $N \times (n + 2)$  appels à la fonction du modèle où  $n$  est le nombre de paramètres d'entrée.

La méthode de Monte-Carlo étant très coûteuse en nombre d'évaluations du modèle (taux de convergence en  $\sqrt{N}$  où  $N$  est la taille de l'échantillon), il est intéressant de construire un modèle approché du modèle numérique. Ce modèle approché est alors appelé métamodèle.

## 3.5 Métamodèle

Construire un métamodèle dit aussi surface de réponse a pour objectif d'obtenir un modèle mathématique représentatif du code étudié en termes de qualité d'approximation, ayant de bonnes capacités de prédiction, et dont le temps de calcul pour évaluer une réponse est négligeable. Ce métamodèle est construit et ajusté à partir de quelques simulations du code numérique. Il peut alors être substitué ou associé au code (B. Iooss [2]).

Parmi les modèles les plus utilisés pour ajuster les réponses de codes de calcul, on peut citer les polynômes de chaos, les modèles linéaires généralisés, modèles additifs généralisés, krigage, réseaux de neurones, ..., (voir B. Iooss [2]). Certains métamodèles permettent d'obtenir directement les indices de sensibilité. Par exemple les indices de Sobol découlent directement de la décomposition en polynômes de chaos, la formulation du métamodèle du Krigage permet d'obtenir les indices de sensibilité de manière analytique. Pour les autres métamodèles on applique un échantillonnage directement sur le métamodèle pour estimer les espérances conditionnelles et ainsi estimer les indices de sensibilité.

Dans cette étude nous avons utilisé les polynômes de chaos car, c'est une méthode efficace qui permet d'obtenir les indices de sensibilité d'une manière astucieuse. Notre exemple étant additif nous avons alors étudié comment construire un

métamodèle par les modèles additifs et la façon d'estimer les indices de sensibilité grâce à ce dernier.

### 3.5.1 Méthode des polynômes de chaos

L'objectif de la méthode des polynômes de chaos est de représenter les réponses à analyser,  $Y$ , sous la forme d'un développement polynômial de la forme suivante :

$$Y(\xi) = \sum_{\alpha} y_{\alpha} \psi_{\alpha}(\xi) = \sum_{k=1}^p y_k \psi_k(\xi), \quad (3.8)$$

où les  $\psi_{\alpha}$  sont des polynômes orthogonaux. En pratique on tronque le développement à un degré polynômial  $d$  :

$$Y(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq d} y_{\alpha} \psi_{\alpha}(\xi),$$

$p$  est le nombre de coefficients alors :

$$p + 1 = \frac{(n + d)!}{n!d!}$$

#### Développement en polynômes de chaos généralisés

**Définition 3.5.1** *Les polynômes de chaos permettent de modéliser toute variable aléatoire  $\xi$ -mesurable ou processus de variance finie par un développement en série de la forme*

$$X(\xi) = \sum_{\alpha} x_{\alpha} \psi_{\alpha}(\xi)$$

où  $\xi$  est un vecteur de variables aléatoires, les  $x_{\alpha}$  sont les coefficients du développement et les  $\psi_{\alpha}$  sont des polynômes multidimensionnels tels que :  $\psi_{\alpha} = \prod_i \Phi_{\alpha_i}^i(\xi_i)$  le multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$  est composé des degrés  $\alpha_i$  avec  $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$  est le degré du polynôme  $\psi_{\alpha}$  et  $\Phi_{\alpha_i}^i(\xi_i)$  le polynôme orthogonal associé à la variable aléatoire  $\xi_i$  et de degré  $\alpha_i$ .

La tensorisation est différente suivant la densité de  $\xi$  : Hermite (densité gaussienne), Legendre (densité uniforme), Laguerre (densité exponentielle), ...

**Propriété 3.5.1** *L'espace des variables aléatoires de variance finie est un espace de Hilbert muni du produit scalaire*

$$\langle X, Y \rangle = E[XY],$$

les variables aléatoires  $\psi_{\alpha}(\xi)$  constituent une base orthogonale de cet espace

En effet si on pose  $\Phi_0^i(\xi_i) = 1$  le polynôme de degré 0 et grâce à l'orthogonalité des  $\Phi_{\alpha_i}^i(\xi_i)$  et l'indépendance des variables stochastiques  $\xi_i$ , on a :

$$\begin{aligned}\langle \psi_\alpha, \psi_\beta \rangle &= \prod_i \langle \Phi_{\alpha_i}^i, \Phi_{\beta_i}^i \rangle \\ &= \prod_i \|\Phi_{\alpha_i}^i\|^2 \delta_{\alpha_i, \beta_i} \\ &= \|\psi_\alpha\|^2 \delta_{\alpha, \beta}\end{aligned}$$

**Remarque 3.5.1** *Les coefficients du développement de la variable aléatoire  $X$  en polynômes de chaos sont définis par :*

$$x_\alpha = \frac{\langle X, \psi_\alpha \rangle}{\|\psi_\alpha\|^2}$$

Essayons maintenant de calculer les indices de Sobol à l'aide des développements en Polynômes de chaos.

### Calcul des indices de Sobol

On utilisant le théorème (3.3.2), on a la décomposition fonctionnelle de la sortie du modèle (3.1) :

$$Y = f(X_1, \dots, X_n) = \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} f_I(X_I) \quad (3.9)$$

avec  $I$  un ensemble d'indices, les  $X_i \sim \mathcal{U}(0, 1)$ ,

$$E(f_I | X_i) = 0, \quad \forall i \in I \neq \emptyset, \text{ et } f_\emptyset(X_\emptyset) = f_0 \text{ constante}$$

On a donc

$$E[f_I f_J] = \langle f_I, f_J \rangle = \|f_I\|^2 \delta_{IJ}$$

Calculons alors  $V(Y) = V(f)$ , on a

$$\begin{aligned}V(f) &= E[f^2] - (E[f])^2 \\ &= E[f^2] - f_0^2\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
 E[f^2] &= \langle f, f \rangle \\
 &= \left\langle \sum_{I \subseteq \{1,2,\dots,n\}} f_I, \sum_{J \subseteq \{1,2,\dots,n\}} f_J \right\rangle \\
 &= \sum_{I \subseteq \{1,2,\dots,n\}} \sum_{J \subseteq \{1,2,\dots,n\}} \langle f_I, f_J \rangle \\
 &= \sum_{I \subseteq \{1,2,\dots,n\}} \sum_{J \subseteq \{1,2,\dots,n\}} \|f_I\|^2 \delta_{IJ} \\
 &= \sum_{I \subseteq \{1,2,\dots,n\}} \|f_I\|^2
 \end{aligned}$$

donc

$$V(f) = \sum_{I \subseteq \{1,2,\dots,n\}} \|f_I\|^2 - f_0^2$$

d'où

$$V(f) = \sum_{I \subseteq \{1,2,\dots,n\}, \neq \emptyset} \|f_I\|^2$$

Maintenant faisant le lien entre les  $\|f_I\|^2$  et les coefficients de la décomposition en polynômes de chaos. On a d'après la définition (3.5.1) :

$$Y = f(X_1, \dots, X_n) = \sum_{I \subseteq \{1,2,\dots,n\}} y_I \psi_I(X)$$

Où les  $\psi_I$  sont des polynômes multidimensionnel de Legendre. On a alors :

$$\begin{aligned}
 y &= f(X) \\
 &= \sum_{I \subseteq \{1,2,\dots,n\}} y_I \psi_I(X) \\
 &= \sum_{I \subseteq \{1,2,\dots,n\}} f_I(X_I)
 \end{aligned}$$

Or d'après l'orthogonalité des polynômes et l'unicité de la décomposition fonctionnelle, on a

$$\|f_I\|^2 = y_I^2 \|\psi_I(X)\|^2$$

Ce qui nous donne :

$$V(f) = \sum_{I \subseteq \{1,2,\dots,n\}, \neq \emptyset} y_I^2 \|\psi_I(X)\|^2$$

Si on normalise les polynômes  $\psi_I$  par rapport à la loi de  $X$  qui est uniforme on obtient :

$$V(f) = \sum_{I \subseteq \{1,2,\dots,n\}, \neq \emptyset} y_I^2 \quad (3.10)$$

Grâce au théorème de la décomposition de la variance (3.4) on obtient les variances conditionnelles

$$V(E[Y|X_{i_1}, \dots, X_{i_m}]) = \sum_{I \subseteq \{i_1, i_2, \dots, i_m\}, \neq \emptyset} y_I^2 \quad (3.11)$$

Grâce à (3.10) et (3.11), on peut calculer les indices de sensibilité en fonction des coefficients de la décomposition.

Les coefficients sont calculés comme il a été décrit dans la remarque (3.5.1), on se ramène donc à un calcul d'intégrales.

$$y_I = \langle Y, \psi_I \rangle = E[Y \psi_I]$$

Ces intégrales sont approchées par :

1. des méthodes d'intégration numérique :

$$E[Y \psi_I] \simeq \sum_{i=1}^n \omega_i Y(X_i) \psi_i(X_i)$$

Parmi les méthodes on a :

- Monte Carlo, Quasi Monte Carlo
- Quadrature<sup>3</sup>

2. approximation de fonctions par moindres carrés (méta-modèle)

$$\arg \min_{y_I} \sum_{i=1}^n \left[ Y(X_i) - \sum_I y_I \psi_I(X_i) \right]^2$$

La méthode des polynômes de chaos permet de calculer de façon astucieuse les indices de sensibilité et réduit de manière significative le nombre d'appels au code numérique. Cependant, cette approche souffre du fléau de la dimension, le nombre de calcul augmente considérablement avec le nombre de variables aléatoires.

En ce qui concerne l'erreur de troncature il n'existe pas de résultats théoriques utilisables en pratique, car elle dépend de la vraie loi de la sortie  $Y$  qui est inconnue. Cependant un constat est régulièrement fait : un ordre de troncature  $p = 2$  ou  $p = 3$  est en général suffisant (S. Da-Veiga [7]).

---

3. Utilisée dans notre étude via la librairie NISP

### 3.5.2 Modèle additif

Le modèle additif est donné par :

$$Y = f(X_1, \dots, X_n) = \beta + \sum_{j=1}^n f_j(X_j)$$

où les  $f_j$  sont les composantes de la fonction de régression. Etudier ces modèles signifie estimer les composantes  $f_j$  à partir des observations  $(X_j, Y)$ .

La construction du modèle additif sépare les effets de contribution de chaque variable d'entrée sur la sortie. Notre but étant de faire une analyse de sensibilité, supposant que les composantes  $X_j$  sont indépendantes on a alors,

$$V(Y) = \sum_{j=1}^n V(f_j(X_j))$$

On définit alors les indices de sensibilité par :

$$S_i = \frac{V(f_i(X_i))}{V(Y)}$$

avec  $V(f_j(X_j))$  la variance due à la composante  $X_j$

#### Remarque 3.5.2

*On peut voir facilement que ces indices de sensibilité sont équivalents aux indices de sobol.*

#### Preuve

On a

$$\begin{aligned} E[Y|X_i] &= E\left[\beta + \sum_{j=1}^n f_j(X_j) | X_i\right] \\ &= \beta + \sum_{j \neq i}^n E[f_j(X_j) | X_i] + E[f_i(X_i) | X_i] \\ &= \beta + \sum_{j \neq i}^n E[f_j(X_j)] + f_i(X_i) \end{aligned}$$

On appliquant la variance sur les deux termes de l'équation on trouve :

$$\text{Var}(E[Y|X_i]) = \text{Var}(f_i(X_i))$$

d'où

$$S_i = \frac{\text{Var}(E[Y|X_i])}{\text{Var}(Y)} = \frac{\text{Var}(f_i(X_i))}{\text{Var}(Y)}$$

**Estimation des composantes de régression (Backfitting)**

A partir d'un échantillon  $(X_{1i}, \dots, X_{ni}, Y)$  on peut estimer les fonctions  $f_i$  par des méthodes de régression non paramétrique, à savoir les splines de lissage ou les estimateurs à noyaux. En pratique la méthode d'estimation la plus répandue est le Backfitting, c'est une méthode très utile dans les applications mais qui est difficile à étudier théoriquement car de nature itérative.

**Algorithme 1 : Algorithme de Backfitting**

```

début
  Initialiser  $f_0 = E(Y), f_1^1 = \dots = f_n^1 = 0, m = 0$ 
   $t \leftarrow 0$ 
  répéter
     $m \leftarrow m + 1$ 
    for  $j = 1$  to  $n$  do
       $R_j \leftarrow Y - f_0 - \sum_{k=1}^{j-1} f_k^m(X_k) - \sum_{k=j+1}^n f_k^{m-1}(X_k)$ 
       $f_j^m \leftarrow E(R_j | X_j)$ 
    jusqu'à  $(Y - f_0 - \sum_{j=1}^n f_j^m(X_j))^2$  satisfait le critère de convergence
fin

```

L'algorithme du Backfitting comporte trois étapes :

1. Initialisation des fonctions
2. Estimation de chacune des fonctions à partir des résidus partiels
3. Itération de l'étape 2 jusqu'à convergence.

Une fois obtenu un ajustement non paramétrique des fonctions  $f_i$ , on peut alors estimer les variances  $V(f_j(X_j))$  par une méthode de Monte-Carlo classique (J. Jacques [8]).

**Remarque 3.5.3**

*Si le modèle étudié est additif, l'efficacité de l'algorithme du Backfitting permet une estimation peu coûteuse des indices de sensibilité.*

*Si le modèle étudié est fortement non additif, l'ajustement d'un modèle additif ne sera pas bon, et l'estimation des indices de sensibilité sera mauvaise.*

Pour la construction du métamodèle par l'algorithme du Backfitting voir annexe A (page 1).



#### **Conclusion**

Après avoir présenté les méthodes de Monte-Carlo et les polynômes de chaos, nous allons présenter les applications réalisées sur un cas industriel de ces deux méthodes.

---

## 4 Applications

### 4.1 Utilitaire

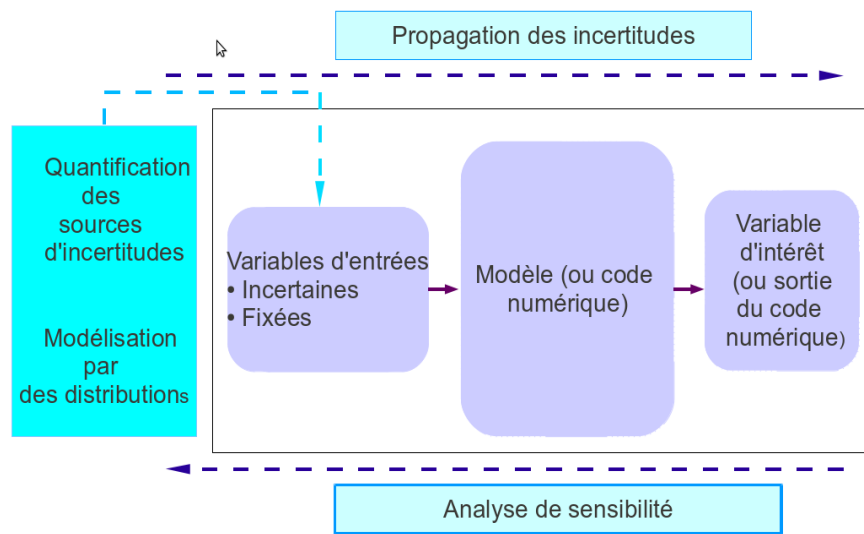


FIGURE 4.1 – Schéma générique d'une étude d'incertitude

L'objectif est de faire une analyse de sensibilité globale pour déterminer les paramètres qui influencent la variation du couple sur la directrice, les méthodes utilisées sont :

- la méthode d'estimation des indices de sensibilité Monte-Carlo,
- métamodèle par les polynômes de chaos,
- métamodèle par le modèle additif (annexe A (page 1)).

Une analyse d'incertitude sur le couple hydraulique de directrice a été aussi réalisée (espérance et variance du couple).

La mise en œuvre des méthodes citées ci-dessus est réalisée sous Scilab pour la méthode de Monte-Carlo et les polynômes de chaos. En ce qui concerne le métamodèle par le modèle additif une partie est réalisée sous R. L'analyse de sensibilité est faite pour deux types de modèle :

- Un modèle de calcul en fluide parfait.
- Un modèle de calcul en fluide visqueux.

Les simulations sont faites par le biais de deux logiciels de mécanique des fluides notamment un logiciel interne d'Alstom **dbgr** pour le cas de fluide parfait et **Open-FOAM** dans le cas du fluide visqueux. L'organisation ainsi que les étapes du pro-

cessus d'analyse de sensibilité mis en œuvre sont décrites dans le schéma suivant :

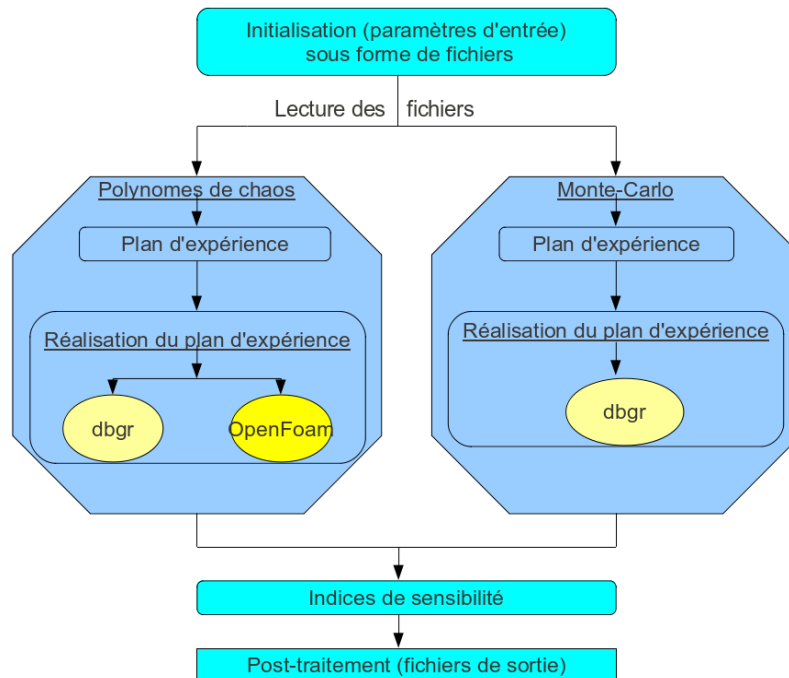


FIGURE 4.2 – Organisation du code

1. **Initialisation** : dans cette partie les paramètres d'entrée ainsi que leurs domaines de variation et les lois de probabilité sont écrits sur un fichier d'entrée, ce dernier peut être écrit soit à la main ou bien en utilisant une interface graphique qui facilite le remplissage. Le fichier contient aussi la méthode d'intégration numérique utilisée, le degré du polynôme de chaos ou le nombre d'itérations Monte-Carlo, ....
2. **Méthode utilisée**, les deux méthodes d'analyse de sensibilité sont Monte-Carlo et les polynômes de chaos. Chacune fait appel aux fonctions qui font tourner le code numérique (dbgr, OpenFOAM) et récupèrent les variables d'intérêt. Si on souhaite ajouter un autre code numérique (par exemple CFX), il suffit de changer la fonctions qui va l'appeler dans le programme.
3. **Estimation ou approximation des indices de sensibilité** dans cette partie les indices de sensibilité sont estimés par Monte-Carlo (théorème centrale limite), ou bien par des méthodes d'approximation d'intégrales pour la méthode des polynômes de chaos.
4. **Post-traitement**, ici les indices de sensibilité sont édités sous forme de tableau d'affichage ou bien de diagramme, ainsi que les nuages de points (scatter plot). Un fichier de sortie est aussi créé.

**Remarque 4.1.1** *Le choix de Scilab pour la mise en œuvre de l'analyse de sensibilité est justifié pour plusieurs raisons :*

- C'est un langage de programmation multiplateforme (Windows, Linux). En effet l'analyse de sensibilité dans le cas du fluide visqueux est réalisée sous Linux via une machine virtuelle **VMware**, car le logiciel OpenFOAM n'existe pas sous Windows, cette solution permet de profiter d'OpenFOAM sans booter sur Linux et permet un passage facile de Linux à Windows et vice versa, mais la grande consommation de la machine virtuelle en ressource processeur, augmente les temps de calcul.
- L'utilisation fréquente de Scilab par les ingénieurs à Alstom.
- Il contient la librairie NISP (Non Intrusive Spectral Projection) sur laquelle s'appuie la méthode des polynômes de chaos. Nous avons téléchargé et installé le module NISP via le portail ATOMS<sup>1</sup>.

Les codes utilisés sont présentés en (annexe E (page 13)), et la validation en (annexe C (page 5)).

## 4.2 Cas de fluide parfait (dbgr)

Dans cette section nous allons appliquer les deux méthodes Monte-Carlo et Polynômes de chaos pour pouvoir faire une analyse de sensibilité globale et déterminer les paramètres qui influencent la variation du couple sur la directrice, en faisant des simulations fluide parfait. Pour réaliser les simulations nous avons utilisé comme outil un logiciel interne d'Alstom qui s'appelle **dbgr**

### 4.2.1 DBGR

Le logiciel dbgr (double grille) est un logiciel interne d'Alstom dont la fonction est le calcul des écoulements dans une double grille à épaisseur de veine variable suivant des nappes de courant axisymétriques.

L'accès au programme se fait par le lancement de l'instruction "*dbgr*". L'exécution du logiciel nécessite la présence du fichier de données "*nomFichier.dbgdat*", si en plus on veut calculer des couples et des poussées sur un ou plusieurs aubages, on ajoute un fichier "*nomFichier.tordat*" qui est un fichier de pilotage du programme **tordbgr**.

Lors du déroulement **dbgr** imprime des fichiers de sortie et fait le post-traitement des résultats du calcul en visualisant la configuration de la géométrie, en visualisant le maillage obtenu et en traçant les profils de vitesse et de pression sur chacun des profils.

### 4.2.2 La géométrie étudiée

Nous allons étudier la Double grille d'une machine de moyenne chute, qui comporte 20 avant-directrices et 20 directrices et dont la géométrie est calculée en  $\varphi 1000$  (diamètre de roue de sortie de la turbine = 1000 mm)

---

1. C'est un système qui permet de télécharger et d'installer automatiquement les modules de Scilab, il est administré par le consortium Scilab

- Hauteur du distributeur  $H_d = 782.11$  mm .
- Diamètre de perçage<sup>2</sup>  $\Phi_p = 3475.6$  mm .
- Ouverture de la directrice<sup>3</sup>  $\gamma = 20^\circ$ .

La figure A.1 nous présente la double grille et la partie (encadré en blanc) dont on étudiera l'écoulement par **dbgr**

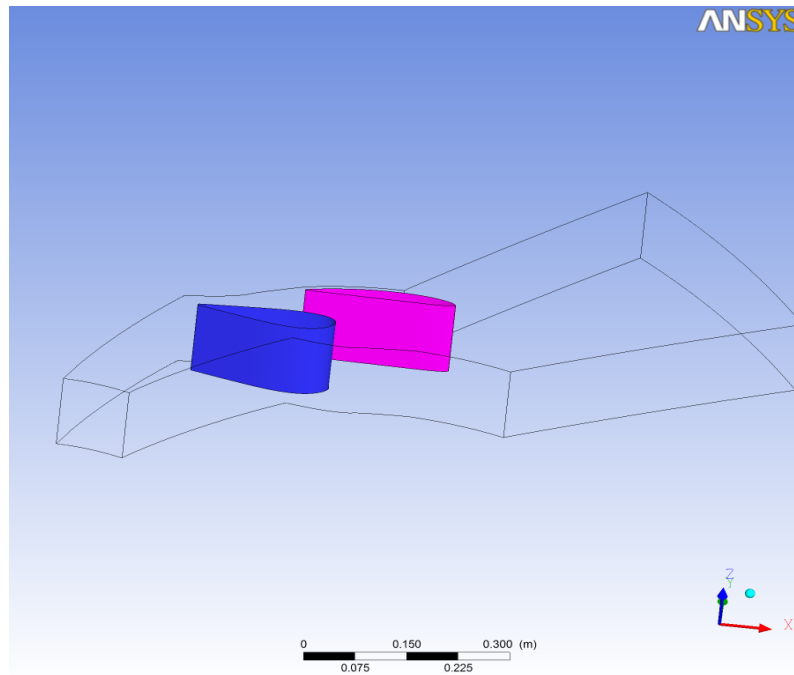


FIGURE 4.3 – Double grille

### 4.2.3 Les paramètres incertains

Les paramètres incertains ou entrées que nous avons étudiés sont les suivantes :

- Le débit en  $(m^3.s^{-1})$ ,
- l'angle d'entrée  $\beta$  en  $(^\circ)$ ,
- l'ouverture de la directrice en  $(^\circ)$ ,
- l'abscisse du tourillon en  $(m)$ ,
- l'ordonnée du tourillon en  $(m)$
- le calage en  $(^\circ)$ <sup>4</sup>.

2. La double de la distance du centre de la roue à l'axe de rotation des directrices

3. l'angle que fait la directrice par rapport à sa position initiale

4. C'est la position relative de la directrice par rapport à l'avant directrice

L'angle d'entrée  $\beta$  et la vitesse débitante sont représentées dans la figure suivante :

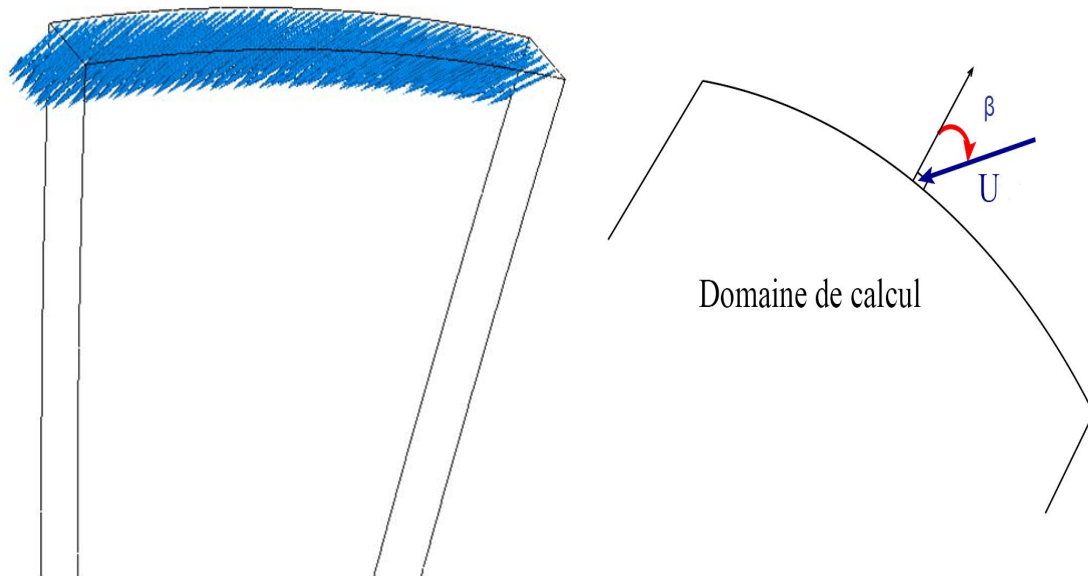


FIGURE 4.4 – Angle d'entrée

#### Remarque 4.2.1

*L'angle d'entrée  $\beta$  est donnée par rapport à la normale à l'entrée du domaine de calcul.*

*La vitesse débitante est supposée uniforme sur l'entrée.*

La position du tourillon peut aussi avoir une influence sur la prédiction du couple hydraulique, nous la faisons donc varier en faisant varier l'abscisse et l'ordonnée dans le repère lié à l'axe de la directrice.

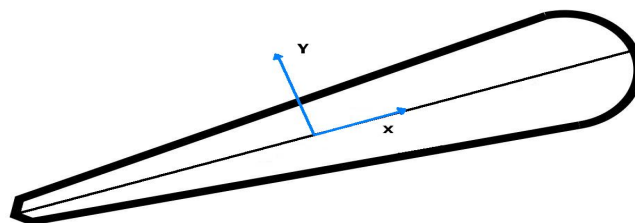


FIGURE 4.5 – Variation de la position du tourillon

#### 4.2.4 Méthode de Monte-Carlo

Monte-Carlo :						
Paramètre	unité	moyenne	variation	min	max	loi
$X_1$ : Débit $Q$	$(m^3.s^{-1})$	0.64	$\pm 0.03$	0.61	0.68	uniforme
$X_2$ : Angle d'entrée $\beta$	(°)	33	$\pm 10$	23	43	uniforme
$X_3$ : Abscisse tourillon	(mm)	0.00	$\pm 0.57$	0.57	0.57	uniforme
$X_4$ : Ordonnée tourillon	(mm)	0.00	$\pm 0.57$	-0.57	0.57	uniforme

Nous avons fait une analyse de sensibilité, en prenant comme paramètres d'entrée les variables définies sur le tableau ci-dessus.

Nous avons utilisé deux échantillons Monte-Carlo de taille 1000 ce qui nécessite 6000 simulations effectuées et on a obtenu le résultat suivant :

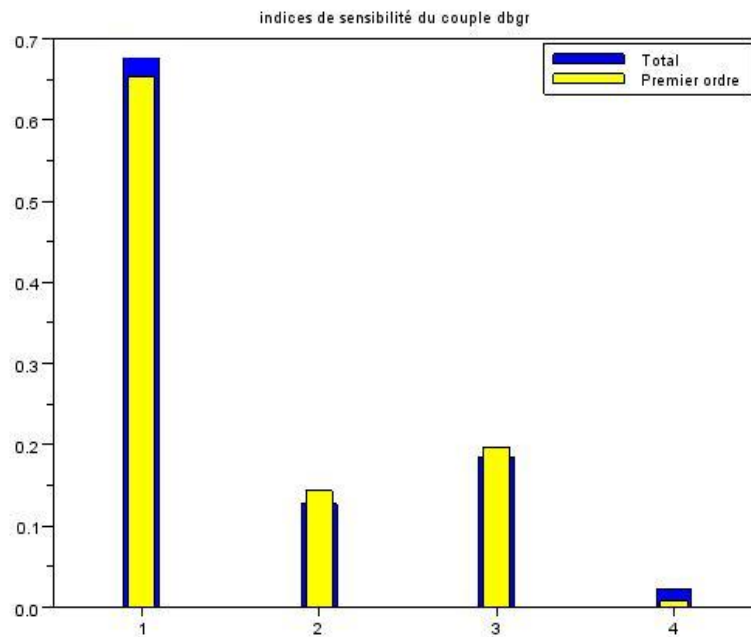


FIGURE 4.6 – Indices de sensibilités de premiers ordres et totaux par Monte-Carlo

Monte-Carlo :		
Paramètre	Indice de premier ordre $S_i$	indice total $S_{T_i}$
$X_1$ : Débit $Q$	0.65	0.67
$X_2$ : Angle d'entrée $\beta$	0.14	0.12
$X_3$ : Abscisse tourillon	0.19	0.18
$X_4$ : Ordonnée tourillon	0.008	0.02

**Remarque 4.2.2**

1. L'indice de sensibilité de premier ordre du débit est important ce qui signifie que le débit est influent sur la variation du couple.
2. L'indice total de sensibilité de l'abscisse du tourillon est faible ce qui signifie que l'abscisse du tourillon n'est pas influente sur la variation du couple même en prenant en compte les interactions avec les autres paramètres.
3. Les indices de sensibilité de premier ordre et total de l'angle d'entrée et de l'ordonnée du tourillon sont moins importants que ceux du débit ce qui signifie qu'ils sont moins influents que le débit
4. L'ordre d'influence des paramètres d'entrée sur le couple est le suivant : débit, ordonnée du tourillon et enfin l'angle d'entrée.
5. On voit déjà qu'il y a peu d'interactions car  $S_i \simeq S_{T_i}$  pour tout les paramètres d'entrée.

**4.2.5 Méthode des polynômes de chaos**

Les étapes de la méthode sont les suivantes :

1. Choix d'un groupe de variables stochastiques et d'un degré  $d$  du polynôme de chaos.
2. Générer un N-échantillon  $(\xi^i)_{i=1, \dots, N}$
3. Calculer pour chaque réalisation de l'échantillon les valeurs des entrées  $(X_j)$  sachant que

$$X_j(\xi^i) = \sum_k x_k \psi_k(\xi^i)$$

4. Réalisation du plan d'expériences numériques (pour chaque réalisation)

$$Y_i = f(X_1(\xi^i), \dots, X_n(\xi^i)), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

5. Calcul des coefficients  $y_k$  par intégration numérique, sachant que :

$$Y = \sum_k y_k \psi_k(X(\xi))$$

Avec cette méthode nous obtenons pour les variables d'entrée suivantes :

Polynômes de chaos :						
Paramètre	unité	moyenne	variation	min	max	loi
$X_1$ : Débit $Q$	$(m^3.s^{-1})$	0.64	$\pm 0.03$	0.61	0.68	uniforme
$X_2$ : Angle d'entrée $\beta$	(°)	33	$\pm 10$	23	43	uniforme
$X_3$ : Abscisse tourillon	(mm)	0.00	$\pm 0.57$	-0.57	0.57	uniforme
$X_4$ : Ordonnée tourillon	(mm)	0.00	$\pm 0.57$	-0.57	0.57	uniforme



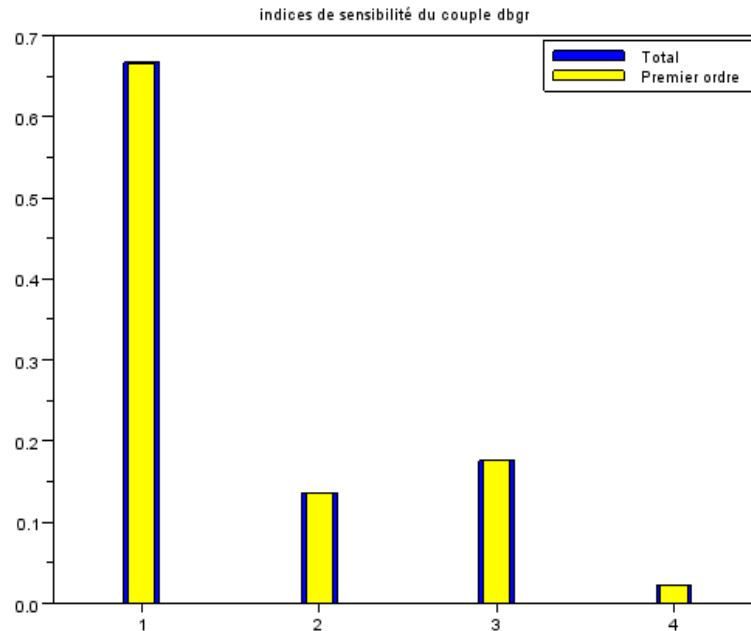


FIGURE 4.7 – Indices de sensibilités de premiers ordres et totaux par les polynômes de chaos

Pour les 4 paramètres incertains définis dans le tableau, la méthode des polynômes de chaos fait appel au code **dbgr** 81 fois et on obtient.

Polynômes de chaos :		
Paramètre	Indice de premier ordre $S_i$	indice total $S_{T_i}$
$X_1$ : Débit $Q$	0.66	0.66
$X_2$ : Angle d'entrée $\beta$	0.13	0.13
$X_3$ : Abscisse tourillon	0.17	0.17
$X_4$ : Ordonnée tourillon	0.01	0.01
Moyenne du couple	$-1.54N.m$	
Variance	$0.01N^2.m^2$	
intervalle de confiance	$[-1.65, -1.43] N.m$	

### Remarque 4.2.3

- On constate que les résultats de la méthode de Monte-Carlo et ceux de la méthode des polynômes de chaos sont proches et nous donnent le même ordre d'influences des paramètres d'entrée sur la variance du couple.
- La méthode des polynômes de chaos permet d'estimer les indices d'ordres élevés.

### 4.2.6 Comparaison des deux méthodes

#### Temps de calcul

##### Méthode de Monte-Carlo

- On a besoin de deux échantillons  $A$  et  $B$  de taille  $N$ .
- Le nombre de simulation à effectué est de  $N \times (n + 2)$  combinaisons des facteurs calculées à partir de  $A$  et  $B$ .
- Pour  $N = 1000$  et  $n = 4$  (nombre de paramètres incertains), le temps de calcul est :  $53453s \simeq 14h30$

##### Méthode des polynômes de chaos

- Le nombre de coefficients  $p$  est donné par  $p + 1 = \frac{(n + d)!}{n!d!}$  avec  $n$  le nombre de paramètres incertains et  $d$  le degré du polynôme de chaos.
- Le nombre de calcul à réaliser pour déterminer les coefficients est  $(d + 1)^n$ .
- Pour  $n = 4$  (nombre de paramètres incertains), et un degré 2, le nombre de coefficients est 15 et le nombre de simulation à effectué est 81 réalisées en 12 minutes.

**Remarque 4.2.4** *On remarque que la méthode de Monte-Carlo est très gourmande en temps de calcul, par contre la méthode des polynômes de chaos réduit le nombre de simulation et ainsi le nombre d'appel au code numérique et le temps de calcul.*

*Le désavantage de la méthode des polynômes de chaos est que le nombre de simulation augmente exponentiellement avec le nombre de paramètres incertains. Malgré cela c'est la méthode que nous avons privilégiée et avec laquelle on a fait l'analyse de sensibilité pour d'autres paramètres incertains que nous verrons dans la suite.*

**Remarque 4.2.5** *Nous avons réalisé l'analyse de sensibilité avec les deux méthodes en faisant varier l'abscisse du tourillon et l'ordonnée du tourillon dans le repère absolue, mais nous avons remarqué que l'influence de la position du tourillon dépend de la position de la directrice dans ce repère. Nous avons donc fait l'analyse de sensibilité dans le repère lié à la directrice comme il a été indiqué dans (4.2.5, 4.2.4). Pour valider cela nous avons fait l'analyse pour une directrice à  $20^\circ$  suivant l'axe  $OX$  et pour une directrice à  $20^\circ$  suivant l'axe  $OY$  et nous avons comparé les résultats obtenus (voir annexe D (page 8))*

### 4.2.7 Comparaison avec la mesure

Pour voir comment varie le couple en fonction des ouvertures et pour comparer avec les résultats expérimentaux, nous avons fait une analyse de sensibilité par la méthode des polynômes de chaos, pour chaque ouverture de la directrice (5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40). Nous avons tracé les moyennes des couples et leur fourchette pour toutes les ouvertures sachant que

$$\text{Fourchette} = \text{Moyenne du couple} \pm \sqrt{\text{Variance}}$$

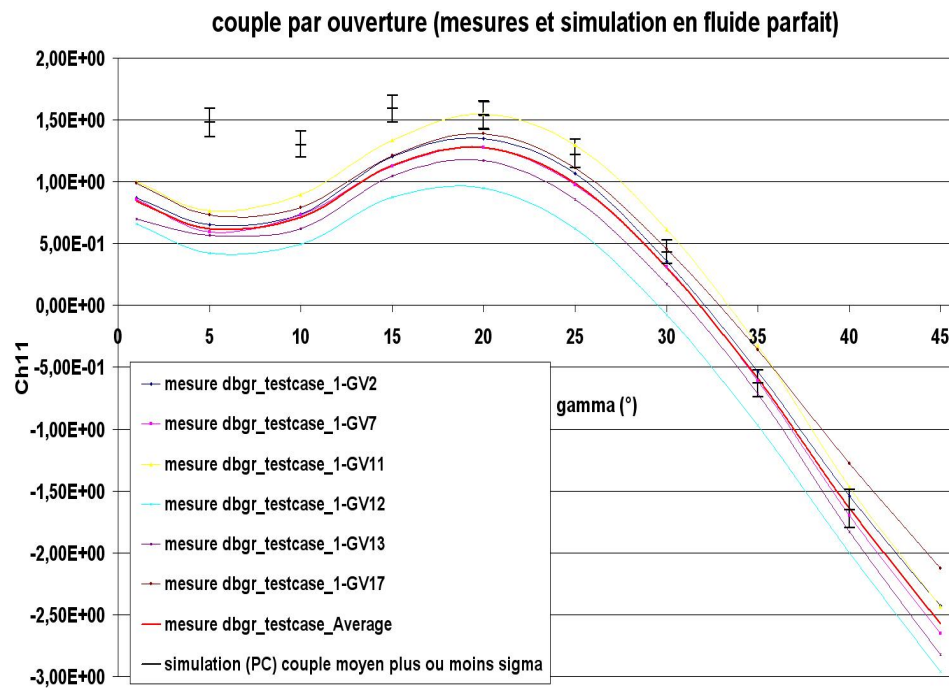


FIGURE 4.8 – Couple moyen et fourchette pour chaque ouverture

**Remarque 4.2.6**

- On remarque que les résultats que nous avons obtenu par la méthode des polynômes de chaos au niveau des grandes ouvertures de la directrice.
- Au niveau des faibles ouvertures il y a des écarts qu'on peut expliquer par le code de calcul utilisé (dbgr fluide parfait).

Nous avons aussi représenté les indices de sensibilité pour chaque ouverture de la directrice, on rappelle que les paramètres incertains ou d'entrée sont (débit, angle d'entrée, position du tourillon).

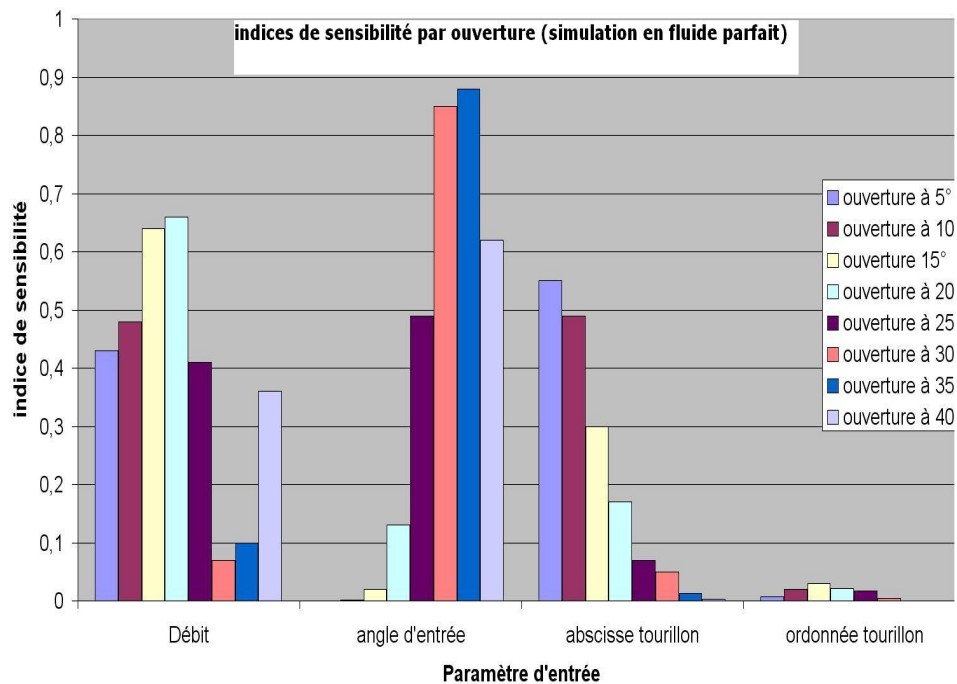


FIGURE 4.9 – Indices de sensibilité pour chaque ouverture

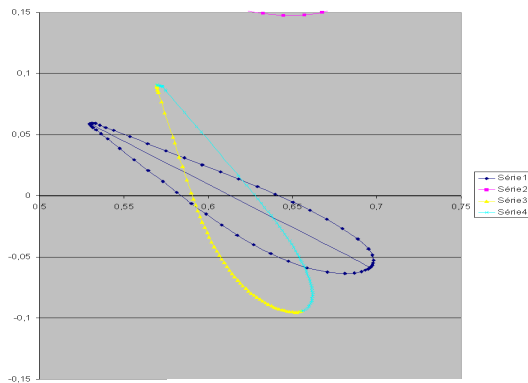
Les couleurs représentent les ouvertures et les barres représentent les indices de sensibilité.

#### Remarque 4.2.7

- Nous constatons que l'ordre d'influence des paramètres sur la variation du couple change en fonction de l'ouverture, en effet à 20° le débit est le plus influent suivi de l'abscisse du tourillon et de l'angle d'entrée, par contre à faibles ouvertures c'est l'abscisse du tourillon qui influence le plus suivi du débit alors que l'angle d'entrée devient non influent, mais c'est ce paramètre qui devient le plus influent aux grandes ouvertures suivi par les débit et l'abscisse du tourillon devient moins influent.
- On peut dire que le débit est toujours influent sur la variation de la sortie pour toutes les ouvertures sauf 30° et 35°, ce qui est le contraire de l'ordonnée qui reste toujours non influent

### 4.2.8 Etudes complémentaires (influence de l'angle de la directrice et du calage)

Influence de l'angle de la directrice  $\gamma$



Nous avons introduit le paramètre angle d'ouverture de la directrice aux autres paramètres d'entrée et nous avons fait une analyse de sensibilité en variant les autres paramètres comme dans le tableau D, plus la variation de l'angle d'ouverture qui est de 20 entre 19.7 et 20.3.

Nous avons obtenu :

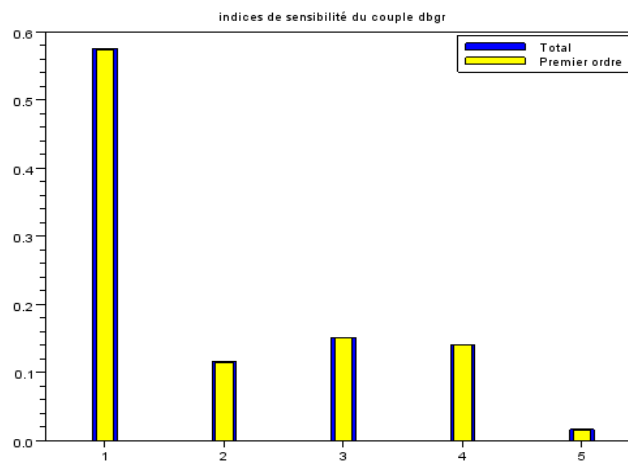


FIGURE 4.10 – Indices de sensibilité en introduisant l'angle d'ouverture pour  $\gamma = 20^\circ$

Polynômes de chaos :		
Paramètre	Indice de premier ordre $S_i$	indice total $S_{T_i}$
$X_1$ : Débit $Q$	0.57	0.57
$X_2$ : Angle d'entrée $\beta$	0.11	0.11
$X_2$ : Angle de l'ouverture $\gamma$	0.15	0.15
$X_4$ : Abscisse tourillon	0.14	0.14
$X_5$ : Ordonnée tourillon	0.01	0.01
Moyenne du couple	$-1.55N.m$	
Variance	$0.014N^2.m^2$	
intervalle de confiance	$[-1.67, -1.43] N.m$	

**Remarque 4.2.8** Nous constatons que l'angle d'ouverture de la directrice est influent au même niveau de grandeur ou d'influence que celui de l'angle d'entrée et celui de l'abscisse tourillon sur la variation de la sortie.

*La variance du couple a augmenté après avoir ajouté l'angle d'ouverture comme paramètre incertain ce qui signifie que l'angle d'ouverture influence la variation du couple.*

### Influence du calage

On a ajouté le paramètre calage aux paramètres d'entrée et nous avons effectué l'analyse de sensibilité pour les données suivantes :

Polynômes de chaos :						
Paramètre	unité	moyenne	variation	min	max	loi
$X_1$ : Débit $Q$	$(m^3.s^{-1})$	0.64	$\pm 0.03$	0.61	0.68	uniforme
$X_2$ : Angle d'entrée $\beta$	(°)	33	$\pm 10$	23	43	uniforme
$X_2$ : Angle de la directrice $\gamma$	(°)	20	$\pm 0.3$	19.7	20.3	uniforme
$X_3$ : Abscisse tourillon	(mm)	0.00	$\pm 0.2$	-0.2	0.2	uniforme
$X_4$ : Calage	(°)	0.00	$\pm 5$	-5	+5	uniforme

**Remarque 4.2.9** *On a fixé le paramètre ordonnée du tourillon autour de sa moyenne pour diminuer le nombre d'appel au code numérique et ainsi le temps de calcul.*

Les résultats de l'analyse de sensibilité sont :

Polynômes de chaos :		
Paramètre	indice de premier ordre $S_i$	indice total $S_{T_i}$
$X_1$ : Débit $Q$	0.559	0.576
$X_2$ : Angle d'entrée $\beta$	0.142	0.153
$X_3$ : Angle de la directrice $\gamma$	0.059	0.093
$X_4$ : Abscisse tourillon	0.043	0.134
$X_5$ : Calage	0.077	0.166

Moyenne du couple	$-1.51N.m$
Variance	$0.016N^2.m^2$
intervalle de confiance	$[-1.637, -1.385] N.m$

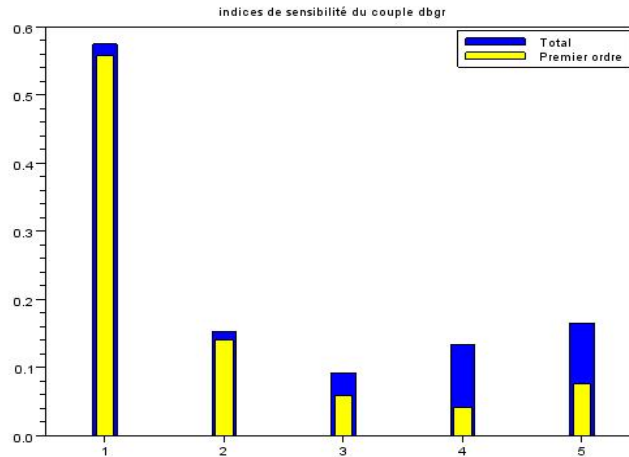


FIGURE 4.11 – Indices de sensibilité en introduisant le calage

**Remarque 4.2.10**

- On voit bien que les indices de premier ordre et total sont différents pour les paramètres d'entrée : calage, abscisse du tourillon et un peu moins l'angle d'entrée, ce qui signifie que les interactions entre les paramètres influencent la variation du couple.
- Comme l'analyse de sensibilité faite avant pour tous les paramètres sauf le calage avait montré que l'effet des interactions n'est pas influent, alors ce sont les interactions entre le calage et les autres paramètres qui influencent la variation du couple.
- Les interactions (calage, abscisse tourillon) suivi par (calage, angle de la directrice) sont les plus influents.

**4.2.9 Conclusion**

L'analyse de sensibilité dans le cas de fluide parfait nous a donné des informations sur les paramètres influençant le couple hydraulique de manœuvre de directrice ainsi que l'ordre de leur influence, elle nous a permis de savoir la nature du modèle (additif) et aussi les limites du modèle au niveau des faibles ouvertures en faisant la comparaison avec la mesure.

Nous allons maintenant faire une analyse de sensibilité en fluide visqueux et comparer avec les résultats du modèle fluide parfait.

## 4.3 Cas de fluide visqueux (RANS, OpenFoam)

### 4.3.1 OpenFoam

**OpenFOAM** est un logiciel open source<sup>5</sup> orienté CFD<sup>6</sup>, c'est un code multi-physique basé sur la résolution des équations de la mécanique des fluides par la méthode des volumes finis et qui est développé en C++. Il est livré avec de nombreux solvers couvrant plusieurs domaines tels que la combustion, les écoulements compressibles, incompressibles, multiphasique, ... et contient également différents modèles de turbulence tels que (RANS, LES, ...). Le post-traitement des résultats de calcul d'OpenFOAM, peut se faire avec le logiciel **Paraview** dont l'utilisation est assez courante dans le domaine de la CFD.

OpenFOAM permet donc de résoudre les équations de la mécanique des fluides pour des écoulements stationnaires ou instationnaires, compressibles ou incompressibles. Il permet aussi à l'utilisateur de créer ses propres solveurs.

OpenFOAM ne bénéficie pas d'une interface graphique, mais fonctionne avec un système de fichiers.

### 4.3.2 La géométrie étudiée

Pour des raisons de maillage et des difficultés rencontrées pour imposer les conditions de périodicité avec des maillages fait avec un logiciel interne d'Alstom, nous avons choisi d'utiliser la géométrie suivante dont le maillage est fait sous *Gambit* et qui permet de mettre en place les conditions de périodicité. Cette géométrie est identique à celle du modèle fluide parfait mais à une échelle différente.

Nous allons étudier la double grille d'une machine de moyenne chute, qui comporte 20 avant-directrices et 20 directrices et dont la géométrie est transmise à l'échelle modèle (diamètre de roue de sortie de la turbine = 350 mm

- Hauteur du distributeur  $H_d = 95.88$  mm
- Diamètre de perçage<sup>7</sup>  $\Phi_p = 425.76$  mm
- Ouverture de la directrice  $\gamma = 20^\circ$

Ce choix a été fait car techniquement nous n'avons pas de maillage adapté à l'utilisation d'OpenFOAM.

### 4.3.3 Les paramètres incertains

Les paramètres incertains avec lesquels nous avons fait notre analyse de sensibilité sont les suivants :

---

5. C'est un logiciel dont le code source est ouvert au public

6. Computational Fluid Dynamic = simulation numérique d'écoulement fluides

7. Le double de la distance du centre de la roue à l'axe de rotation des directrices



Monte-Carlo :						
Paramètre	unité	moyenne	variation	min	max	loi
$X_1$ : Débit $Q$	$(m^3.s^{-1})$	0.25	$\pm 0.01$	0.24	0.26	uniforme
$X_2$ : Angle d'entrée $\beta$	$(^\circ)$	33	$\pm 10$	23	43	uniforme
$X_3$ : Abscisse tourillon	(mm)	0.00	0.2	-0.2	0.2	uniforme
$X_4$ : Ordonnée tourillon	(mm)	212.88	0.2	212.68	213.07	uniforme

#### 4.3.4 Résultats

On a fait une analyse de sensibilité en utilisant la méthode des polynômes de chaos et le logiciel OpenFOAM, et nous avons obtenu :

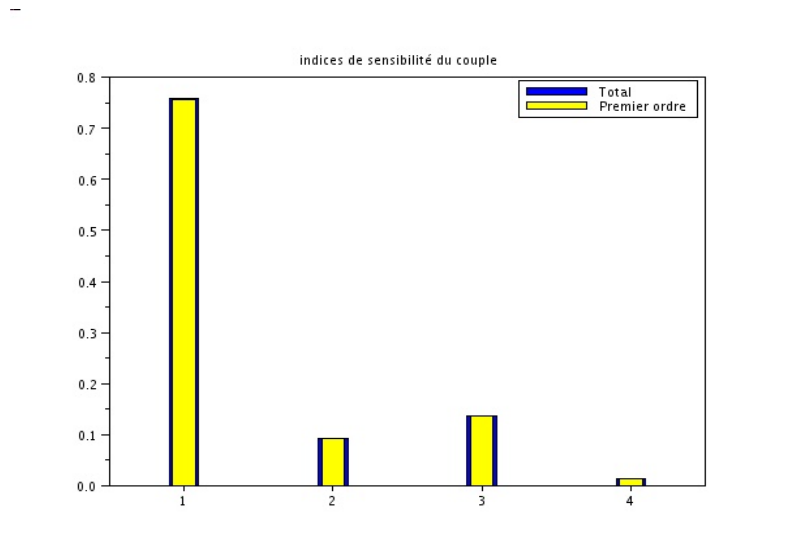


FIGURE 4.12 – Indices de sensibilité (OpenFOAM)

Polynômes de chaos :		
Paramètre	Indice de premier ordre $S_i$	indice total $S_{T_i}$
$X_1$ : Débit $Q$	0.75	0.75
$X_2$ : Angle d'entrée $\beta$	0.09	0.09
$X_3$ : Abscisse tourillon	0.13	0.13
$X_4$ : Ordonnée tourillon	0.01	0.01
Moyenne du couple	$-0.85 N.m$	
Variance	$0.002 N^2.m^2$	
intervalle de confiance	$[-0.91, -0.80] N.m$	

##### Remarque 4.3.1

- On a obtenu le même ordre d'influence des paramètres incertains que celui trouvé en fluide parfait.
- L'ordonnée du tourillon n'est pas influent.

- Les interactions entre les paramètres n'influencent pas la variation du couple.
- Le modèle est aussi additif.
- On ne peut pas conclure sur l'influence du modèle car nous avons utilisé une géométrie différente.

### 4.3.5 Etude complémentaire

#### influence de l'intensité et la longueur de turbulence

On a ajouté les deux paramètres intensité et longueur de turbulence aux paramètres incertains comme définit dans le tableau suivant :

Polynômes de chaos :						
Paramètre	unité	moyenne	variation	min	max	loi
$X_1$ : Débit $Q$	$(m^3.s^{-1})$	0.25	$\pm 0.01$	0.24	0.26	uniforme
$X_2$ : Angle d'entrée $\beta$	(°)	33	$\pm 10$	23	43	uniforme
$X_3$ : Abscisse tourillon	(mm)	0.00	$\pm 0.2$	-0.2	0.2	uniforme
$X_4$ : Intensité de la turbulence	( )	0.05	$\pm 0.005$	0.045	0.055	uniforme
$X_5$ : Longueur de la turbulence	(m)	0.0095	$\pm 0.00095$	0.0085	0.01	uniforme

Les résultats d'analyse de sensibilité sont :

Polynômes de chaos :		
Paramètre	$S_i$	$S_{T_i}$
$X_1$ : Débit $Q$	0.771	0.771
$X_2$ : Angle d'entrée $\beta$	0.092	0.092
$X_3$ : Abscisse tourillon	0.136	0.136
$X_4$ : Intensité de la turbulence	0.00	0.00
$X_5$ : Longueur de la turbulence	0.00	0.00

Moyenne du couple	$-0.858 N.m$
Variance	$0.003 N^2.m^2$
intervalle de confiance	$[-0.911, -0.804] N.m$

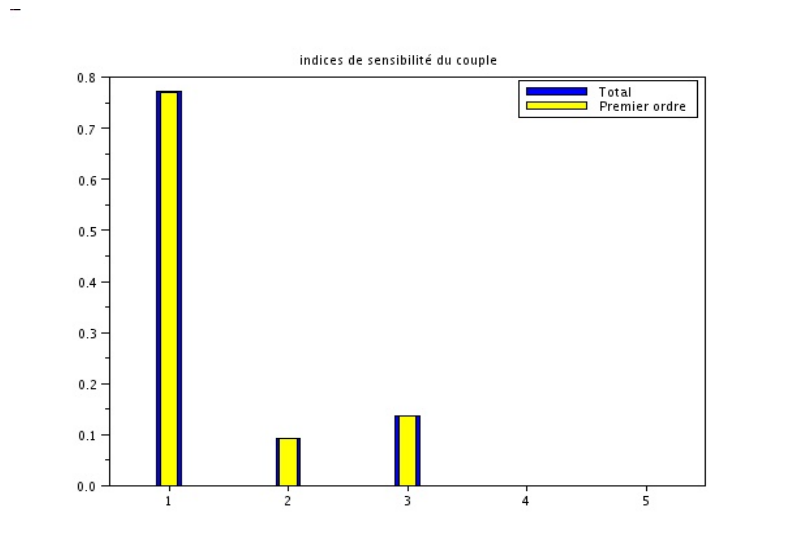


FIGURE 4.13 – Indices de sensibilité (OpenFOAM) en rajouttant l'intensité et la longueur de turbulence

#### Remarque 4.3.2

- Nous constatons que l'intensité et la longueur de turbulence n'influencent pas la variation du couple hydraulique.
- Le temps de calcul pour réaliser cette analyse de sensibilité est très grand environ trois jours de calcul.

#### Conclusion

La complexité d'OpenFOAM est un défaut de ce logiciel qui rend l'utilisation très difficile et complexe pour les personnes inexpérimentées, car contrairement aux logiciels commerciaux OpenFOAM ne bénéficie pas d'une interface graphique, mais fonctionne avec un système de fichier difficile à prendre en main et cachant plusieurs subtilités qui ne peuvent être éclaircies que par l'expérience et l'utilisation fréquente.

Ainsi nous n'avons pas pu faire notre analyse de sensibilité sur la même échelle que celle du fluide parfait, nous ne pouvons donc pas conclure sur la variation du couple hydraulique au niveau des faibles ouvertures et ainsi sur l'influence du modèle utilisé (fluide parfait, Navier-Stokes) sur la variation du couple. Néanmoins nous avons réussi à mettre en place un outil qui permet de faire l'analyse de sensibilité en Navier-Stokes, il faut maintenant continuer à exploiter l'outil tout en essayant de bien régler les problèmes de convergence des calculs sous OpenFOAM et de trouver un moyen pour mettre en place les conditions de périodicité en utilisant le mailleur interne d'Alstom.

---

## 5 Conclusion

Dans le cadre de ce stage nous avons utilisé deux méthodes d'analyse de sensibilité globale notamment la méthode de Monte-Carlo et la méthode des polynômes de chaos, ces deux méthodes sont efficaces et précises mais, souffrent toutes les deux du fléau de la dimension, en effet le temps de calcul devient très grand quand le nombre de paramètres incertains est grand. La méthode de Monte-Carlo demande un nombre d'itérations assez important pour converger (théorème centrale limite) et le nombre d'appel au code numérique par la méthode des polynômes de chaos devient vite important quand le degré et le nombre de paramètres d'entrée augmentent. Ce qui nous a limité à faire notre étude sur des échantillons Monte-Carlo de tailles 1000 et des polynômes de chaos de degré 2. Le calcul haute performance peut être une solution qui va permettre de faire la même étude avec des échantillons Monte-Carlo et un degré polynômes de chaos plus grands.

L'estimation à moindre coût des indices de sensibilité est d'actualité et constitue un axe de recherche de première importance dans les applications, pour développer des algorithmes qui permettent d'estimer les indices de sensibilité avec un coût indépendant du nombre de paramètres d'entrée, ou bien la recherche de plan d'expériences robustes.

La construction du métamodèle est aussi un moyen pour réduire le temps de calcul, surtout que les résultats obtenus montrent que le modèle est additif. Il faut donc continuer dans cette direction et utiliser les techniques existantes dans ce domaine à savoir : Backfitting, Krigeage, technique MARS, réseau de neurones, boosting d'arbres de régression, ....

En ce qui concerne l'utilisation de l'outil d'analyse de sensibilité mis en place, il peut être élargit pour d'autre type de calcul CFD en faisant quelques changements dans le code utilisé.

Pour finir et comme bilan personnel, ce stage de fin d'étude m'a permis de développer mes capacités d'adaptation et d'organisation, il a été aussi l'occasion pour moi de mettre en application les connaissances acquises au cours de ma formation d'ingénieur à Sup Galilée sur un cas industriel d'une entreprise d'envergure internationale Alstom et d'avoir de nombreux échanges avec des spécialistes des deux domaines fluide (Alstom) et statistique (Université Joseph Fourier).

---

# Bibliographie

- [1] A. Saltelli K. Chan and E.M. Scott. *Sensitivity Analysis*. Wiley, 2000.
- [2] B. Iooss. Revue sur l'analyse de sensibilité globale de modèles numériques. *Société Française de Statistique*, Vol 152 No 1 1-23, 2011.
- [3] W. Hoeffding. A class of statistics with asymptotically normal distributions. *Annals of Mathematical Statistics*, 19 :293-325, 1948.
- [4] A. Saltelli M. Ratto T. Andres F. Campolongo J. Cariboni D. Gatelli M. Saisana S. Tarantola. *Global Sensitivity Analysis*. Wiley, 2008.
- [5] T. Homma et A. Saltelli. Importance measures in global sensitivity analysis of non linear models. *Reliability Engineering and System Safety*, 52 :1-17, 1996.
- [6] I.M. Sobol. Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models. *Mathematical Modelling and Computational Experiments*, 1 :407-414, 1993.
- [7] S. Da-Veiga. *Analyse d'incertitude et de sensibilité Application aux modèles de cinétique chimique*. PhD thesis, Université Toulouse III, 2007.
- [8] J. Jacques. *Contribution à l'analyse de sensibilité et à l'analyse discriminante généralisée*. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble 1, 2005.
- [9] A. Marrel B. Iooss S. Da-Veiga M. Ribatel. Global sensitivity analysis of stochastic computer models with joint metamodels. HAL : hal-00525489, version 1, 2011.

# Annexes

# A Application du modèle additif

D'après les résultats d'analyse de sensibilité que nous avons obtenu en fluide parfait, le modèle est additif pour tous les paramètres sans le calage, nous avons donc choisi de construire un métamodèle en utilisant l'algorithme du Backfitting, nous avons utilisé pour cela le package GAM<sup>1</sup> de R<sup>2</sup>, mais avant nous avons construit notre plan d'expérience en utilisant Scilab ce dernier est enregistré sous forme de fichiers qui sont lu par R.

Nous avons construit notre plan d'expérience pour les paramètres suivants :

paramètre	moyenne	variation I	min	max	loi
$X_1$ : débit $Q$	$1.006 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$	$\pm 0.05 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$	$0.956 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$	$1.056 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$	Uniforme
$X_2$ : angle d'entrée $\beta$	$33^\circ$	$\pm 10^\circ$	$23^\circ$	$43^\circ$	Uniforme
$X_3$ : abscisse tourillon	0.0 mm	$\pm 0.57 \text{ mm}$	-0.57 mm	0.57 mm	Uniforme
$X_4$ : ordonnée tourillon	0.0 mm	$\pm 0.57 \text{ mm}$	-0.57 mm	0.57 mm	Uniforme

Les courbes suivantes représentent les splines lissées des quatre paramètres incertains. L'axe Y est centré autour de zero et les barres sur l'axe des X indiquent le nombre d'observations.

On peut voir que pour le paramètre ordonnée du tourillon l'intervalle de confiance est large ce qui signifie que le prédicteur (ou fonction des transformations non linéaires) n'est pas très bon pour ce paramètre. Par contre pour les autres paramètres les prédicteurs sont bons.

Nous constatons aussi que la relation entre les paramètres débit et abscisse du tourillon et leurs fonctions de transformations est une relation linéaire forte (corrélation positive) et que la relation entre l'angle d'entrée et sa fonction de transformations est linéaire forte négative, par contre pour l'ordonnée du tourillon il y a une tendance non linéaire.

Pour faire l'analyse de sensibilité il faut trouver la forme du métamodèle en fonction des fonctions lissées, et d'appliquer la méthode de Monte-Carlo définie dans la partie théorique en remplaçant le modèle par le métamodèle.

---

1. Generalized Additive Models

2. Langage de programmation pour le traitement de données et l'analyse statistique

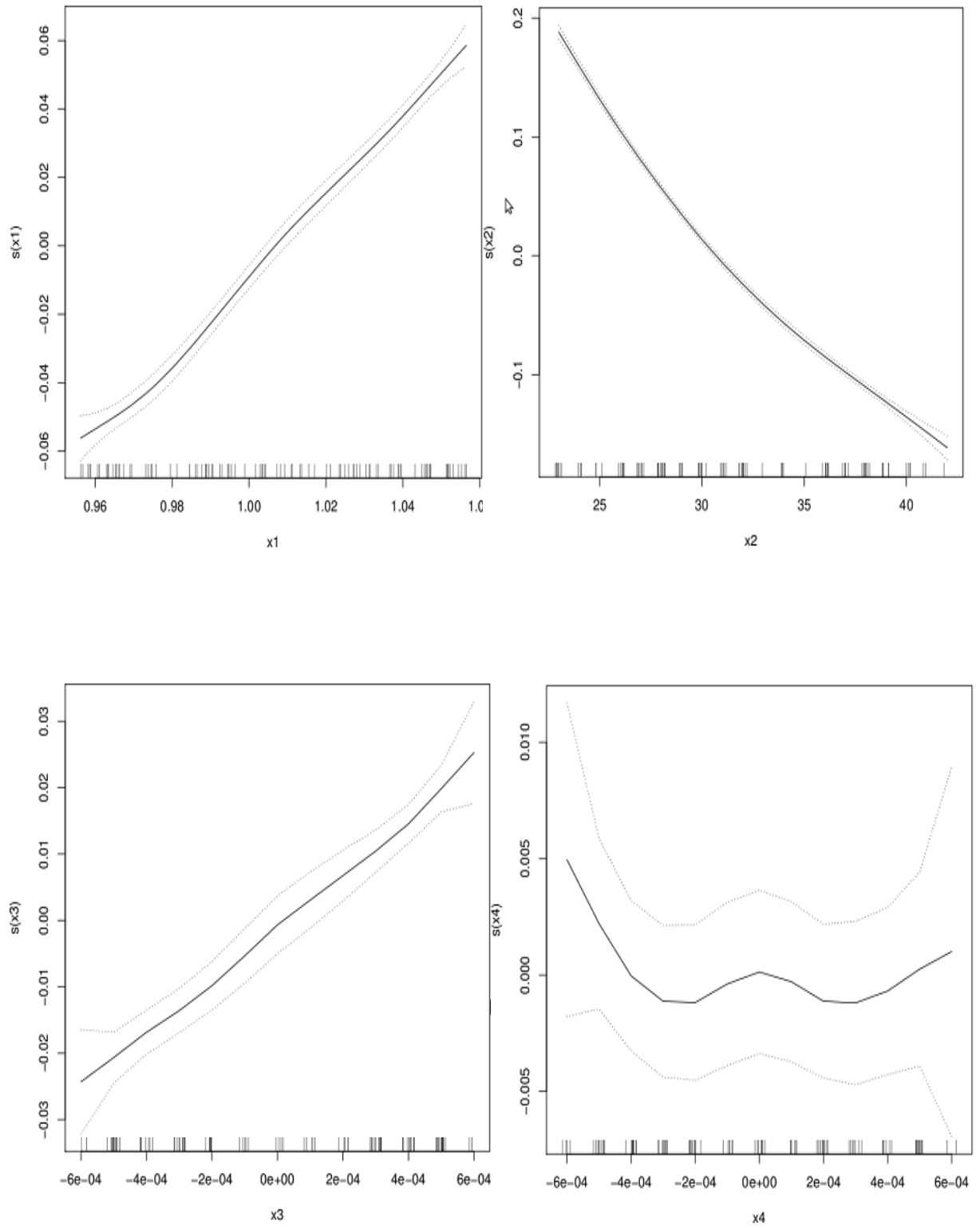


FIGURE A.1 – Contribution partielle des variables avec les intervalles de confiances



## B Analyse de sensibilité par les scatterplots

On peut aussi faire une analyse de sensibilité en visualisant les nuages de points en utilisant un plan d'expérience donné par des simulation Monte-Carlo. On a construit un plan d'expérience pour les paramètres du tableau (A) et on a tracé les scatterplots suivant :

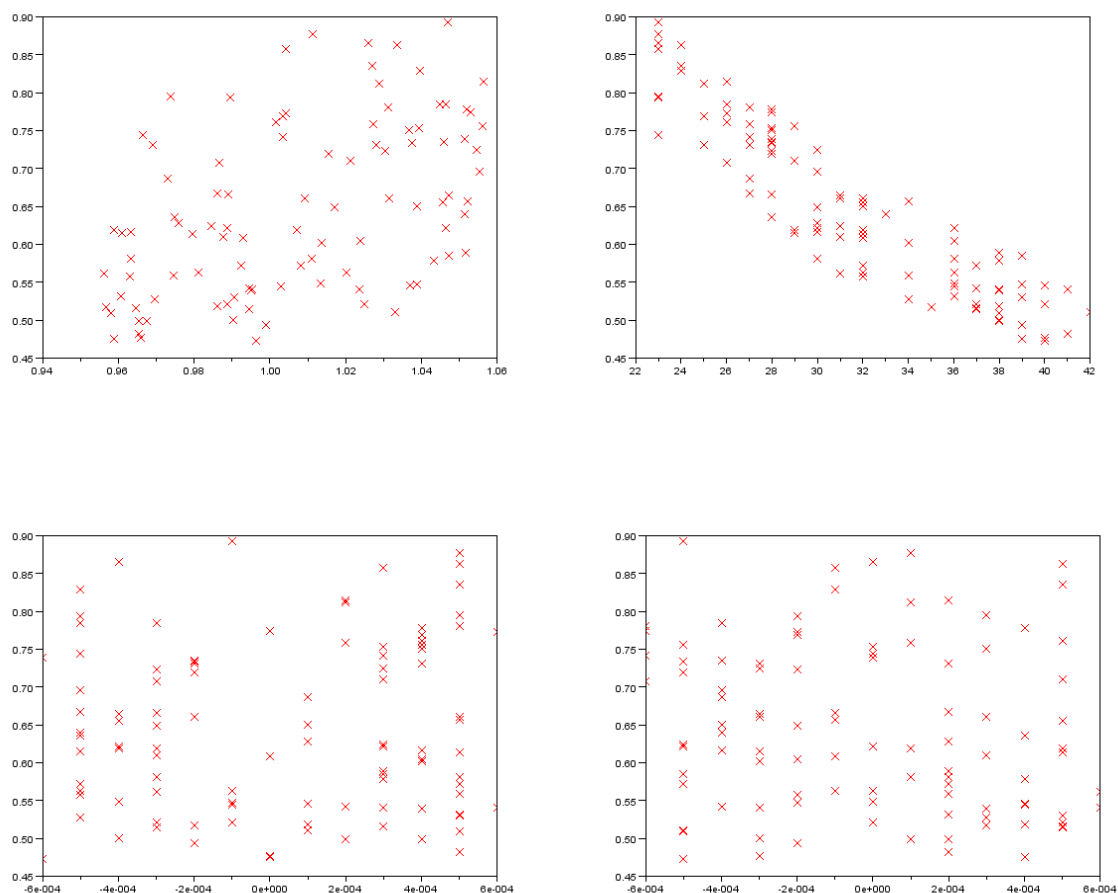


FIGURE B.1 – Scatterplots

L'axe des  $Y$  représente la sortie du modèle et l'axe des  $X$  représente respectivement le débit, l'angle d'entrée, l'abscisse du tourillon et l'ordonnée du tourillon. Comme nous pouvons le constater sur les figures suivantes dont l'ordre est (débit, angle, abscisse, ordonnée), il est clair que c'est l'angle d'entrée qui influence le plus

la variation du couple suivi du débit, les deux autres paramètres abscisse et ordonnée du tourillon n'influencent pas. En effet comme on peut le voir il y a une relation linéaire forte entre l'angle d'entrée et la sortie, une relation linéaire faible entre le débit et la sortie, par contre on constate une tendance non linéaire pour les deux autres paramètres.

# C Validation des fonctions Monte-Carlo et Polynômes de chaos

Pour valider les deux fonctions principales de notre code, à savoir la fonction qui estime les indices de sensibilité par la méthode de Monte-Carlo et la fonction qui approxime les indices de sensibilité par les polynômes de chaos, nous avons appliqué les deux scripts sur les fonctions tests Ishigami et la gfunction dite aussi fonction de Sobol très souvent utilisées dans la littérature.

La fonction Ishigami est donnée par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1) + 7 \sin(x_2) + 0.1x_3^4 \sin(x_1)$$

La gfunction est donnée par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = \prod_{i=1}^3 g_i(x_i),$$

avec  $g_i(x_i) = (|4x_i - 2| + a_i)/(1 + a_i)$ , et  $a_i = (i - 1)/2$

Le tableau suivant nous présente les indices de sensibilité théoriques et ceux trouvés par nos scripts.

Ishigami :			
indice sensibilité	théorique	Monte-Carlo	Polynômes de chaos
$S_1$	0.3139	0.3101	0.3140
$S_2$	0.4424	0.4372	0.4421
$S_3$	0.0000	-0.0094	0.0000
$S_{T_1}$	0.5576	0.5518	0.5578
$S_{T_1}$	0.4424	0.4493	0.4421
$S_{T_1}$	0.2437	0.2416	0.2437

gfunction :			
indice sensibilité	théorique	Monte-Carlo	Polynômes de chaos
$S_1$	0.5062	0.5083	0.5094
$S_2$	0.2250	0.2287	0.2275
$S_3$	0.1265	0.1306	0.1283

Nous avons tracé aussi pour la méthode de Monte-Carlo les moyennes empiriques des indices de sensibilité avec les intervalles de confiances.

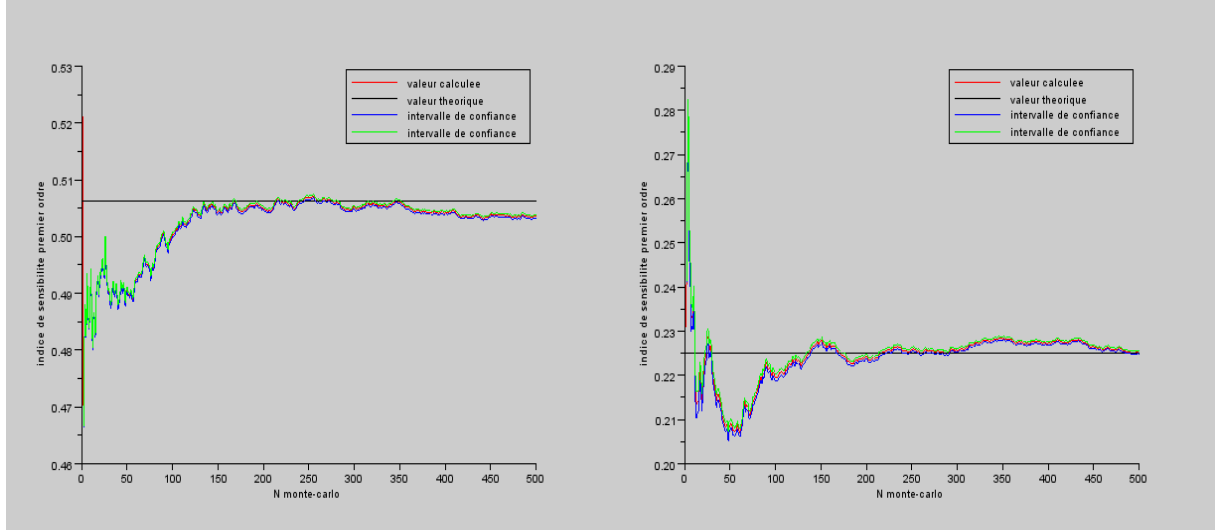
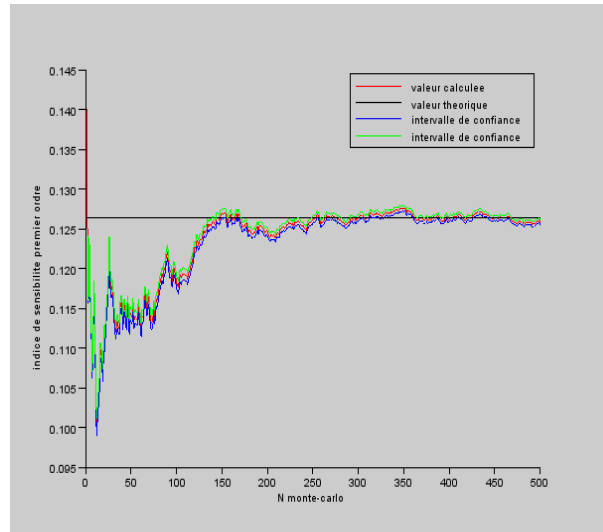

 FIGURE C.1 – Indice de premier ordre du paramètre  $X_1$ 

 FIGURE C.2 – Indice de premier ordre du paramètre  $X_1$ 

 FIGURE C.3 – Indice de premier ordre du paramètre  $X_3$ 

Nous avons tracé l'évolution de la moyenne empirique des indices de sensibilité et nous constatons que la moyenne reste autour des valeurs théoriques. Nous avons utilisé le théorème centrale limite.

**Théorème C.0.1** *de la limite centrale* Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées telles que  $E[X_1^2] < \infty$  et  $\sigma = \sqrt{V(X_1)} > 0$ . On note  $\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$  la moyenne empirique. Alors pour  $N \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{\sqrt{N}}{\sigma} (\bar{X}_N - E[X_1]) \rightarrow^L \mathcal{N}(0, 1)$$

## ANNEXE C. VALIDATION DES FONCTIONS MONTE-CARLO ET POLYNÔMES DE CHAOS

Comme dans notre cas nous ne connaissons pas la variance des indices de sensibilité, on va l'estimer par la variance empirique notée  $\tilde{S}_N$  et on a

$$\frac{\sqrt{N}}{\tilde{S}_N} (\bar{X}_N - E[X_1]) \rightarrow^L \mathcal{St}(N-1)$$

avec  $\mathcal{St}$  la loi de Student à  $N-1$  degrés de libertés.

D'où  $P\left(-t \leq \frac{\sqrt{N}}{\tilde{S}_N} (\bar{X}_N - E[X_1]) \leq t\right) = 1 - \alpha$  où  $t$  est le fractile d'ordre  $1 - \frac{\alpha}{2}$  de la loi  $\mathcal{St}(N-1)$ .

L'intervalle de confiance bilatéral symétrique pour l'espérance s'écrit donc au niveau  $1 - \alpha$  ( $\alpha = 5\%$ ) sous la forme suivante ;

$$IC(E[X_1]) = \left[ \bar{X}_N - t \frac{\tilde{S}_N}{\sqrt{N}}, \bar{X}_N + t \frac{\tilde{S}_N}{\sqrt{N}} \right]$$

Ceci nous permet aussi de déterminer la précision de la convergence de Monte-Carlo.

## D Modification du repère définissant l'axe du tourillon

Nous avons remarqué que les résultats de l'analyse de sensibilité des deux paramètres abscisse tourillon et ordonnée du tourillon changent suivant la position de la directrice, en effet l'ordre d'influence des ces deux paramètres s'inverse selon que la directrice soit suivant l'axe  $OX$  ou suivant l'axe  $OY$ . Pour remédier à cela nous avons choisis de faire varier l'abscisse et l'ordonnée du tourillon dans un repère lié à la directrice tel que l'axe  $Ox$  est suivant la longueur de la directrice et l'axe  $Oy$  suivant sa largeur.

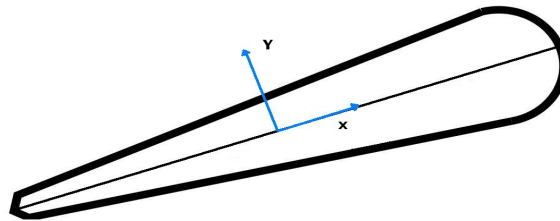


FIGURE D.1 – Variation de la position du tourillon

Polynômes de chaos :						
Paramètre	unité	moyenne	variation	min	max	loi
$X_1$ : Débit $Q$	$(m^3.s^{-1})$	0.64	$\pm 0.03$	0.61	0.68	uniforme
$X_2$ : Angle d'entrée $\beta$	(°)	33	$\pm 10$	23	43	uniforme
$X_3$ : Abscisse tourillon	(mm)	0.00	0.57	-0.57	0.57	uniforme
$X_4$ : Ordonnée tourillon	(mm)	0.00	0.57	-0.57	0.57	uniforme

Avec les paramètres du tableau ci-dessus nous obtenons pour deux directrices une suivant l'axe  $OX$  et l'autre suivant l'axe  $OY$  l'analyse de sensibilité suivante.

## ANNEXE D. MODIFICATION DU REPÈRE DÉFINISSANT L'AXE DU TOURILLON9

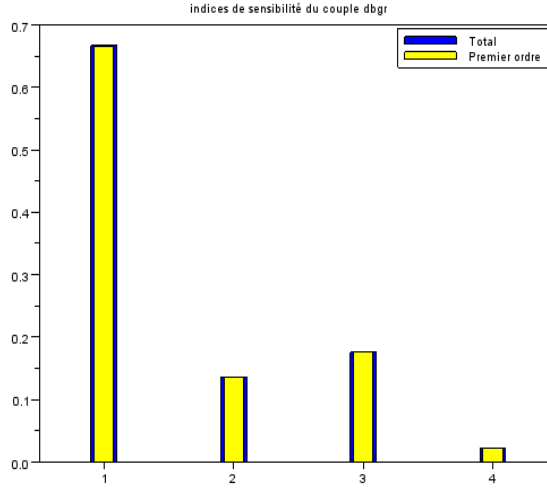


FIGURE D.2 – Directrice suivant l'axe OX

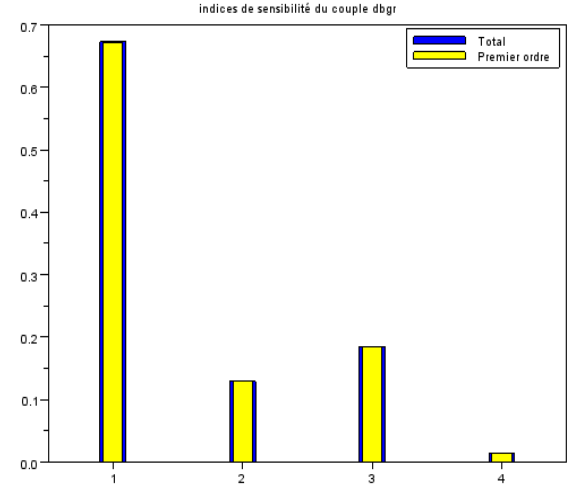


FIGURE D.3 – Directrice suivant l'axe OY

Polynômes de chaos :		
Paramètre	$S_i$	$S_{T_i}$
$X_1$ : Débit $Q$	0.66	0.66
$X_2$ : Angle $\beta$	0.13	0.13
$X_3$ : Abscisse	0.17	0.17
$X_4$ : Ordonnée	0.01	0.01

Moyenne	$-1.54N.m$
Variance	$0.01N^2.m^2$
Fourchette	$[-1.65, -1.43]N.m$

Polynômes de chaos :		
Paramètre	$S_i$	$S_{T_i}$
$X_1$ : Débit $Q$	0.67	0.67
$X_2$ : Angle $\beta$	0.12	0.12
$X_3$ : Abscisse	0.18	0.18
$X_4$ : Ordonnée	0.01	0.01

Moyenne	$-1.55N.m$
Variance	$0.01N^2.m^2$
Fourchette	$[-1.66, -1.44]N.m$

**Remarque D.0.3** *On faisant varier l'abscisse du tourillon et l'ordonnée du tourillon dans le repère lié à la directrice, l'analyse de sensibilité devient indépendante de la position de la directrice autour de son axe de rotation.*

Nous présentons aussi les résultats de l'analyse de sensibilité obtenus par les deux méthodes Monte-Carlo et les polynômes de chaos dans le cas de la variation de la position du tourillon dans le repère absolue.

## D.1 Méthode de Monte-Carlo

Monte-Carlo :						
Paramètre	unité	moyenne	variation	min	max	loi
$X_1$ : Débit $Q$	$(m^3.s^{-1})$	0.64	$\pm 0.03$	0.61	0.68	uniforme
$X_2$ : Angle d'entrée $\beta$	(°)	33	$\pm 10$	23	43	uniforme
$X_3$ : Abscisse tourillon	(mm)	608.2	0.57	607.6	608.8	uniforme
$X_4$ : Ordonnée tourillon	(mm)	0.00	0.57	-0.57	0.57	uniforme

Nous avons fait une analyse de sensibilité, en prenant comme paramètres d'entrée les variables définies sur le tableau ci-dessus.

Nous avons utilisé deux échantillons Monte-Carlo de taille  $4 \times 1000$  ce qui fait 6000 simulations effectuées et on a obtenu le résultat suivant :

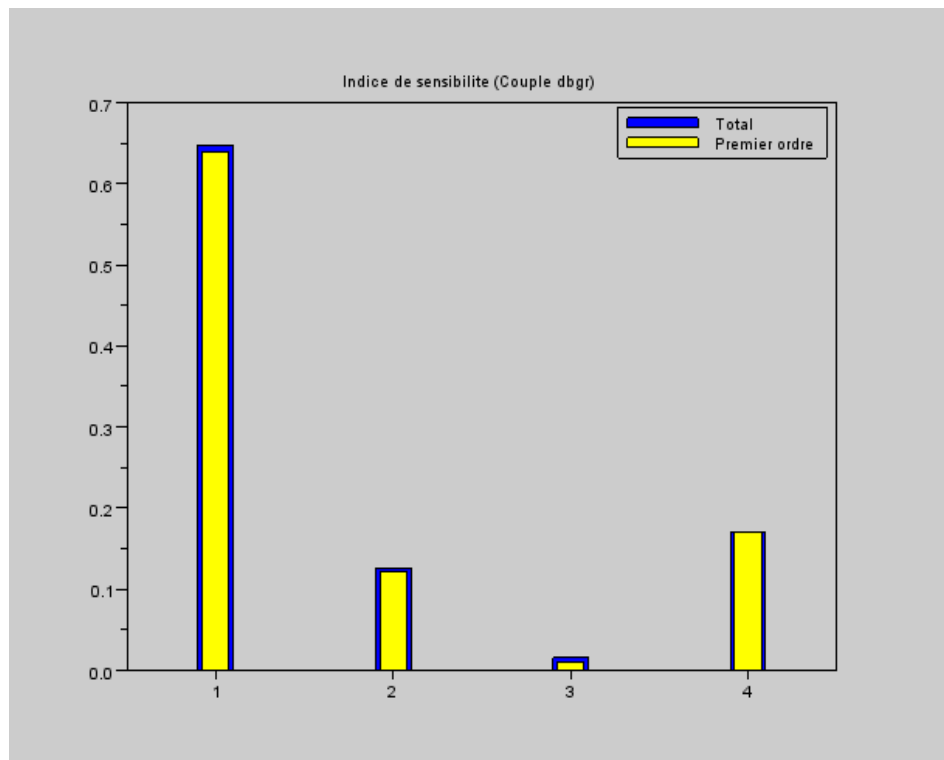


FIGURE D.4 – Indices de sensibilités de premiers ordres et totaux par Monte-Carlo

Monte-Carlo :		
Paramètre	Indice de premier ordre $S_i$	indice total $S_{T_i}$
$X_1$ : Débit $Q$	0.63	0.64
$X_2$ : Angle d'entrée $\beta$	0.12	0.12
$X_3$ : Abscisse tourillon	0.01	0.01
$X_4$ : Ordonnée tourillon	0.17	0.16



## D.2 Méthode des polynômes de chaos

Avec cette méthode nous obtenons pour les variables d'entrée suivantes :

Polynômes de chaos :						
Paramètre	unité	moyenne	variation	min	max	loi
$X_1$ : Débit $Q$	$(m^3.s^{-1})$	0.64	$\pm 0.03$	0.61	0.68	uniforme
$X_2$ : Angle d'entrée $\beta$	(°)	33	$\pm 10$	23	43	uniforme
$X_3$ : Abscisse tourillon	(mm)	608.2	0.57	607.6	608.8	uniforme
$X_4$ : Ordonnée tourillon	(mm)	0.00	0.57	-0.57	0.57	uniforme

Pour les 4 paramètres incertains définis dans le tableau, la méthode des polynômes de chaos fait appel au code **dbgr** 81 fois et on obtient.

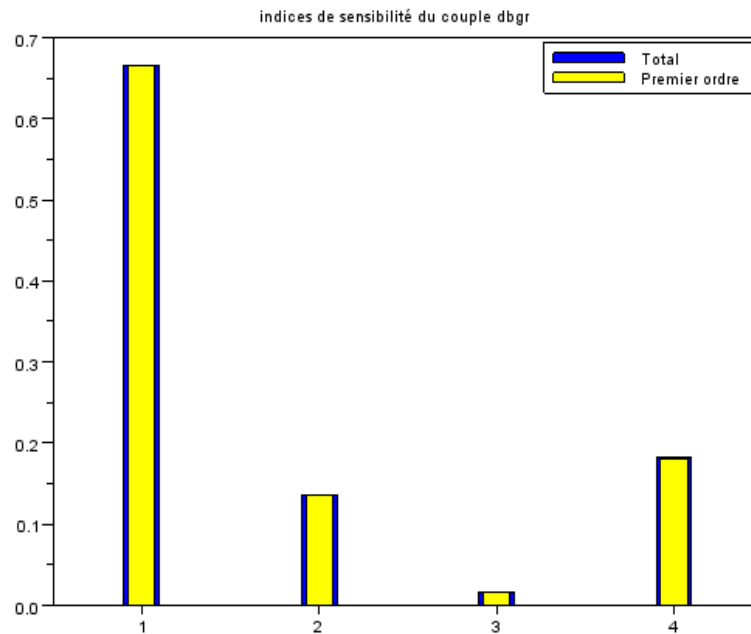


FIGURE D.5 – Indices de sensibilités de premiers ordres et totaux par les polynômes de chaos

Polynômes de chaos :		
Paramètre	Indice de premier ordre $S_i$	indice total $S_{T_i}$
$X_1$ : Débit $Q$	0.66	0.66
$X_2$ : Angle d'entrée $\beta$	0.13	0.13
$X_3$ : Abscisse tourillon	0.01	0.01
$X_4$ : Ordonnée tourillon	0.18	0.18
Moyenne du couple	$-1.54N.m$	
Variance	$0.004N^2.m^2$	
intervalle de confiance	$[-1.61, -1.48] N.m$	

**Remarque D.2.1**

- On constate que l'ordre d'influence des paramètres abscisse du tourillon et ordonnée du tourillon se sont inversé dans l'étude où ils sont donnés dans le repère absolu.
- Dans toutes les analyses de sensibilité réalisées dans le cas du fluide parfait les variations de l'abscisse et de l'ordonnée du tourillon sont faites dans le repère lié à la directrice.

# E Codes

Nous présentons ici les codes scilab des fonctions importantes utilisées dans notre étude :

## E.1 Monte-Carlo

```
// N: entier naturel, le nombre d'itérations Monte-Carlo
// p: entier naturel, le nombre de paramètres

function [couple,dev,indexfirst,indextotal] = MCarlo (donnee)

    clear all
    // lecture du fichier de donnee
    a=mgetl(donnee);
    ligne2=tokens(a(2),'␣');
    nbrparam=eval(ligne2(5));
    ligne=tokens(a(3+nbrparam+4),'␣');
    nbrproc=eval(ligne(4));
    ligne=tokens(a(3+nbrparam+2));
    gama=eval(ligne(5));
    ligne=tokens(a(3+nbrparam+1));
    gamabasic=eval(ligne(4));
    ligne=tokens(a(3+nbrparam+7));
    cheminexec=ligne(3);
    ligne=tokens(a(3+nbrparam+9));
    dbgdat=ligne(3);
    ligne=tokens(a(3+nbrparam+10));
    tordat=ligne(3);
    ligne=tokens(a(3+nbrparam+6),'␣');
    chemin=ligne(3);
    ligne=tokens(a(3+nbrparam+3),'␣');
    degre = eval(ligne(2));
    ligne=tokens(a(3+nbrparam+5),'␣');
    methode=ligne(3);
    ligne=tokens(a(3+nbrparam+11),'␣');
    N=eval(ligne(4));
    // compilation des fonctions utilisées
    exec(chemin+'sensitivityindex.sci', -1)
    exec(chemin+'nisp_cov.sci', -1)
```

```

exec(chemin+'Coupledbgr3.sci',-1)
exec(chemin+'CreerfichierSortieMC.sci',-1)
// initialisation des données
for i=1:nbrparam
    ligne=tokens(a(i+3),'␣');
    [lg,cl]=size(ligne);
    if ligne(lg-1)=='U' then
        loi(i)="Uniforme";
        Xmin(i)=eval(ligne(3));
        Xmax(i)=eval(ligne(4));

    elseif ligne(lg-1)=='N' then
        loi(i)="Normale";
        Esp(i)=eval(ligne(3));
        var(i)=eval(ligne(4));
    elseif ligne(lg-1)=='E' then
        loi(i)="Exponentielle";
        Espin(i)=eval(ligne(3));
    elseif ligne(lg-1)=='LN' then
        loi(i)="LogNormale";
        Esp(i)=eval(ligne(3));
        var(i)=eval(ligne(4));
    elseif ligne(lg-1)=='LU'
        loi(i)="LogUniforme";
        Xmin(i)=eval(ligne(3));
        Xmax(i)=eval(ligne(4));
    end
    para(i)=eval(ligne(2));
    variat(i)=abs(eval(ligne(3))-para(i));
    Xindice(i)=eval(ligne(lg)); // tableau des indices
    loie(i)=ligne(lg-1); // tableau des loies
end
// constructions des matrices de variables aléatoires
for i=1:N
    for j=1:nbrparam
        x1(i,j)=(para(j)-variat(j))+(2*variat(j))*rand(1,1);
        x2(i,j)=(para(j)-variat(j))+(2*variat(j))*rand(1,1);
    end
end
a=Coupledbgr3(x1,Xindice,nbrproc,gamabasic,gama,
chemin,cheminexec,dbgdat,tordat)
b=Coupledbgr3(x2,Xindice,nbrproc,gamabasic,gama,
chemin,cheminexec,dbgdat,tordat)
for j=1:nbrparam // calcul des espérances conditionnelles
    x3=x2;
    x3(1:N,j)=x1(1:N,j);
    temp=Coupledbgr3(x3,Xindice,nbrproc,gamabasic,gama,

```

```

chemin,cheminexec,dbgdat,tordat)
// calcul des indices de sensibilités
indexfirst(j)=sensitivityindex(a,temp);
indextotal(j)=1-sensitivityindex(b,temp);
end
// calcul du couple moyen
couple=mean(b);
dev=variance(b);
sortie=strsubst(donnee, '.txt', 'output.txt');
y=CreerfichierSortieMC(sortie,chemin,cheminexec,dbgdat,
tordat,methode,nbrproc,degre,gamabasic,gama,X,Xindice,
Xmin,Xmax,Esp,var,Espinv,loie,nbrparam,couple,dev,
indexfirst,indextotal)
// tracer les indices
scf();
bar(indextotal,0.2,'blue');
bar(indexfirst,0.15,'yellow');
legend(["Total" "Premier_ordre"],pos=1);
xtitle("indices_de_sensibilité_du_couple_dbgr");
// fin des tracés
endfunction

```

Listing E.1 – Monte-Carlo

## E.2 Polynômes de chaos

```

function [couple,dev,indexfirst,indextotal]=PChaos(donnee)

clear all

// lecture du fichier de donnee
a=mgetl(donnee);
ligne2=tokens(a(2),' ');
nbrparam=eval(ligne2(5));
ligne=tokens(a(3+nbrparam+4),' ');
nbrproc=eval(ligne(4));
ligne=tokens(a(3+nbrparam+2));
gama=eval(ligne(5));
ligne=tokens(a(3+nbrparam+1));
gamabasic=eval(ligne(4));
ligne=tokens(a(3+nbrparam+7));
cheminexec=ligne(3);
ligne=tokens(a(3+nbrparam+9));

```

```

dbgdat=ligne(3);
ligne=tokens(a(3+nbrparam+10));
tordat=ligne(3);
ligne=tokens(a(3+nbrparam+6),'_');
chemin=ligne(3);
ligne=tokens(a(3+nbrparam+3),'_');
degre = eval(ligne(2));
ligne=tokens(a(3+nbrparam+5),'_');
methode=ligne(3);
// compilation des fonction appelée

exec(chemin+'Coupledbgr3.sci',-1);
exec(chemin+'CreerfichierSortie3.sci',-1);

////////////////////////////////////

// Analyse de sensibilité par les polynome de chaos
t0=getdate() // pour le temps de calcul

loi=[];
// Représentation des paramètres incertains
// on determine la loi de paramètres incertains et leurs
paramètres
for i=1:nbrparam
    ligne=tokens(a(i+3),'_');
    [lg,cl]=size(ligne)
    if ligne(lg-1)=='U' then
        loi(i)="Uniforme";
        vu(i) =
            randvar_new(loi(i),eval(ligne(3)),eval(ligne(4)));
            // loi uniforme
        Xmin(i)=eval(ligne(3));
        Xmax(i)=eval(ligne(4));
    elseif ligne(lg-1)=='N' then
        loi(i)="Normale"
        vu(i)=
            randvar_new(loi(i),eval(ligne(3)),eval(ligne(4)));
            // loi normale
        Esp(i)=eval(ligne(3));
        var(i)=eval(ligne(4));
    elseif ligne(lg-1)=='E' then
        loi(i)="Exponentielle"
        vu(i) = randvar_new(loi(i),eval(ligne(3))); // loi
            exponentielle
        Espin(i)=eval(ligne(3));
    elseif ligne(lg-1)=='LN' then
        loi(i)="LogNormale"

```

```

        vu(i) =
            randvar_new(loi(i),eval(ligne(3)),eval(ligne(4)));
            // loi Lognormale
        Esp(i)=eval(ligne(3));
        var(i)=eval(ligne(4));
    elseif ligne(lg-1)=='LU'
        loi(i)="LogUniforme"
        vu(i) =
            randvar_new(loi(i),eval(ligne(3)),eval(ligne(4)));
            // loi loguniforme
        Xmin(i)=eval(ligne(3));
        Xmax(i)=eval(ligne(4));
    end
    Xindices(i)=eval(ligne(lg)); // tableau des indices
    X(i)=eval(ligne(2)); //
    loie(i)=ligne(lg-1); // tableau des loies
end
// nous définissons la collection de variables aléatoires
// incertaines srvu et après on ajoute les variables
// aléatoires incertaines dans la collection
srvu = setrandvar_new();
for i=1:nbrparam
    setrandvar_addrandvar ( srvu,vu(i));
end
nx = setrandvar_getdimension(srvu); // la dimension de la
// collection
// Représentation des variables stochastiques
// On définit la collection de variables stochastiques srvx,
// formée de variables uniformes dans [0,1].
for i=1:nbrparam
    vx(i) = randvar_new(loi(i));
end
srvx = setrandvar_new();
for i=1:nbrparam
    setrandvar_addrandvar ( srvx,vx(i));
end
ny = 1; // on précise le nombre de sortie du polynôme de chaos
// on crée le polynôme de chaos pc en lui transmettant la
// collection de variable stochastiques srvx, ce qui définit
// la base du développement

pc = polychaos_new ( srvx , ny );
polychaos_setdegree(pc,degre);
// Plan d'expériences numériques
// on construit sur la base de la collection de variables
// stochastiques srvx, un plan d'expériences, sur la base de
// la méthode d'intégration par quadrature

```

```

setrandvar_buildsample(srvx, methode, degre);
// par transformations probabilistes, le plan d'expérience
// construit sur les variables stochastiques est transformé en
// plan d'expérience sur les paramètres incertains
setrandvar_buildsample(srvu, srvx);
// Réalisation du plan d'expériences numériques
np = setrandvar_getsize(srvu); // donne la taille de la
// collection srvx(c'est le nombre d'expérience à réaliser)
// nous transmettons le nombre d'expérience au polynôme de
// chaos
polychaos_setsizetarget(pc, np)
// on réalise le plan d'expérience (simulation spécifiées) par
// srvu

for k=1:np
    inputdata = setrandvar_getsample(srvu, k);
    outputdata =
        Coupled bgr3(inputdata, Xindices, nbrproc, gamabasic,
        gama, chemin, cheminexec, dbgdat, tordat) // fonction à
        // changer pour l'étude souhaitée
    yscatter(k)=outputdata; // pour les scatter plot
    polychaos_settarget(pc, k, outputdata);
end

// Calcul des coefficients du polynôme de chaos par
// intégration
polychaos_computeexp(pc, srvx, "Integration");

// Edition de l'analyse de sensibilité

couple = polychaos_getmean(pc); // le couple moyen
dev = polychaos_getvariance(pc); // la variance

for i=1:nx
    indexfirst(i) = polychaos_getindexfirst(pc, i); // indice
    // de premier ordre
    indextotal(i) = polychaos_getindextotal(pc, i); // indice
    // total
end
// faire des scatter plot
sampling=setrandvar_getsample(srvu);
for k=1:nbrparam
    scf();
    plot(sampling(:, k), yscatter, 'rx');
    xistr="X"+string(k);
    xtitle("scatter_plot_for"+xistr, xistr, "Y");
end

```



```

end
// fin des scatter plot

// tracer les indices
scf();
bar(indextotal,0.2,'blue');
bar(indexfirst,0.15,'yellow');
legend(["Total" "Premier┐ordre"],pos=1);
xtitle("indices┐de┐sensibilit┐┐du┐couple┐dbgr");
// fin des trac┐s

// on d┐truit les variables le polyn┐me de chao et les
collections
polychaos_destroy(pc);
for i=1:nbrparam
    randvar_destroy(vu(i));
    randvar_destroy(vx(i));
end
setrandvar_destroy(srvu);
setrandvar_destroy(srvx);

temps=etime(getdate(), t0);
// ecriture du fichier de sortie
sortie=strsubst(donnee, '.txt', 'output.txt');
y=CreerfichierSortie3(sortie,chemin,cheminexec,dbgdat,tordat,methode,
nbrproc,degre,gamabasic,gama,X,Xindices,Xmin,Xmax,Esp,var,Espinv,loie,
nbrparam,couple,dev,indexfirst,indextotal)
endfunction

```

Listing E.2 – Polynômes de chaos

## E.3 Fonction appelant le logiciel fluide parfait (dbgr)

```

//ecrire fichier dbgr et tordat et extraire couple

function [y]=
    CoupledDbgr3(X,Xindice,nbrproc,gamabasic,gama,chemin,
cheminexec,dbgdat,tordat)

    clear all
    // compilation des fonction appel┐e

```

```

exec(chemin+'AbscOrdonne.sci',-1)
exec(chemin+'RotationGama.sci',-1)
exec(chemin+'CartesienApolaire.sci',-1)

// taille de la matrice de donnée
[N,M]=size(X);

//création des dossiers contenant les fichiers dbgdat et
//tordat et les fichiers in
unix('MD'+cheminexec);
dossier=[];
in=[];
essai=[];
out=[];
for i=1:nbrproc
    dossier(i)='\run'+string(i);
    in(i)='in'+string(i);
    essai(i)='essai'+string(i);
    out(i)='out'+string(i);
    unix('MD'+cheminexec+dossier(i));
    unix('echo'+essai(i)+'>'+cheminexec+dossier(i)+'\'+in(i))
end

// initialisation
p=nbrproc;
y=[];
xbase=0;
ybase=0;
// Debut
for i=1:N/p
    j=p*i-(p-1);
    for k=1:p
        cd(cheminexec);

////////////////////////////////////////
// creer le fichier dbgdat et
//tordat////////////////////////////////////////
//lecture de la (indice) ligne//
a=mgetl(dbgdat);
aa=mgetl(tordat);
b=eval(tokens(a(6),' '));
c=eval(tokens(a(2),' '));
d=eval(tokens(a(10),' '));
e=eval(tokens(a(4),' '));
bb=eval(tokens(aa(5),' '));

```

```

cc=eval(tokens(aa(6),'_'));
dd=eval(tokens(aa(5),'_'));
// affectation des variables

Rp=dd(2);
tetabase=cc(2);
xbase=Rp*cos(tetabase);
ybase=Rp*sin(tetabase);
[ligne,col]=size(a);
indice=grep(a,'Dir_3rt621a20_\\gamma_20^');
Nbr=ligne-indice-1;
Rin=d(1)/1000;
Hd=d(3)/1000;
var1=c(2);
var3=gama;
var4=0;
var5=0;
var6=e(3);

// changement des paramètres si correspondance
// avec les indices
for l=1:M
    if Xindice(l)==1 then
        var1=X(j+k-1,l);
    end
    VR=var1/((2*%pi)*Rin*Hd);
    c(2)=var1;
    if Xindice(l)==2 then
        var2=X(j+k-1,l);
        agl=X(j+k-1,l)*(%pi)/180;
        VU=VR/tan(agl);
        b(1)=VU;
    end
    if Xindice(l)==3 then
        var3=X(j+k-1,l);
    end
    if Xindice(l)==4 then
        var4=X(j+k-1,l);
    end
    if Xindice(l)==5 then
        var5=X(j+k-1,l);
    end
    if Xindice(l)==6 then
        var6=X(j+k-1,l)*%pi/180;
    end
end
end

```

```

// on cherche les coordonnées des points de la
// directrice (intrado et extrado)
[XYint,XYext] = AbscOrdonne(dbgdat);
// on fait une rotation gamma
[XYintR,XYextR] =
    RotationGama(XYint,XYext,gamabasic,var3,
    xbase+var4,ybase+var5);
// on va changer les coordonnées cartesiens en
// polaires
[RTetaintra,RTetaextra]=CartesienApolaire(XYintR,XYextR);
// on va changer dans dbgdat
// changement de la (indice) ligne//
a(6)=sprintf('%12.6f',b(1)); // ecriture de la
// vitesse tangentielle sur dbgdat
a(2)=sprintf('%4d%9.4f%10.5f%7.1f',c(1),c(2),c(3),c(4));
// ecriture du débit sur dbgdat
a(4)=sprintf('%4d%4d%9.5f%9.5f',e(1),e(2),var6,e(4));
// ecriture des courdonnées de la directices
// sur dbgdat
for l=1:Nbr
    mm=eval(tokens(a(indice+l+1),'_'));
    a(indice+l+1)=sprintf('%10.5f%10.5f%10.5f%10.5f%10.5f%10.5f',
    RTetaintra(1,l),mm(2),RTetaintra(2,l),RTetaextra(1,l),mm(1),
end

mputl(a,cheminexec+dossier(k)+'\'+essai(k)+'_dbgdat');
// création du fichier dbgdat

// creer le fichier tordat//
// recherche du repère lié à la directrice
pn=grep(a,'Dir_3rt621a20_0000gamma_20');
point=eval(tokens(a(pn+33),'_'));
xpoint=point(1)/(sqrt(1+tan(point(3))^2)*1000);
ypoint=point(1)*tan(point(3))/(sqrt(1+tan(point(3))^2)*1000);
vec1=[xpoint-xbase;ypoint-ybase];
vec2=[1;0];
prodsca=vec1'*vec2;
angle=acos(prodsca/(norm(vec1)*norm(vec2)));
xprim=xbase+var4*cos(angle)+var5*sin(angle);
yprim=ybase-var4*sin(angle)+var5*cos(angle);

bb(2)=sqrt(xprim^2+yprim^2); // rayon
// angle
if (xprim <> 0) then
    if (xprim < 0) then
        cc(2)=%pi+atan(yprim/xprim);
    else

```

```

        cc(2)=atan(yprim/xprim);
    end
else
    cc(2)=%pi/2;
end
// ecriture sur tordat
aa(5)=sprintf('%10.5f%10.5f',bb(1),bb(2)); //
    ecriture du rayon
aa(6)=sprintf('%10.5f%10.5f',cc(1),cc(2)); //
    ecriture de l'angte theta

mputl(aa,cheminexec+dossier(k)+'\'+essai(k)+'.tordat');
    // création du fichier tordat
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Lancement de
dbgr%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    // Lancement de dbgr
    if (p>2) then
        slp=4000;
    else
        // fixer le nombre de milliseconde
        d attente
        slp=1000;
    end

    if p==1 then
        cd(cheminexec+dossier(p));
        rr=unix('dbgr<'+in(p)); // si on a un proc
    else
        for k=1:p-1
            cd(cheminexec+dossier(k));
            unix('start_cmd/C_"dbgr_
                <'+in(k)+'>'+out(k)+'"');
            sleep(slp)
        end
        cd(cheminexec+dossier(p));
        unix('start_cmd/C_"dbgr_
            <'+in(p)+'>'+out(p)+'"'); // pour ne pas
            attendre apres le dernier run
    end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%extra
du
couple%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    // extraction du couple dans le cas d'un seul proc
    if p==1 then
        e=mgetl(cheminexec+dossier(p)+'\'+essai(p)+'.torlis');
        s=grep(e,'RESULTATS_PROFIL_No_2');
    end

```

```

        brr=tokens(e(s+12),'_');
        bprime(p)=eval(brr(6));
    else
        // extraction du couple dans le cas de
        // plusieurs proc
        for k=1:p
            cd(cheminexec+dossier(k));
            test=mgetl(cheminexec+dossier(k)+'\'+out(k));
            vec=grep(test,'NORMALLY');
            t0=getdate();
            while (vec==[]) // test avec grep
                test=mgetl(cheminexec+dossier(k)+'\'+out(k));
                vec=grep(test,'NORMALLY');
                xpause(2);
                time=etime(getdate(), t0);
                if (time >= 120) then
                    error('error_dbgr_a_plante:-(
                        !!!!');
                    break
                end
            end
            e=mgetl(cheminexec+dossier(k)+'\'+essai(k)+'_torlis');
            s=grep(e,'RESULTATS_PROFIL_No_2');
            brr=tokens(e(s+12),'_');
            bprime(k)=eval(brr(6));
        end
        for k=1:p
            cd(cheminexec+dossier(k));
            unix('DEL_'+out(k));
            unix('DEL_result.torlis');
        end
    end

    y=[y;bprime]; // couple
end
endfunction

```

Listing E.3 – Appel au logiciel dbgr et extraction du couple

## E.4 Fonction appelant le logiciel fluide visqueux (OpenFOAM)

```

//Appel au logiciel OpenFoam extraction du couple

function [y]= CoupleOpenFoam(X,Xindice ,chemin ,cheminexec
,transportProperties ,controlDict)

    clear all
    // compilation des fonction appelée

    // taille de la matrice de donnée
    [N,M]=size(X);

    //création du dossier de resultat
    //unix('mkdir '+cheminexec);
    //unix('cp '+transportProperties+'
        '+cheminexec+'/transportProperties ');
    //unix('cp '+controlDict+' '+cheminexec+'/controlDict ');
    //création du fichier in
    unix('echo oui >'+cheminexec+'/in')

    // initialisation

    y=[];
    xt=0;
    yt=0;
    debit=0;
    theta=0;
    const=0.09588/0.0066259;

    // Debut
    for i=1:N
        //////////////////////////////////////////
        écrire dans les fichiers controlDict et
        transportProperties////////////////////////////////////////
        //lecture des fichiers
        controlDict et transportProperties et recherche des
        lignes à changer//
        a=mgetl(transportProperties);
        b=mgetl(controlDict);
        a1=grep(a,'Q');
        a2=grep(a,'theta');
    end

```

```

a3=grep(a, 'It');
a4=grep(a, 'Lt');
b1=grep(b, 'CofR');
b2=grep(b, 'startTime');
b3=grep(b, 'endTime');
b4=grep(b, 'deltaT');
b5=grep(b, 'writeInterval');
c1=tokens(a(a1), ' ');
c2=tokens(a(a2), ' ');
c3=tokens(b(b1), ' ');
c4=tokens(b(b2(2)), ' ');
c5=tokens(b(b3(2)), ' ');
c6=tokens(b(b4), ' ');
c7=tokens(b(b5), ' ');
c8=tokens(a(a3), ' ');
c9=tokens(a(a4), ' ');
debit=eval(tokens(c1(11), ' '));
theta=eval(tokens(c2(11), ' '));
xt=eval(tokens(c3(3), ' '));
yt=eval(tokens(c3(4), ' '));
starttime=eval(tokens(c4(2), ' '));
endtime=eval(tokens(c5(2), ' '));
delta=eval(tokens(c6(2), ' '));
interval=eval(tokens(c7(2), ' '));
It=eval(tokens(c8(12), ' '));
Lt=eval(tokens(c9(12), ' '));
// changement des paramètres si correspondance avec
// les indices

for j=1:M
    if Xindice(j)==1 then
        debit=X(i,j);
    elseif Xindice(j)==2 then
        theta=X(i,j);
    elseif Xindice(j)==3 then
        xt=X(i,j);
    elseif Xindice(j)==4 then
        yt=X(i,j);
    elseif Xindice(j)==5 then
        It=X(i,j);
    elseif Xindice(j)==6 then
        Lt=X(i,j);
    end
end
// on va changer dans controlDict et
// transportProperties
// changement de la (indice) ligne//

```



```

a(a1)=sprintf( '%s%s%s%s%s%s%s%s%s%s%s' ,
    %s' , c1(1) , c1(2) , c1(3) , c1(4) , c1(5) , c1(6) , c1(7) , c1(8) ,
    c1(9) , c1(10) , debit , ';' ); // le debit
a(a2)=sprintf( '%s%s%s%s%s%s%s%s%s%s%s' ,
    %s' , c2(1) , c2(2) , c2(3) , c2(4) , c2(5) , c2(6) , c2(7) , c2(8) ,
    c2(9) , c2(10) , theta , ';' ); // l'angle d'entrée
a(a3)=sprintf( '%s%s%s%s%s%s%s%s%s%s%s' ,
    %s' , c8(1) , c8(2) , c8(3) , c8(4) , c8(5) , c8(6) , c8(7) , c8(8) ,
    c8(9) , c8(10) , c8(11) , It , ';' );
a(a4)=sprintf( '%s%s%s%s%s%s%s%s%s%s%s' ,
    %s' , c9(1) , c9(2) , c9(3) , c9(4) , c9(5) , c9(6) , c9(7) ,
    c9(8) , c9(9) , c9(10) , c9(11) , Lt , ';' );
b(b1)=sprintf( '%s%s%s%s%s%s%s%s' ,
    %s' , c3(1) , c3(2) , xt , yt , c3(5) , c3(6) , c3(7) , c3(8) , c3(9) , c3(10) ); //
    l'abscisse et l'ordonnée

mputl(a, cheminexec+' /constant/transportProperties' );
    // création du fichier transportProperties
mputl(b, cheminexec+' /system/controlDict' ); // création
    du fichier controlDict

////////////////////////////////////
    Lancement du calcul sous OpenFoam
////////////////////////////////////

chdir(cheminexec);
unix( 'applyBoundaryCylinder' )
unix( 'ofsub--mod-D_u-n_u2_u-R_u-S_u simpleFoam_u<_in' )
//unix( 'simpleFoam' )
////////////////////////////////////
    extraction du couple
////////////////////////////////////

chdir(cheminexec);
t=unix( 'cp_u-rf_u./'+string(endtime)+'_u'+chemin );
while ( t<>0)
    t=unix( 'cp_u-rf_u./'+string(endtime)+'_u'+chemin );
end
e=mgetl(cheminexec+' /forces/'+string(delta)+' /forces.dat' );
//e=mgetl(cheminexec+' /forces/'+string(0)+' /forces.dat' );
ind=endtime/delta;
e1=tokens(e(ind+1), '_u' );
couple=tokens(e1(9), '_u' );
couple=strsubst(couple, ')' , '' );
couple=eval(couple)*const;
y=[y;couple]; // couple

```

```

////////////////////////////////////
  supression des dossier et fichier des resultats
  //////////////////////////////////
chdir(cheminexec);
unix_g('rm_rf_0*_processor*_forces')
for i=starttime:(interval*delta):endtime
  if (i<>0) then
    unix_g('rm_rf_'+string(i))
  end
end

end
endfunction

```

Listing E.4 – Appel au logiciel OpenFOAM et extraction du couple