



Ingénieur Mathématiques Appliquées et Calcul scientifique
(MACS) 3ème année
Université de Paris XIII
2010-2011

La méthode multipôle rapide en électromagnétisme et en acoustique: calcul du champ lointain

Amer BEN SLIMANI

EADS IW
EADS France, Bâtiment Campus Engineering
Toulouse

Encadrant: M. Guillaume SYLVAND

EADS

Ce document est la propriété d'EADS FRANCE ; il ne peut être communiqué à des tiers et/ou reproduit sans l'autorisation préalable écrite d'EADS FRANCE et son contenu ne peut être divulgué.
© - EADS FRANCE - 2011

Table des matières

Introduction	5
Lieu de stage	7
EADS IW	7
1 Formulations intégrales	9
Introduction	9
1.1 Électromagnétisme	9
1.1.1 Modèle physique	9
1.1.2 Équations de Maxwell harmoniques	9
1.1.3 Représentation intégrale	10
1.1.4 Discrétisation	12
1.1.5 Écriture matricielle	13
1.2 Acoustique	13
1.2.1 Modèle physique	13
1.2.2 Équations de Helmholtz	14
1.2.3 Représentation intégrale	15
1.2.4 Discrétisation	16
1.2.5 Écriture matricielle	18
2 Champ lointain en acoustique	19
Introduction	19
2.1 Objectif	19
2.2 Établissement du champ lointain	19
2.3 Validation	21
Introduction	21
2.3.1 Principe de la validation	21
2.3.2 Résultats numériques	22

3	Méthode multipôle rapide	25
	Introduction	25
3.1	FMM en électromagnétisme	25
3.1.1	FMM mono-niveau	25
3.1.2	FMM multi-niveau	31
3.1.3	Champ lointain avec la FMM	35
3.1.4	Validation	38
3.2	FMM en acoustique	41
3.2.1	Préparation de la FMM	41
3.2.2	Calcul multipôle	42
3.2.3	Champ lointain avec la FMM	43
3.2.4	Validation	44
3.3	Résultats	48
3.3.1	Comparaison FMM avec FMM pour Anten	48
3.3.2	Comparaison Anten avec et sans FMM	48
4	Visualisation	51
	Introduction	51
4.1	Représentation du résultat en 2D	51
4.2	Représentation du résultat en polaire	52
4.3	Visualisation 3D	53
4.4	Visualisation sous la forme d'une sphère	55
4.5	Visualisation en 2d avec Matplotlib	56
4.6	Visualisation en 2d avec Paraview	56
	Conclusion	59
A	Théorème de représentation intégrale	61
A.1	Théorème de représentation	61

Introduction

Dans le cadre de la 3ème année de l'école d'ingénieurs Sup'Glilée, spécialité Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique (MACS), les étudiants sont amenés à faire un stage de fin d'études. Ce stage de fin d'études je l'ai effectué chez EADS IW (Innovation Works) à Toulouse.

Le contexte de stage rentre dans le cadre du post-traitement de la résolution des équations de Maxwell (ondes électromagnétiques) et de Helmholtz (ondes acoustiques). Aujourd'hui, chez EADS IW, il existe une famille de codes (ELFIPOLE pour l'électromagnétique et ACTIPOLE pour l'acoustique) qui résout les équations de Maxwell et de Helmholtz et calcule le champ proche avec deux méthodes : méthode classique et méthode multipôle rapide (FMM). Ces codes calculent aussi le champ lointain dans le cas de l'électromagnétisme mais juste avec la méthode classique. il n'y a donc pas de FMM pour champs lointains en électromagnétisme et pas de calcul du champ lointain en acoustique ni avec la méthode classique ni avec la FMM.

On souhaite pouvoir calculer le champ lointain via la FMM. Le champ lointain est calculé dans une direction (θ , ϕ), et correspond à la composante en $1/r$ du développement limité des champs E, H, p, V quand r tend vers $+\infty$. Aujourd'hui, ce calcul n'existe que en électromagnétisme (E, H) et sans accélération multipôle. Le stage consistait donc implémenter ce calcul en FMM pour l'électromagnétisme, et en mode classique et FMM pour l'acoustique.

Nous allons commencer par présenter brièvement le groupe EADS et l'entité IW (Innovation Works). Dans une première partie nous allons rappeler comment nous obtenons les équations intégrales à partir des équations de Maxwell et de Helmholtz. Ensuite nous allons rappeler le calcul du champ lointain en électromagnétisme et calculer le champ lointain en acoustique et nous présenterons quelques résultats avant de valider notre calcul du champ lointain acoustique. Dans une deuxième partie, nous allons présenter le principe de la méthode multipôles rapide, nous commencerons par sa version la plus simple dite mono-niveau puis dans sa version complète dite multi-niveau ([1]).

Ce document est la propriété d'EADS FRANCE ; il ne peut être communiqué à des tiers et/ou reproduit sans l'autorisation préalable écrite d'EADS FRANCE et son contenu ne peut être divulgué.

© - EADS FRANCE - 2011

Lieu de stage

EADS IW

EADS Innovation Works est l'Unité de Recherche et Technologie (R et T) du Groupe EADS. Avec des sites basés en France, en Allemagne, en Angleterre, en Chine, en Espagne, en Russie et à Singapour, représentant un réseau de plus de 700 personnes, il fournit des capacités de recherche d'envergure mondiale dans les secteurs de l'aéronautique, de la défense et de l'espace. En accord avec la stratégie R et T d'EADS et couvrant les qualifications et domaines technologiques d'importance critique pour le Groupe, EADS Innovation Works est organisé en sept centres techniques transnationaux :

- Les Technologies Composites
- Les Technologies Métalliques et l'Ingénierie des Surfaces
- L'Ingénierie des Structures, Production et Aéromécanique
- Les senseurs, l'Electronique et l'Intégration des Systèmes
- Ingénierie, Physique, Technologies de l'information, Services Sécurité et Simulation
- Energie et Propulsion
- Concepts et Scenarios Innovants

EADS Innovation Works est l'entité à la fois stratégique et opérationnelle visant à promouvoir la création de valeur ajoutée par l'innovation, les compétences et la collaboration entre les différents membres du Groupe. Il favorise l'excellence technologique et oriente la stratégie de marché par le partage de ses compétences entre les divers partenaires d'EADS et par le développement de partenariats avec les écoles, les universités et les centres de recherche au niveau international.

1 Formulations intégrales

Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre à la résolution des équations de Maxwell (électromagnétisme) et de Helmholtz (acoustique). Pour cela on va présenter les équations sous forme intégrale qu'on va discrétiser avec les éléments finis de frontière.

1.1 Électromagnétisme

1.1.1 Modèle physique

On considère un objet Ω parfaitement conducteur de frontière Γ se trouvant dans le vide. L'objet est illuminé par une onde électromagnétique incidente \vec{E}_{inc} de fréquence f et de pulsation $\omega = 2\pi f$. Notons \vec{E} (resp \vec{H}) le total électrique (resp magnétique). On aura comme inconnues les champs diffractés \vec{E}_{diff} et \vec{H}_{diff} à l'extérieur de notre objet Ω prolongés à l'intérieur par l'opposé des champs incidents $-\vec{E}_{inc}$ et $-\vec{H}_{inc}$ (de sorte que le champ total y sois nul). On note $\vec{\nu}$ la normale extérieur unitaire en tout de Γ .

1.1.2 Équations de Maxwell harmoniques

On considère une dépendance implicite en temps en $e^{-i\omega t}$. Les équations de Maxwell harmoniques de notre problème s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \vec{r} \otimes \vec{E} - i\omega\mu_0\vec{H} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 - \Omega \\ \vec{r} \otimes \vec{H} + i\omega\epsilon_0\vec{E} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 - \Omega \\ \vec{E} \wedge \vec{\nu}|_{\Gamma} = -\vec{E}_{inc} \wedge \vec{\nu}|_{\Gamma} & \text{sur } \Gamma \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} r|\sqrt{\epsilon_0}\vec{E} - \sqrt{\mu_0}\vec{H} \wedge \frac{\vec{r}}{r}| = 0 \end{cases}$$

Ce document est la propriété d'EADS FRANCE ; il ne peut être communiqué à des tiers et/ou reproduit sans l'autorisation préalable écrite d'EADS FRANCE et son contenu ne peut être divulgué.

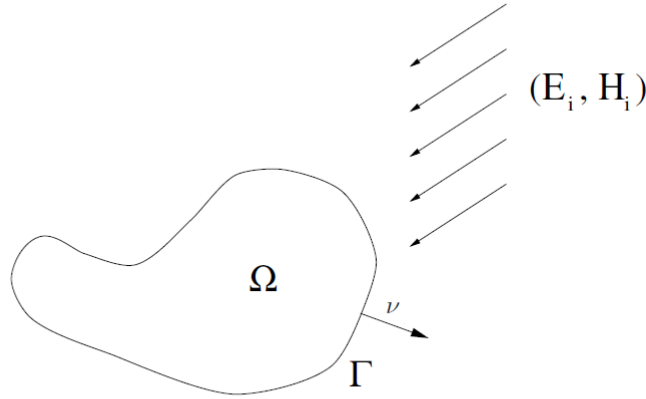


FIGURE 1.1 – problème traité

où ϵ_0 est la permittivité du vide et μ_0 est la perméabilité du vide. On note $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ l'impédance du vide et $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ la vitesse de propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide.

1.1.3 Représentation intégrale

On considère, \vec{j} et \vec{m} , les traces tangentielles du champ total sur Γ . Donc on a :

$$\begin{cases} \vec{j} = \vec{\nu} \wedge \vec{H}_{tot} \\ \vec{m} = \vec{\nu} \wedge \vec{E}_{tot} \end{cases}$$

Dans notre cas (matériau parfaitement conducteur) le champ \vec{m} est nul. Alors notre seule véritable inconnue est \vec{j} car, en connaissant \vec{j} et grâce au théorème de représentation intégrale des équations de Maxwell on peut calculer les champs diffractés, \vec{E} et \vec{H} en tout point de l'espace hors Γ :

$$\begin{cases} \vec{E}(y) = i\omega\mu_0 \int_{\Gamma} G(|y-x|)\vec{j}(x)dx + \frac{i}{\omega\epsilon_0} \text{grad}_y \int_{\Gamma} G(|y-x|) \text{div}_{\Gamma} \vec{j}(x)dx & y \in \mathbb{R}^3 - \Omega \\ \vec{H}(y) = -\text{rot}_y \int_{\Gamma} G(|y-x|)\vec{j}(x)dx & y \in \mathbb{R}^3 - \Omega \end{cases}$$

où

Ce document est la propriété d'EADS FRANCE ; il ne peut être communiqué à des tiers et/ou reproduit sans l'autorisation préalable écrite d'EADS FRANCE et son contenu ne peut être divulgué.

© - EADS FRANCE - 2011

$$G(R) = \frac{e^{ikR}}{4\pi R}$$

est la fonction de Green, solution élémentaire de l'équation de Helmholtz en 3D

$$\Delta u + k^2 u = -\delta_0$$

associée à la condition de radiation sortante

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r \left(\frac{\partial u^+}{\partial r} - iku^+ \right) = 0$$

avec $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$

On a $\vec{E} \wedge \vec{\nu} = -\vec{E}_{inc} \wedge \vec{\nu}$ donc

$$\begin{aligned} - \left(\vec{E}_{inc} \wedge \vec{\nu} \right) (y) &= i\omega\mu_0 \int_{\Gamma} G(|y-x|) \vec{j}(x) dx \wedge \vec{\nu}(y) + \frac{i}{\omega\epsilon_0} \text{grad}_y \int_{\Gamma} G(|y-x|) \text{div}_{\Gamma} \vec{j}(x) dx \wedge \vec{\nu}(y) \\ \Rightarrow \frac{i}{kZ_0} \left(\vec{E}_{inc} \wedge \vec{\nu} \right) (y) &= \int_{\Gamma} G(|y-x|) \vec{j}(x) dx \wedge \vec{\nu}(y) + \frac{1}{k^2} \text{grad}_y \int_{\Gamma} G(|y-x|) \text{div}_{\Gamma} \vec{j}(x) dx \wedge \vec{\nu}(y) \end{aligned}$$

En multipliant par un courant surfacique quelconque \vec{j}^t tangent à Γ et en intégrant par partie on obtient la formulation *EFIE* (*Electric Field Integral Equation*) :

$$\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(|y-x|) \left(\vec{j}(x) \cdot \vec{j}^t(y) - \frac{1}{k^2} \text{div}_{\Gamma} \vec{j}(x) \cdot \text{div}_{\Gamma} \vec{j}^t(y) \right) dx dy = \frac{i}{kZ_0} \int_{\Gamma} \vec{E}_{inc}(x) \cdot \vec{j}^t(x) dx$$

De même on obtient la formule *MFIE* (*Magnetic Field Integral Equation*), qui associée à la représentation intégrale du champ magnétique \vec{H} :

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \vec{j}(y) \cdot \vec{j}^t(y) dy + \int_{\Gamma} \vec{j}^t(y) \cdot \vec{\nu}(y) \wedge \left(\int_{\Gamma} \text{grad}_x G(|y-x|) \wedge \vec{j}(x) dx \right) dy = \int_{\Gamma} \vec{j}^t(y) \cdot \vec{n} \vec{u}(y) \wedge \vec{H}_{inc}(y)$$

La formulation *CFIE* (*Combined Field Integral Equation*) est utilisé fréquemment dans le but d'éliminer les problèmes de résonances liés à l'existence de valeurs de propres. Cette formulation est combinaison linéaire d'*EFIE* et de *MFIE* :

$$CFIE = \alpha EFIE + (1 - \alpha) \frac{i}{k} MFIE$$

On obtient les meilleurs résultats généralement avec $\alpha = 0.2$. On remarque dans ce qui précède que seule la formulation EFIE est symétrique en \vec{j} et \vec{j}^t . Dans ce qui va suivre, on travaillera sur l'équation EFIE.

Ce document est la propriété d'EADS FRANCE ; il ne peut être communiqué à des tiers et/ou reproduit sans l'autorisation préalable écrite d'EADS FRANCE et son contenu ne peut être divulgué.

1.1.4 Discrétisation

Pour la résolution on utilise la discrétisation éléments finis. On remplace tout d'abord la surface réelle par une surface polyédrique composée de triangles formant une triangulation. Les mailleurs placent généralement les sommets des triangles sur la surface réelle. A chaque arête A_i sont associés un degré de liberté λ_i et une fonction de base $\vec{\varphi}_i$. On note n_{dl} le nombre d'arêtes et de degrés de liberté. Le support de $\vec{\varphi}_i$ se restreint aux deux triangles \mathcal{T} et \mathcal{T}' partageant l'arête A_i . Chaque arête est (arbitrairement) orientée par un «sens» de passage, noté par exemple $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$, qui détermine la normale unitaire à l'arête \vec{n}_i . Le degré de liberté λ_i est égal au flux de la fonction de courant surfacique (tangential) \vec{j} à travers l'arête A_i ainsi orientée :

$$\lambda_i = \int_{A_i} \vec{j}(M) \cdot \vec{n}_i(M) dM$$

Sur le triangle \mathcal{T} , on note S le sommet opposé à A_i . On a

$$\vec{\varphi}_i(M) = \frac{\overrightarrow{SM}}{2 \cdot |\mathcal{T}|}$$

La fonction $\vec{\varphi}_i$ est donc vectorielle, dans le plan du triangle, affine, de flux nul à travers les quatre arêtes issues des sommets S et S' ($\vec{\varphi}_i$ y est tangente) et de flux 1 à travers l'arête A_i (grâce à la normalisation par $2|\mathcal{T}|$). La figure 1.2 illustre ces propriétés.

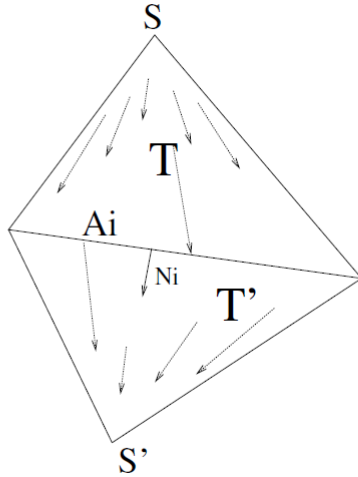


FIGURE 1.2 – La fonction de base $\vec{\varphi}_i$ sur le triangle A_i

Symétriquement sur \mathcal{T}' , on note S' le sommet opposé à A_i . On a :

$$\vec{\varphi}_i(M) = -\frac{\overrightarrow{S'M}}{2 \cdot |\mathcal{T}'|}$$

Le flux de $\vec{\varphi}_i$ à travers l'arête A_i vaut toujours +1 (la traversée de l'arête reste orientée par \vec{n}_i). Notre inconnue \vec{j} s'écrit dans l'espace des éléments finis sous la forme :

$$\vec{j} = \sum_{i=1}^{n_{dl}} \lambda_i \vec{\varphi}_i$$

1.1.5 Écriture matricielle

On considère l'équation intégrale *EFIE* et on cherche \vec{j} sous la forme $\sum_{1 \leq i \leq n_{dl}} \lambda_i \vec{\varphi}_i$. On prend, comme fonction test, \vec{j}^t une fonction de base $\vec{\varphi}_i$. L'*EFIE* devient : trouver $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$ tel que pour tout j on ait :

$$\sum_{i=1}^{n_{dl}} \lambda_i \left[\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(|y-x|) \left(\vec{\varphi}_i(x) \cdot \vec{\varphi}_j(y) - \frac{1}{k^2} \text{div}_{\Gamma} \vec{\varphi}_i(x) \cdot \text{div}_{\Gamma} \vec{\varphi}_j(y) \right) dx dy \right] = \frac{i}{kZ_0} \int_{\Gamma} \vec{E}_{inc} \cdot \vec{\varphi}_j(x) dx$$

Ce qui nous ramène à la résolution d'un système linéaire de n_{dl} équations à n_{dl} inconnues de la forme

$$A \cdot \lambda = b$$

avec :

$$\begin{cases} A_{i,j} = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(|y-x|) \left(\vec{\varphi}_i(x) \cdot \vec{\varphi}_j(y) - \frac{1}{k^2} \text{div}_{\Gamma} \vec{\varphi}_i(x) \cdot \text{div}_{\Gamma} \vec{\varphi}_j(y) \right) dx dy \\ b_j = \frac{i}{kZ_0} \int_{\Gamma} \vec{E}_{inc} \cdot \vec{\varphi}_j(x) dx \end{cases}$$

Comme l'*EFIE* est symétrique A l'est aussi donc $A_{i,j} = A_{j,i}$. Les intégrales doubles dans la définition de A se calculent sur le support de $\vec{\varphi}_i$ pour x et le support de $\vec{\varphi}_j$ pour y . La seule difficulté pour calculer ces intégrales vient de la singularité du noyau de Green en $R = 0$ (lorsque $x = y$). Pour calculer A on calculera les deux intégrales de manière numérique à l'aide de la quadrature de Gauss.

1.2 Acoustique

1.2.1 Modèle physique

On considère un objet Ω^- régulier (cf.1.3) se trouvant dans un fluide parfait (généralement l'air ou de l'eau). L'objet est illuminé par une onde plane acoustique incidente u_{inc} de fréquence f et de pulsation $\omega = 2\pi f$. On cherche à calculer le champ diffracté u_{diff} dans le domaine extérieur Ω^+ . La frontière du domaine, noté S est constituée d'une partie traitée Γ , d'impédance η , et d'une partie rigide Σ . On a $S = \Gamma \cup \Sigma$. On note $\vec{\nu}$ la normale extérieure

Ce document est la propriété d'EADS FRANCE ; il ne peut être communiqué à des tiers et/ou reproduit sans l'autorisation préalable écrite d'EADS FRANCE et son contenu ne peut être divulgué.

unitaire en tout point de la frontière de l'objet.

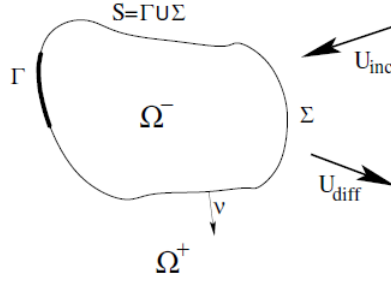


FIGURE 1.3 – Problème acoustique : cas d'une onde incidente

1.2.2 Équations de Helmholtz

On se retrouve avec deux problèmes liés : le premier dans le domaine non-borné Ω^+ et on cherchera à résoudre le problème (P^+) qui est de trouver $u^+ \in H_{loc}^1(\Omega^+)$ tel que :

$$(P^+) \begin{cases} \Delta u^+ + k^2 u^+ = 0 & \text{dans } \Omega^+ \\ \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = -\frac{\partial u_{inc}}{\partial \nu} & \text{sur } \Sigma \\ \frac{\partial u^+}{\partial \nu} + i\frac{k}{\eta} u^+ = -\left(\frac{\partial u_{inc}}{\partial \nu} + i\frac{k}{\eta} u_{inc}\right) & \text{sur } \Gamma \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} r\left(\frac{\partial u^+}{\partial r} - iku^+\right) = 0 \end{cases}$$

On note c la célérité des ondes de pression dans Ω^+ (typiquement $c = 340m/s$ dans le cas de l'air), et $k = \omega/c$ le nombre d'onde.

Où $G(x,y)$ est la fonction de Green solution de $\Delta u + k^2 u = -\delta_0$ associée à la condition limite apparaissant dans (P^+) .

$$G(x, y) = \frac{e^{ik\|x-y\|}}{4\pi \|x-y\|}$$

Le deuxième problème est dans Ω^- où on cherche à résoudre (P^-) qui est de trouver $u^- \in H^1(\Omega^-)$ tel que

$$(P^-) \begin{cases} \Delta u^- + k^2 u^- = 0 & \text{dans } \Omega^- \\ \frac{\partial u^-}{\partial \nu} = -\frac{\partial u_{inc}}{\partial \nu} & \text{sur } \Sigma \\ \frac{\partial u^-}{\partial \nu} - i\frac{k}{\eta} u^- = -\left(\frac{\partial u_{inc}}{\partial \nu} - i\frac{k}{\eta} u_{inc}\right) & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

1.2.3 Représentation intégrale

Comme pour le cas des équations de Maxwell, on va représenter ces équations sous une forme intégrale en utilisant le théorème de représentation intégrale. Pour cela on définit ϕ et p comme les sauts des traces tangentielles de u et de $\frac{\partial u}{\partial \nu}$. Donc on a :

$$\begin{cases} \phi(x) = u|_S^-(x) - u|_S^+(x) \\ p(x) = \left(\frac{\partial u^-}{\partial \nu}\right)|_S(x) - \left(\frac{\partial u^+}{\partial \nu}\right)|_S(x) \end{cases}$$

Avec cette définition on retrouve le fait que $\phi \in H_S^{1/2}$ et $p \in H_S^{-1/2}$. Avec les conditions limites imposées sur Σ on trouve que p est y nul. Le problème intégral s'écrit alors sous la forme :

$$u(x) = \int_S \left(G(x, y)p(y) - \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_y} \phi(y) \right) dy \quad (1.1)$$

Donc on a comme inconnues p et ϕ sur le bord de Ω^-

Dans le but d'exprimer les traces de u et $\partial u / \partial \eta$ sur S avec p et ϕ on introduit les opérateurs suivants :

$$\begin{cases} S\phi(x) = \int_S G(x, y)\phi(y)dy \\ K\phi(x) = \int_S \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_x} \phi(y)dy \\ K'p(x) = \int_S \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_y} p(y)dy \\ Dp(x) = \oint_S \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial \nu_x \partial \nu_y} p(y)dy \end{cases}$$

Avec \oint est une partie finie au sens de Hadamard de l'intégrale singulière. On exprime les traces de u et de $\partial u / \partial \nu$ sur S en fonction de p et ϕ et à l'aide de ces opérateurs sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u^+ = Sp - \left(\frac{I}{2} + K'\right) \phi \\ u^- = Sp + \left(\frac{I}{2} - K'\right) \phi \\ \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \left(-\frac{I}{2} + K\right) p - D\phi \\ \frac{\partial u^-}{\partial \nu} = \left(\frac{I}{2} + K\right) p - D\phi \end{cases} \quad (1.2)$$

En combinant les conditions limites de (P^+) et (P^-) on obtient des conditions limites écrites sous la forme suivante :

Ce document est la propriété d'EADS FRANCE ; il ne peut être communiqué à des tiers et/ou reproduit sans l'autorisation préalable écrite d'EADS FRANCE et son contenu ne peut être divulgué.

$$\begin{cases} \frac{\partial u^+}{\partial \nu} + \frac{\partial u^-}{\partial \nu} = -2 \frac{\partial u_{inc}}{\partial \nu} & \text{sur } \Sigma \\ \frac{\partial u^+}{\partial \nu} + \frac{\partial u^-}{\partial \nu} + i \frac{k}{\eta} (u^+ - u^-) = -2 \frac{\partial u_{inc}}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u^+}{\partial \nu} - \frac{\partial u^-}{\partial \nu} + i \frac{k}{\eta} (u^+ + u^-) = -2 i \frac{k}{\eta} u_{inc} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (1.3)$$

En utilisant 1.2 dans 1.3 on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -D\phi + Kp = -\frac{\partial u_{inc}}{\partial \nu} & \text{sur } \Sigma, \\ -D\phi + Kp - i \frac{k}{2\eta} \phi = -\frac{\partial u_{inc}}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma, \\ -\frac{\eta}{2ik} p + Sp - K'\phi = -u_{inc} & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

On pose $\lambda = -p/ik$ et on écrit une formulation variationnelle pour ce système d'équations en utilisant les fonction test ϕ^t (pour les deux premières équations) et λ^t (pour la dernière). on aura le problème suivant :

trouver (ϕ, λ) tel que $\forall(\phi^t, \lambda^t)$ on ait :

$$\begin{cases} - \int_{\Sigma \times \Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_x} \lambda(y) \phi^t(x) dy dx - \frac{1}{ik} \oint_{\Sigma \times S} \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial \nu_x \partial \nu_y} \phi(y) \phi^t(x) dy dx \\ \quad = - \frac{1}{ik} \int_{\Sigma} \frac{\partial u_{inc}(x)}{\partial \nu} \phi^t(x) dx \\ - \frac{1}{ik} \oint_{\Gamma \times S} \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial \nu_x \partial \nu_y} \phi(y) \phi^t(x) dy dx - \frac{1}{2\eta} \int_{\Gamma} \phi(x) \phi^t(x) dx \\ \quad - \int_{\Gamma \times \Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_x} \lambda(y) \phi^t(x) dy dx = - \frac{1}{ik} \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{inc}(x)}{\partial \nu} \phi^t(x) dx \\ \frac{\eta}{2} \int_{\Gamma} \lambda(x) \lambda^t(x) dx - ik \int_{\Gamma \times \Gamma} G(x, y) \lambda(y) \lambda^t(x) dy dx \\ \quad - \int_{\Gamma \times S} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_y} \phi(y) \lambda^t(x) dy dx = - \int_{\Gamma} u_{inc}(x) \lambda^t(x) dx \end{cases} \quad (1.4)$$

1.2.4 Discrétisation

On va discrétiser notre problème en utilisant les éléments finis de Lagrange et en considérant un maillage triangulaire du bord S . On note N_T la nombre de triangles et N_S le nombre de sommets. On va avoir deux types de fonctions de bases, on note ω_j , avec $1 \leq j \leq N_S$, les fonctions de base qui concernent ϕ . Ces fonction sont affines et valent 1 sur le sommet S_j et 0 sur tous les autres sommets (figure 1.4b). ϕ s'écrit dans cette base sous la forme suivante :

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{N_S} \phi_j \omega_j(x)$$

Ce document est la propriété d'EADS FRANCE ; il ne peut être communiqué à des tiers et/ou reproduit sans l'autorisation préalable écrite d'EADS FRANCE et son contenu ne peut être divulgué.

On notera différemment les coefficients de ϕ sur Σ (partie non traitée de S) et Γ (partie traitée de S), on aura donc ϕ_j^Σ pour les coefficients associés aux sommet du maillage appartenant à Σ et ϕ_j^Γ pour les coefficients associés aux sommet du maillage appartenant à Γ .

Et on note χ_j , avec $1 \leq j \leq N_T$, les fonctions de base qui concernent λ . Ces fonctions sont constantes par triangle, valent 1 sur le triangle T_j et 0 sur les autres (figure 1.4a). λ s'écrit dans cette base sous la forme suivante :

$$\lambda(x) = \sum_{j=1}^{N_T} \lambda_j \chi_j(x)$$

λ étant nul sur Σ , les coefficients de λ seront notés indifféremment λ_j ou λ_j^Γ .

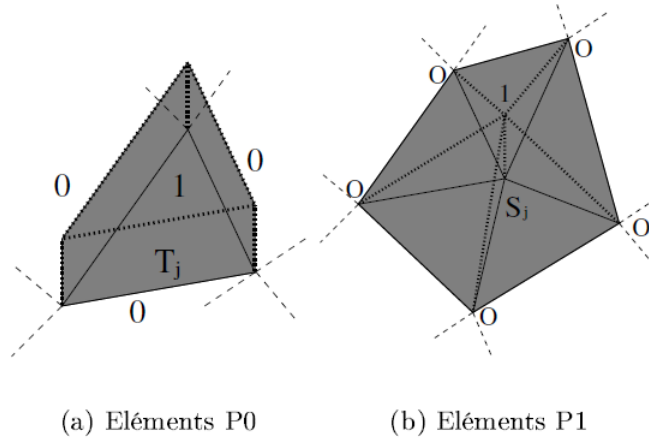


FIGURE 1.4 – Fonctions de base

On reprend le problème 1.4 et on remplace dans la première équation ϕ^t par ω_i^Σ , dans la deuxième ϕ^t par ω_i^Γ et dans la troisième λ^t par χ_i^Γ . On aura à résoudre le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \int_{\Sigma \times \Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_x} \lambda(y) \omega_i^\Sigma(x) dy dx - \frac{1}{ik} \oint_{\Sigma \times S} \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial \nu_x \partial \nu_y} \phi(y) \omega_i^\Sigma(x) dy dx \\ \quad = - \frac{1}{ik} \int_{\Sigma} \frac{\partial u_{inc}(x)}{\partial \nu} \omega_i^\Sigma(x) dx \\ - \frac{1}{ik} \oint_{\Gamma \times S} \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial \nu_x \partial \nu_y} \phi(y) \omega_i^\Gamma(x) dy dx - \frac{1}{2\eta} \int_{\Gamma} \phi(x) \omega_i^\Gamma(x) dx \\ \quad - \int_{\Gamma \times \Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_x} \lambda(y) \omega_i^\Gamma(x) dy dx = - \frac{1}{ik} \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{inc}(x)}{\partial \nu} \omega_i^\Gamma(x) dx \\ \frac{\eta}{2} \int_{\Gamma} \lambda(x) \chi_i^\Gamma(x) dx - ik \int_{\Gamma \times \Gamma} G(x, y) \lambda(y) \chi_i^\Gamma(x) dy dx \\ \quad - \int_{\Gamma \times S} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_y} \phi(y) \chi_i^\Gamma(x) dy dx = - \int_{\Gamma} u_{inc}(x) \chi_i^\Gamma(x) dx \end{array} \right. \quad (1.5)$$

1.2.5 Écriture matricielle

Comme λ et ϕ sont sous la forme :

$$\begin{cases} \phi = \sum_{S_j \in \Gamma} \phi_j^\Gamma \omega_j^\Gamma(x) + \sum_{S_j \in \Sigma} \phi_j^\Sigma \omega_j^\Sigma(x) \\ \lambda = \sum_{T_j \in \Gamma} \lambda_j^\Gamma \chi_j^\Gamma(x) \end{cases}$$

Et en remplaçant dans le système d'équations 1.5 on obtient le système linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} & - \sum_{T_j \in \Gamma} \lambda_j^\Gamma \int_{\Sigma \times \Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_x} \chi_j^\Gamma(y) \omega_i^\Sigma(x) dy dx - \frac{1}{ik} \sum_{S_j \in \Gamma} \phi_j^\Gamma \oint_{\Sigma \times \Gamma} \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial \nu_x \partial \nu_y} \omega_j^\Gamma(y) \omega_i^\Sigma(x) dy dx \\ & \quad - \frac{1}{ik} \sum_{S_j \in \Sigma} \phi_j^\Sigma \oint_{\Sigma \times \Sigma} \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial \nu_x \partial \nu_y} \omega_j^\Sigma(y) \omega_i^\Sigma(x) dy dx = - \frac{1}{ik} \int_{\Sigma} \frac{\partial u_{inc}(x)}{\partial \nu} \omega_i^\Sigma(x) dx \\ & \sum_{S_j \in \Gamma} \phi_j^\Gamma \left\{ - \frac{1}{ik} \oint_{\Gamma \times \Gamma} \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial \nu_x \partial \nu_y} \omega_j^\Gamma(y) \omega_i^\Gamma(x) dy dx - \frac{1}{2\eta} \int_{\Gamma} \omega_j^\Gamma(x) \omega_i^\Gamma(x) dx \right\} \\ & \quad - \frac{1}{ik} \sum_{S_j \in \Sigma} \phi_j^\Sigma \oint_{\Gamma \times \Sigma} \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial \nu_x \partial \nu_y} \omega_j^\Sigma(y) \omega_i^\Gamma(x) dy dx \\ & \quad - \sum_{T_j \in \Gamma} \int_{\Gamma \times \Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_x} \chi_j^\Gamma(y) \omega_i^\Gamma(x) dy dx = - \frac{1}{ik} \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{inc}(x)}{\partial \nu} \omega_i^\Gamma(x) dx \\ & \sum_{T_j \in \Gamma} \lambda_j^\Gamma \left\{ \frac{\eta}{2} \int_{\Gamma} \chi_j^\Gamma(x) \chi_i^\Gamma(x) dx - ik \int_{\Gamma \times \Gamma} G(x, y) \chi_j^\Gamma(y) \chi_i^\Gamma(x) dy dx \right\} \\ & \quad - \sum_{S_j \in \Gamma} \phi_j^\Gamma \int_{\Gamma \times \Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_y} \omega_j^\Gamma(y) \chi_i^\Gamma(x) dy dx \\ & \quad - \sum_{S_j \in \Sigma} \phi_j^\Sigma \int_{\Gamma \times \Sigma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_y} \omega_j^\Sigma(y) \chi_i^\Gamma(x) dy dx = - \int_{\Gamma} u_{inc}(x) \chi_i^\Gamma(x) dx \end{aligned} \right. \quad (1.6)$$

En résolvant ce système on trouve ϕ et $\lambda = -p/ik$ et en remplaçant dans 1.1 on trouve u^+
(Pour plus de détails sur ce chapitre consultez[1])

2 Champ lointain en acoustique

Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre au calcul du champ lointain en acoustique qui est un post-traitement accompagnant la résolution de l'équation de Helmholtz. Ce calcul consiste à calculer le champ dans une direction précise (θ, φ) . Pour cela on va s'intéresser à la représentation intégrale (1.1) et on effectue un développement limité.

2.1 Objectif

On considère le problème physique présenté en 1.2.1 et on cherche à calculer le champ loin de Ω^- . Pour cela on suppose que l'on est à une distance $r \rightarrow +\infty$ de celui-ci dans une direction (θ, φ) qu'on appellera $\vec{\xi}$, $\vec{\xi} \in \mathcal{S}$ sphère unité de \mathbb{R}^3

On part du théorème de représentation intégrale :

$$u(y) = \int_S \left(G(x, y) p(x) - \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_x} \phi(x) \right) dx$$

avec

$$G(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi |x-y|}$$

Calculer le champ lointain revient à calculer le développement limité de $u(y)$ quand $|y| \rightarrow +\infty$.

2.2 Établissement du champ lointain

Pour calculer le champs lointain on va faire un développement limité de $u(y)$ pour y assez grand ([2]) . On a :

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_x} = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi |x-y|^2} \left(ik - \frac{1}{|x-y|} \right) ((x-y) \cdot \nu_x)$$

Ce document est la propriété d'EADS FRANCE ; il ne peut être communiqué à des tiers et/ou reproduit sans l'autorisation préalable écrite d'EADS FRANCE et son contenu ne peut être divulgué.

© - EADS FRANCE - 2011

On aura :

$$u(y) = \int_S \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \left(p(x) - \left(ik - \frac{1}{|x-y|} \right) \left(\frac{(x-y)}{|x-y|} \cdot \nu_x \right) \phi(x) \right) dx$$

Pour y assez grand on a :

$$|x-y| = |y| \left(1 - \frac{(x \cdot y)}{|y|^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|y|^2}\right) \right)$$

$$\frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{|y|} \left(1 + \frac{(x \cdot y)}{|y|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|y|^2}\right) \right)$$

$$e^{ik|x-y|} = e^{ik|y|} e^{-ik(x \cdot \frac{y}{|y|})} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|y|}\right) \right)$$

En négligeant les termes en $\frac{1}{|y|^2}$ (on ne garde que les termes en $\frac{1}{|y|}$) on obtient :

$$u(y) \sim \frac{e^{ik|y|}}{4\pi|y|} \int_S e^{-ik(x \cdot \frac{y}{|y|})} \left(p(x) + ik \frac{y}{|y|} \cdot \nu_x \phi(x) \right) dx$$

On remplace p par $-ik\lambda$:

$$u(y) \sim -ik \frac{e^{ik|y|}}{4\pi|y|} \int_S e^{-ik(x \cdot \frac{y}{|y|})} \left(\lambda(x) - \frac{y}{|y|} \cdot \nu_x \phi(x) \right) dx$$

On pose :

$$A(\vec{\xi}) = -ik \int_S e^{-ik(\vec{\sigma} \cdot \vec{\xi})} \left(\lambda(x) - \vec{\xi} \cdot \nu_x \phi(x) \right) dx$$

Donc on a :

$$u(y) = \frac{e^{ik|y|}}{4\pi|y|} A\left(\frac{y}{|y|}\right) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|y|}\right) \right)$$

Pour discrétiser A on va utiliser l'écriture de ϕ dans la base des ω_j et λ dans la base des χ_j :

$$\begin{cases} \lambda(x) = \sum_{j=1}^{N_T} \lambda_j \chi_j(x) \\ \phi(x) = \sum_{j=1}^{N_S} \phi_j \omega_j(x) \end{cases}$$

Donc on peut écrire A sous la forme suivante :

$$A(\vec{\xi}) = ik \left(\sum_{j=1}^{N_T} \lambda_j e_j(\vec{\xi}) + \sum_{j=1}^{N_S} \phi_j f_j(\vec{\xi}) \right)$$

avec $e_j(\vec{\xi}) = - \int_S e^{-ik(\vec{\sigma} \cdot \vec{\xi})} \chi_j(x) dx$ et $f_j(\vec{\xi}) = \int_S \vec{\xi} \cdot \nu_x e^{-ik(\vec{\sigma} \cdot \vec{\xi})} \omega_j(x) dx$

Donc A est une somme de deux produits scalaire. Les λ_j et ϕ_j sont récupérés à partir de la résolution de l'équation de Helmholtz.

On remarque, en tenant compte des conditions limites imposées sur Σ , que :

$$p|_{\Sigma}(x) = 0 \implies \lambda|_{\Sigma}(x) = 0 \implies e_j(\vec{\xi}) = - \int_{\Gamma} e^{-ik(\vec{o}\vec{x}.\vec{\xi})} \chi_j(x) dx$$

Donc on a :

$$A(\vec{\xi}) = ik \left(\sum_{T_j \in \Gamma} \lambda_j e_j(\vec{\xi}) + \sum_{1 \leq j \leq N_s} \phi_j f_j(\vec{\xi}) \right)$$

On remarque que :

$$\frac{\partial}{\partial \nu_x} e^{-ik(\vec{o}\vec{x}.\vec{\xi})} = -ik \vec{\xi} \cdot \nu_x e^{-ik(\vec{o}\vec{x}.\vec{\xi})}$$

Donc :

$$f_j(\vec{\xi}) = -\frac{1}{ik} \int_S \frac{\partial}{\partial \nu_x} e^{-ik(\vec{o}\vec{x}.\vec{\xi})} \omega_j(x) dx = -\frac{1}{ik} \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu_x} e^{-ik(\vec{o}\vec{x}.\vec{\xi})} \omega_j(x) dx - \frac{1}{ik} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu_x} e^{-ik(\vec{o}\vec{x}.\vec{\xi})} \omega_j(x) dx$$

On trouve ainsi que pour calculer A , on peut utiliser le second membre de la résolution de l'équation de Helmholtz en prenant $u_{inc} = e^{-ik(\vec{o}\vec{x}.\vec{\xi})}$

2.3 Validation

Introduction

Le but ici est de valider notre calcul du champ lointain sur différents cas qui représentent la quasi totalité des cas pratiques. On va présenter les résultats numériques d'un seul test et on a mis le résumé des autres tests à la section 3.2.4 (40 tests au total).

2.3.1 Principe de la validation

Pour valider notre méthode on a utilisé les résultats du calcul du champ proche qui était déjà implémenté chez EADS-IW. le principe est simple, pour chaque direction (θ, φ) on calcule les coordonnées, (x, y, z) , d'un point de cette direction à une distance, R , de notre objet suffisamment grande. On multiplie le champ proche par R car pour le champ lointain on calcule $\lim_{|y| \rightarrow \infty} u(y)$. On compare le module et la phase de chaque calcul et pour avoir des valeurs significatives on compare $20 \log_{10}(\text{module})$ de chaque calcul.

Ce document est la propriété d'EADS FRANCE ; il ne peut être communiqué à des tiers et/ou reproduit sans l'autorisation préalable écrite d'EADS FRANCE et son contenu ne peut être divulgué.

2.3.2 Résultats numériques

On considère l'objet représenté dans la figure 2.1 illuminé par une onde plane incidente de fréquence $f = 340Hz$ et de pulsation $\omega = 2\pi f$ avec une célérité $c = 340m/s$ et $k = \omega/c$. La longueur de cette onde est :

$$\lambda = \frac{k}{2\pi} = 1$$

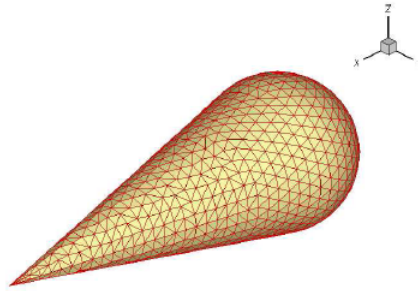
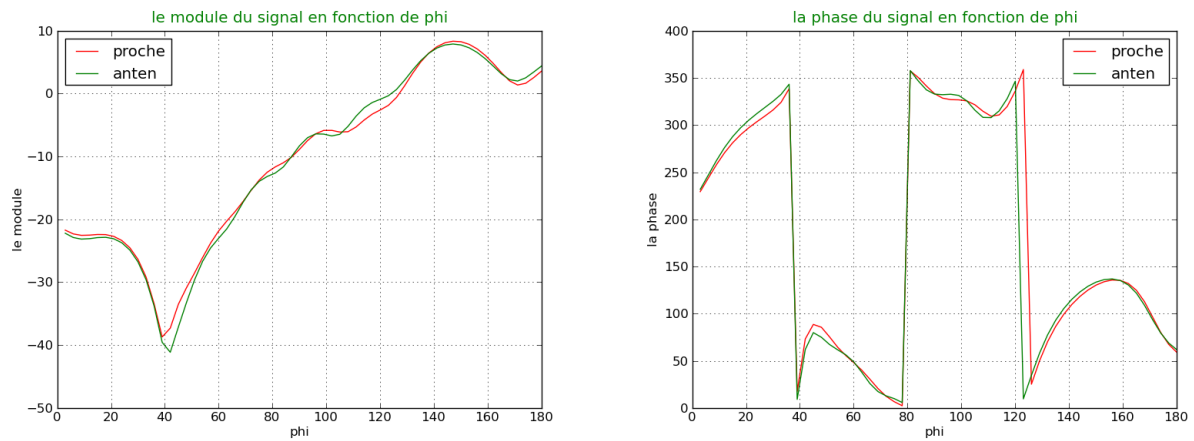
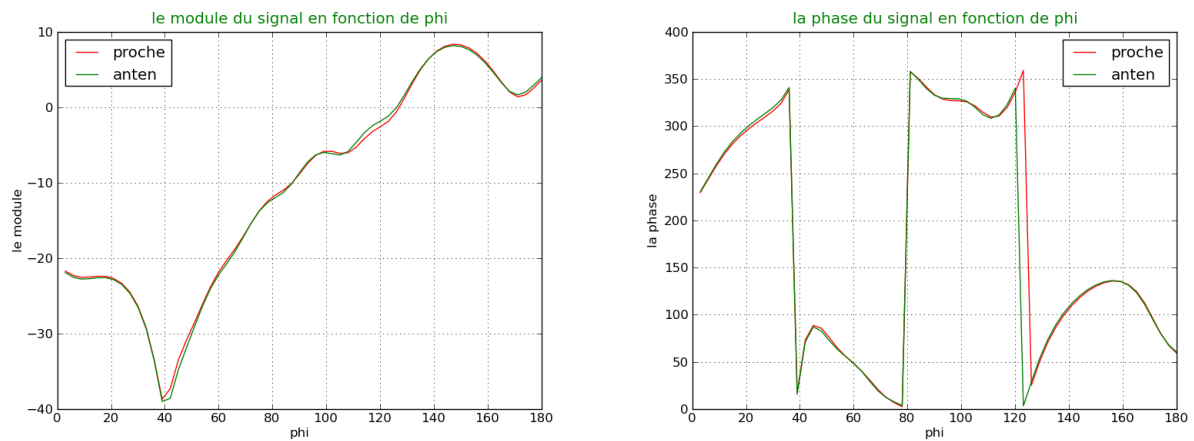
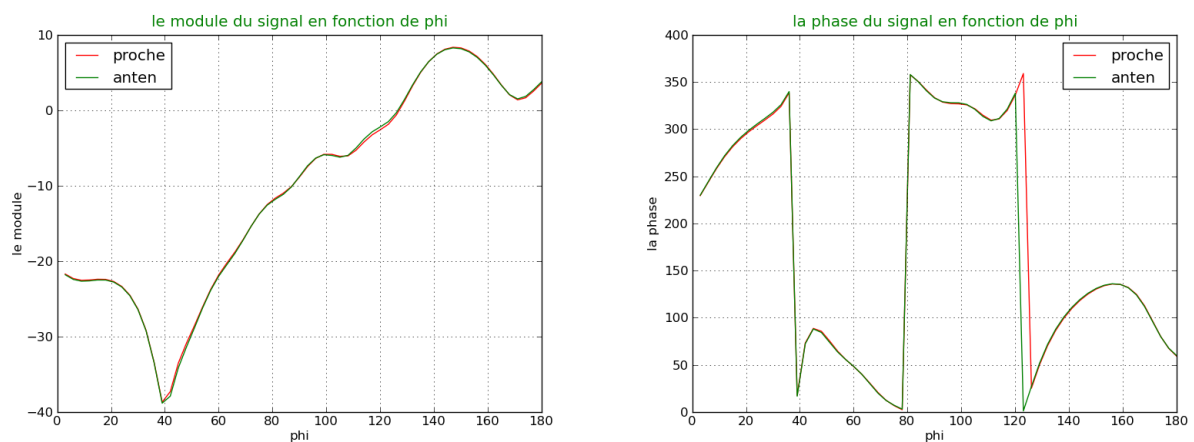


FIGURE 2.1 – *cône sphérique*

Ce cône sphérique a une longueur de $3m$ et un rayon $1.2m$.

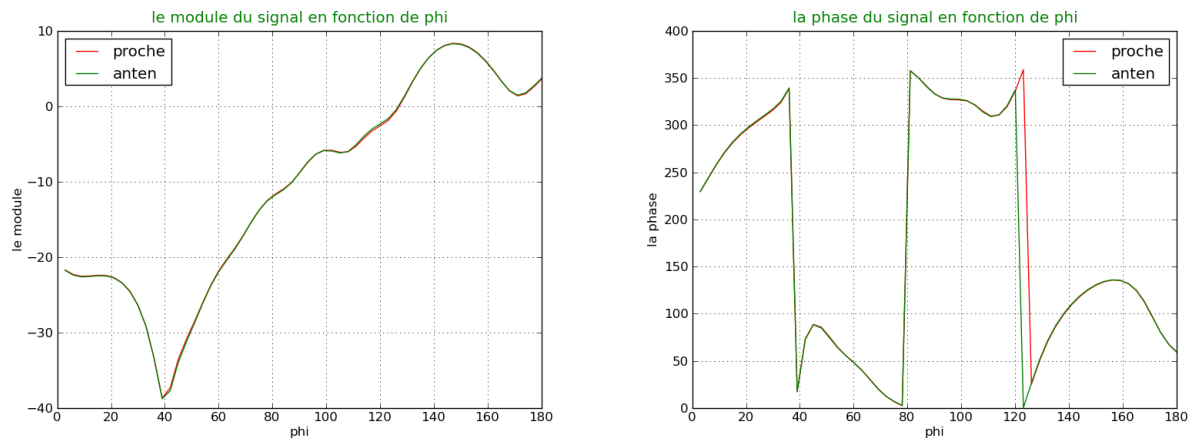
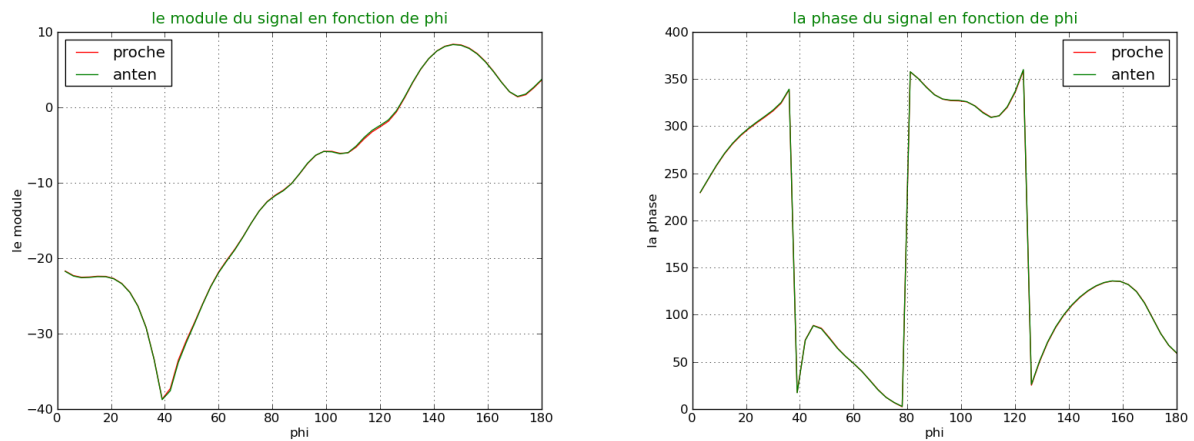
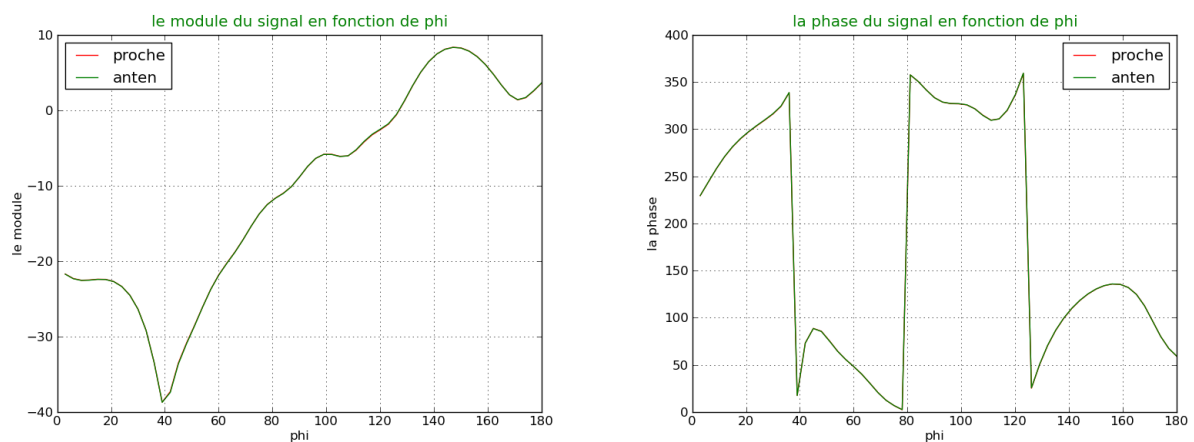
On a calculé le champ lointain dans les directions $\theta = 90^\circ$ et φ varie de 0° à 180° avec un pas de 3° . Pour chaque direction on a calculé plusieurs points pour des distances, $R\lambda$ (λ est la longueur de l'onde), différentes et on a calculé le champ proche en ces points. On a tracé les courbes du module et de la phase obtenues pour chaque distance. Les figures suivantes (on a tracé $20\log_{10}(\text{module})$ et la phase en fonction de φ) montrent les résultats obtenu pour les différentes distances.

On remarque qu'à des distance assez grandes les courbes du champ proche et du champ lointain se confondent. C'est ce que nous a permis de valider notre algorithme.

FIGURE 2.2 – Résultat pour $R = 20$ FIGURE 2.3 – Résultat pour $R = 50$ FIGURE 2.4 – Résultat pour $R = 100$

Ce document est la propriété d'EADS FRANCE ; il ne peut être communiqué à des tiers et/ou reproduit sans l'autorisation préalable écrite d'EADS FRANCE et son contenu ne peut être divulgué.

© - EADS FRANCE - 2011

FIGURE 2.5 – Résultat pour $R = 150$ FIGURE 2.6 – Résultat pour $R = 200$ FIGURE 2.7 – Résultat pour $R = 500$

3 Méthode multipôle rapide

Introduction

On s'intéresse ici l'utilisation de la méthode multipôle rapide pour calculer le champ lointain en acoustique et en électromagnétisme. Cette méthode réalise les produits matrice-vecteur de manière économique et est utilisée dans le cadre des solveurs itératifs. Avant d'appliquer cette méthode, on va faire une petite présentation pour expliquer le principe de la méthode et ses différentes versions (la présentation la plus complète est présentée dans [1]).

3.1 FMM en électromagnétisme

3.1.1 FMM mono-niveau

On se propose de calculer le produit matrice-vecteur suivant :

$$(At)_j = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(|y - x|) \left(\vec{t}(x) \cdot \vec{\varphi}_j(y) - \frac{1}{k^2} \text{div}_{\Gamma} \vec{t}(x) \cdot \text{div}_{\Gamma} \vec{\varphi}_j(y) \right) dx dy \quad (3.1)$$

avec $\vec{t}(x) = \sum_{i=1}^n t_i \cdot \vec{\varphi}_i(x)$

On remarque que le terme central de la formule 3.1 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \vec{t}(x) \cdot \vec{\varphi}_j(y) - \frac{1}{k^2} \text{div}_{\Gamma} \vec{t}(x) \cdot \text{div}_{\Gamma} \vec{\varphi}_j(y) &= (\vec{t})_x(x) \cdot (\vec{\varphi}_j)_x(y) \\ &\quad + (\vec{t})_y(x) \cdot (\vec{\varphi}_j)_y(y) \\ &\quad + (\vec{t})_z(x) \cdot (\vec{\varphi}_j)_z(y) \\ &\quad - \frac{1}{k^2} \text{div}_{\Gamma} \vec{t}(x) \cdot \text{div}_{\Gamma} \vec{\varphi}_j(y) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Donc le calcul de 3.1 revient à calculer la somme de quatre produits matrice-vecteur de la forme suivante :

$$\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(|y - x|) f(x) g(y) dx dy \quad (3.3)$$

Ce document est la propriété d'EADS FRANCE ; il ne peut être communiqué à des tiers et/ou reproduit sans l'autorisation préalable écrite d'EADS FRANCE et son contenu ne peut être divulgué.

© - EADS FRANCE - 2011

Où les fonctions scalaires f et g sont respectivement les composantes x , y , z et divergence des fonctions \vec{t} et $\vec{\varphi}_j$.

Pour simplifier le calcul du produit matrice-vecteur, la FMM sépare les variables x et y , et pour se faire, il faut décomposer le noyau de Green.

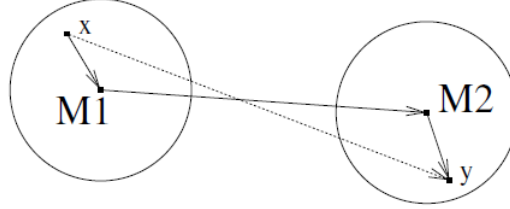


FIGURE 3.1 – Configuration type

Décomposition de noyau de Green

On se met dans la configuration représentée à la figure 3.1 et on se donne quatre points x , y , M_1 , M_2 tel que x est proche de M_1 , y est proche de M_2 et M_1 et M_2 sont éloignés. Le vecteur \vec{xy} se décompose, alors sous la forme suivante :

$$\vec{xy} = x\vec{M_1} + M_1\vec{M_2} + M_2\vec{y}$$

On souhaiterait appliquer le même principe pour séparer les variables x et y dans le noyau de Green. En utilisant le théorème d'addition de Gegenbauer on aura le résultat suivant :

$$G(|y - x|) = \frac{ik}{16\pi^2} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} e^{ik\vec{s} \cdot x\vec{M_1}} T_{M_1\vec{M_2}}^L(\vec{s}) e^{ik\vec{s} \cdot M_2\vec{y}} d\vec{s} \quad (3.4)$$

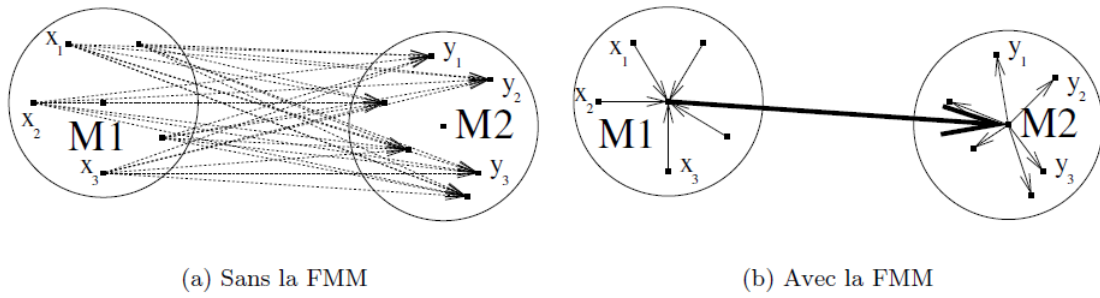
avec

$$T_{M_1\vec{M_2}}^L(\vec{s}) = \sum_{0 \leq l \leq L} (2l+1) i^l h_l^{(1)}(k \cdot |M_1\vec{M_2}|) P_l(\cos(\vec{s}, M_1\vec{M_2})) \quad (3.5)$$

Où \mathcal{S} désigne la sphère unité de \mathbb{R}^3 , \vec{s} un point générique de \mathcal{S} , P_l le polynôme de Legendre de rang l et $h_l^{(1)}$ la fonction de Hankel sphérique du premier type de rang l . Le transfert d'informations du point M_1 au point M_2 est effectué par la fonction 3.5 qui joue un rôle important dans la méthode multipôle rapide cette fonction est appelée fonction de transfert.

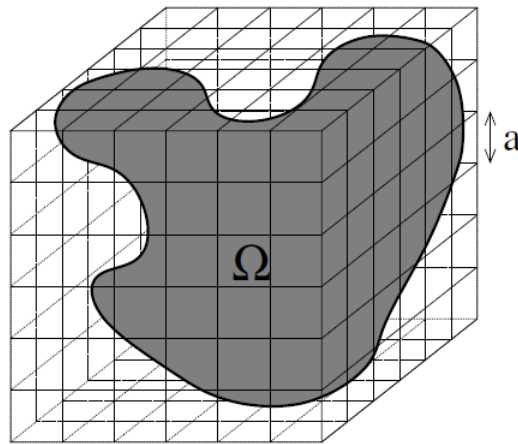
La décomposition du noyau de Green a un avantage important illustré sur la figure 3.2. Pour un ensemble de points proches de M_1 et un ensemble de points proches de M_2 , la FMM centralise l'information en M_1 et M_2 et induit ainsi moins d'interactions (figure 3.2b) comparée à la méthode classique (figure 3.2a) et donc beaucoup moins de calculs.

Ce document est la propriété d'EADS FRANCE ; il ne peut être communiqué à des tiers et/ou reproduit sans l'autorisation préalable écrite d'EADS FRANCE et son contenu ne peut être divulgué.

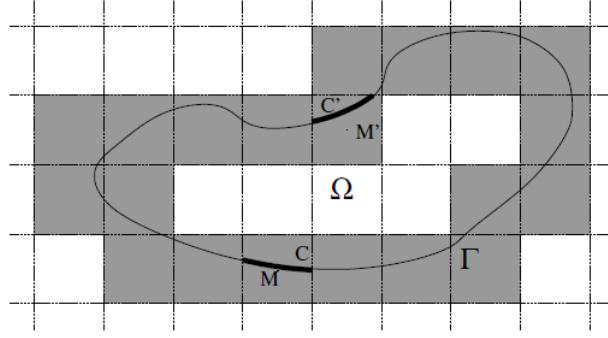
FIGURE 3.2 – *Traitement des interactions*

Découpage en domaines

Nous allons effectuer un découpage de la surface Γ en sous-domaines de tailles homogènes de façon à retrouver la configuration 3.1. Nous utilisons la méthode choisie dans ([1]) dont le principe est de construire une grille cubique de pas a (figure 3.3) englobant tout Ω . On considère comme sous domaine toute intersection non-vide d'un cube de la grille et la surface Γ .

FIGURE 3.3 – *Découpage de la surface Γ*

L'équivalent 2D pour la surface Γ est représenté à la figure 3.4. Les cellules ayant une interaction non-vide avec Γ sont en gris. On désigne par \mathcal{C} une cellule ainsi découpée et par M le centre de la cellule \mathcal{C}

FIGURE 3.4 – Découpage de la surface Γ en 2D

Interaction entre deux sous-domaines

On considère deux cellules \mathcal{C} de centre M et \mathcal{C}' de centre M' et on cherche à calculer le terme suivant :

$$\int_{x \in \Gamma \cap \mathcal{C}} \int_{y \in \Gamma \cap \mathcal{C}'} G(|y - x|) f(x) g(y) dx dy$$

En utilisant la décomposition du noyau de Green 3.4 ce terme peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{ik}{16\pi^2} \int_{x \in \Gamma \cap \mathcal{C}} \int_{y \in \Gamma \cap \mathcal{C}'} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} e^{ik\vec{s} \cdot x \vec{M}} T_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}) e^{ik\vec{s} \cdot M' y} d\vec{s} f(x) g(y) dx dy$$

En réordonnant les intégrales on obtient :

$$\frac{ik}{16\pi^2} \int_{y \in \Gamma \cap \mathcal{C}'} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} \left[T_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}) \left(\int_{x \in \Gamma \cap \mathcal{C}} e^{ik\vec{s} \cdot x \vec{M}} f(x) dx \right) \right] e^{ik\vec{s} \cdot M' y} g(y) d\vec{s} dy \quad (3.6)$$

On remarque qu'on peut calculer ce terme en trois phase :

Initialisation : On calcule la fonction $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ définie sur la sphère unité \mathcal{S} par :

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\vec{s}) = \int_{x \in \Gamma \cap \mathcal{C}} e^{ik\vec{s} \cdot x \vec{M}} f(x) dx \quad (3.7)$$

La fonction $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ ainsi définie est appelée «fonction de radiation».

Transfert : On multiplie la fonction $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ par la fonction de transfert $T_{M\vec{M}'}^L$.

Intégration : On intègre le résultat sur la sphère unité \mathcal{S} :

$$\frac{ik}{16\pi^2} \int_{y \in \Gamma \cap \mathcal{C}'} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} \left[T_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}) \left(\int_{x \in \Gamma \cap \mathcal{C}} e^{ik\vec{s} \cdot x \vec{M}} f(x) dx \right) \right] e^{ik\vec{s} \cdot M' y} g(y) d\vec{s} dy$$

Ce document est la propriété d'EADS FRANCE ; il ne peut être communiqué à des tiers et/ou reproduit sans l'autorisation préalable écrite d'EADS FRANCE et son contenu ne peut être divulgué.

(Pour le choix de nombre de pôles L et la discrétisation de la sphère \mathcal{S} voir [1])

Pour pouvoir appliquer la décomposition du noyau de Green, il faut

$$|M\vec{M}'| \geq \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{3}a \approx 1.9a$$

C'est la condition pour pouvoir tronquer la série 3.5 au rang l (cf [1]). Cette condition exclut toutes les cellules \mathcal{C}' , ayant une face, une arête ou un sommet en commun avec la cellule \mathcal{C} .

On note $v(\mathcal{C})$, l'ensemble des cellules voisines de $v(\mathcal{C})$ qui est formé de toutes les cellules qui ont au moins un sommet en commun avec \mathcal{C} .

Résumé de la FMM mono-niveau

On peut, avec ce qu'on vient de voir, décrire la méthode multipôle rapide à un niveau. On considère un courant surfacique \vec{t} en entrée et un découpage de Γ à l'aide d'une grille cubique (f représente l'une des composantes de \vec{t} ou bien $\text{div}_\Gamma(\vec{t})$). Le terme d'interaction

$$\int_{x \in \Gamma \cap \mathcal{C}} \int_{y \in \Gamma \cap \mathcal{C}'} G(|y - x|) f(x) \varphi_j(y) dx dy \quad (3.8)$$

se calcule alors en deux parties :

-Interactions proches : pour toute cellule \mathcal{C}' fixée et pour toute fonction de base $\vec{\varphi}_j$ localisée dans \mathcal{C}' , on somme sur toutes les cellules \mathcal{C} voisines de \mathcal{C}' et on calcule de manière classique le terme d'interaction :

$$\sum_{\mathcal{C} \in v(\mathcal{C}')} \int_{x \in \Gamma \cap \mathcal{C}} \int_{y \in \Gamma \cap \mathcal{C}'} G(|y - x|) f(x) \varphi_j(y) dx dy \quad (3.9)$$

Le résultat de cette intégration constitue la partie «interactions proches» de la j -ième composante de notre produit matrice-vecteur.

-Interactions lointaines : pour les cellules non-voisines le calcul se réalise en trois étapes :

1.Initialisation : pour toute cellule \mathcal{C} , on calcule la fonction de radiation

$$\mathcal{F}_\mathcal{C}(\vec{s}) = \int_{x \in \Gamma \cap \mathcal{C}} e^{ik\vec{s} \cdot x} \vec{M} f(x) dx \quad (3.10)$$

en tout point \vec{s} de notre quadrature.

Ce document est la propriété d'EADS FRANCE ; il ne peut être communiqué à des tiers et/ou reproduit sans l'autorisation préalable écrite d'EADS FRANCE et son contenu ne peut être divulgué.

© - EADS FRANCE - 2011

2. Transfert : On multiplie la fonction \mathcal{F}_C par la fonction de transfert $T_{M\vec{M}'}^L$ et on somme sur les cellules C non-voisines de C' :

$$\mathcal{G}_C = \sum_{C \notin v(C')} T_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}) \cdot \mathcal{F}_C(\vec{s}) \quad (3.11)$$

3. Intégration : pour toute cellule C' fixée et pour toute fonction de base $\vec{\varphi}_j$ localisée dans C' on calcule l'intégrale :

$$\frac{ik}{16\pi^2} \int_{y \in \Gamma \cap C'} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} \mathcal{G}_{C'}(\vec{s}) e^{ik\vec{s} \cdot \vec{M}'y} \varphi_j(y) d\vec{s} dy \quad (3.12)$$

Le résultat de cette intégration constitue la partie «interactions lointaines» de la j-ième composante de notre produit matrice-vecteur et se rajoute naturellement à la partie «interactions proches».

Amélioration de cet algorithme :

Dans la première approche on avait transformé le produit matrice-vecteur 3.1 en quatre produits correspondant aux composantes x , y , z et à la divergence des fonctions \vec{t} et $\vec{\varphi}_j$. Pour cette deuxième approche on ne va pas séparer les composantes mais on va s'intéresser au terme en divergence. Pour cela on considère deux cellules C et C' non-voisines. Le terme de l'interaction lointaine calculé par la FMM est le suivant :

$$\frac{ik}{16\pi^2} \int_{x \in \Gamma \cap C} \int_{y \in \Gamma \cap C'} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} e^{ik\vec{s} \cdot x\vec{M}} T_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}) e^{ik\vec{s} \cdot \vec{M}'y} d\vec{s} \left(\vec{t}(x) \cdot \vec{\varphi}_j(y) - \frac{1}{k^2} \text{div}_\Gamma \vec{t}(x) \cdot \text{div}_\Gamma \vec{\varphi}_j(y) \right) dx dy \quad (3.13)$$

En ne travaillant que sur le terme en divergence et en réordonnant les intégrales on obtient :

$$\int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} \left(\int_{x \in \Gamma \cap C} e^{ik\vec{s} \cdot x\vec{M}} \text{div}_\Gamma \vec{t}(x) dx \right) \left(\int_{y \in \Gamma \cap C'} e^{ik\vec{s} \cdot \vec{M}'y} \text{div}_\Gamma \vec{\varphi}_j(y) dy \right) T_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}) d\vec{s}$$

En faisant une intégration par partie et en utilisant le fait que le courant considéré est de flux nul sur le bord Γ qui est régulier on a :

$$\begin{cases} \int_{x \in \Gamma \cap C} e^{ik\vec{s} \cdot x\vec{M}} \text{div}_\Gamma \vec{t}(x) dx = - \int_{x \in \Gamma \cap C} e^{ik\vec{s} \cdot x\vec{M}} (-ik\vec{s}) \cdot \vec{t}(x) dx \\ \int_{y \in \Gamma \cap C'} e^{ik\vec{s} \cdot \vec{M}'y} \text{div}_\Gamma \vec{\varphi}_j(y) dy = - \int_{y \in \Gamma \cap C'} e^{ik\vec{s} \cdot \vec{M}'y} (ik\vec{s}) \cdot \vec{\varphi}_j(y) dy \end{cases} \quad (3.14)$$

Ce document est la propriété d'EADS FRANCE ; il ne peut être communiqué à des tiers et/ou reproduit sans l'autorisation préalable écrite d'EADS FRANCE et son contenu ne peut être divulgué.

En remplaçant dans 3.13 on obtient :

$$\frac{ik}{16\pi^2} \int_{x \in \Gamma \cap \mathcal{C}} \int_{y \in \Gamma \cap \mathcal{C}'} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} e^{ik\vec{s}.x\vec{M}} T_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}) e^{ik\vec{s}.M'y} d\vec{s} (\vec{t}(x) \cdot \vec{\varphi}_j(y) - \vec{s} \cdot \vec{t}(x) \vec{s} \cdot \vec{\varphi}_j(y)) dx dy$$

On remarque que

$$\vec{t}(x) \cdot \vec{\varphi}_j(y) - \vec{s} \cdot \vec{t}(x) \vec{s} \cdot \vec{\varphi}_j(y) = (\vec{t}(x) - (\vec{s} \cdot \vec{t}(x)) \vec{s}) \cdot \vec{\varphi}_j(y)$$

On pratique on modifie juste l'étape d'initialisation :

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\vec{s}) = \int_{x \in \Gamma \cap \mathcal{C}} e^{ik\vec{s}.x\vec{M}} (\vec{t}(x) - (\vec{s} \cdot \vec{t}(x)) \vec{s}) dx \quad (3.15)$$

Le terme $(\vec{t}(x) - (\vec{s} \cdot \vec{t}(x)) \vec{s})$ est la projection orthogonale de \vec{t} sur \vec{s}

Cette amélioration va :

- diminuer la complexité de la FMM.
- permettre de traiter également les formulation *MFIE* et *CFIE*.

3.1.2 FMM multi-niveau

La méthode multipole rapide multi-niveau se construit à partir de l'utilisation récursive de la relation suivante entre les fonctions de radiation :

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\vec{s}) = e^{ik\vec{s}.M_1\vec{M}} \mathcal{F}_{\mathcal{C}_1}(\vec{s}) + e^{ik\vec{s}.M_2\vec{M}} \mathcal{F}_{\mathcal{C}_2}(\vec{s})$$

Où la cellule \mathcal{C} centrée en M est divisée en deux cellules ; \mathcal{C}_1 centrée en M_1 et \mathcal{C}_2 centrée en M_2 .

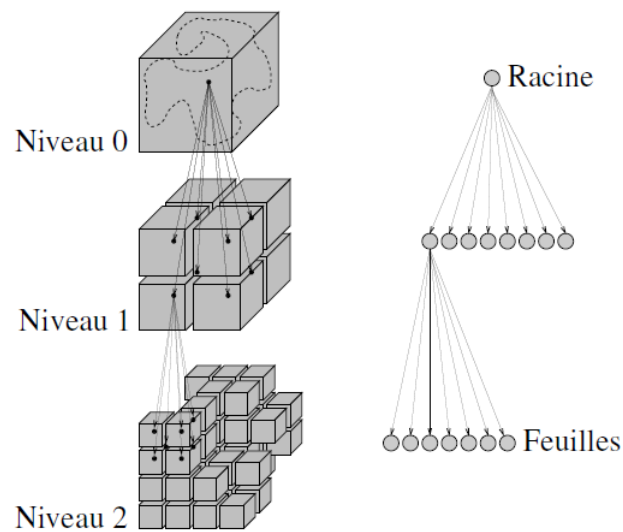
Pour utiliser cette relation on définit un découpage à plusieurs niveaux de Γ , chaque niveau est une subdivision du niveau précédent avec un pas deux fois plus petit. On définit ainsi une structure s'apparentant à un arbre entre les différentes grilles (figure 3.5).

Les cellules d'un niveau n issues de la division d'une cellule du niveau $n-1$ sont appelées «enfants» de cette cellule. La relation inverse définit le «parent». On note $p(\mathcal{C})$ le parent de la cellule \mathcal{C} et $e(\mathcal{C})$ l'ensemble des enfants de la cellule \mathcal{C} . On désigne par $\mathcal{C}^{(d)}$ une cellule au niveau d

Notion de banlieue :

On va voir apparaître une nouvelle notion dans cette section qui est la notion «banlieue

Ce document est la propriété d'EADS FRANCE ; il ne peut être communiqué à des tiers et/ou reproduit sans l'autorisation préalable écrite d'EADS FRANCE et son contenu ne peut être divulgué.

FIGURE 3.5 – Découpage multi-niveau de Γ et arbre associé

de \mathcal{C} ». On dit que deux cellules d'un même niveau sont «banlieues» l'une de l'autre si elles ne sont pas voisines mais que leurs parents respectifs le sont. On note $b(\mathcal{C})$ l'ensemble des banlieues de \mathcal{C} . On note $d(\mathcal{C})$ l'ensemble des cellules distantes de \mathcal{C} (c'est les cellules qui ne sont ni voisines ni banlieues de \mathcal{C}). Ces notions apparaissent déjà au niveau 1 (figure 3.6).

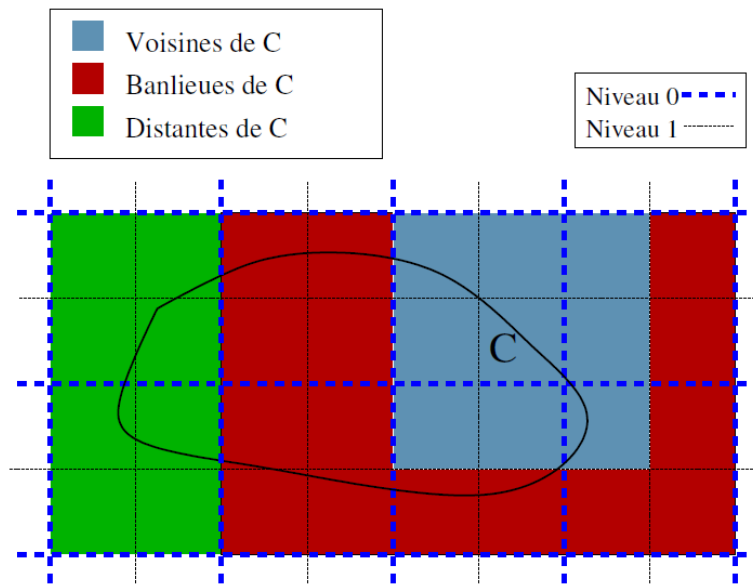


FIGURE 3.6 – Voisins et banlieues

Comme il y a plusieurs niveaux, il faut savoir quelle cellule est traitée à chaque niveau et avec quelle méthode (FMM ou classique). Généralement pour un niveau d donné ($0 \leq d \leq N - 1$), on traite les cellules banlieues avec la FMM au niveau d , les cellules voisines (plus proches que les banlieues) sont traitées soit par les interactions proches si $d = N - 1$ soit par une FMM en niveau inférieur si $d \leq N - 1$. Les cellules distantes sont traitées par une FMM au niveau supérieur ($d + 1$). Pour une FMM à deux niveaux les cellules voisine de \mathcal{C} sont traitées par les interactions proches au niveau 1, les cellules banlieues sont traitées avec une FMM au niveau 1 enfin les cellules distantes sont traitées avec une FMM au niveau 0. On cherche à utiliser la FMM au plus haut niveau en partant des feuilles vers la racine car plus les cellules sont grandes plus les transferts sont rapides.

Algorithme complet :

On se place dans le même cas que pour FMM mono-niveau où on cherche à calculer le terme 3.8 et on se donne un découpage récursif de Γ à l'aide d'un arbre à N niveaux ($N \geq 3$). Les niveaux sont numérotés de $0, 1, \dots, N - 1$. On note N_{plaf} le niveau plafond qui est le plus haut niveau exploré.

-Interactions proches : elles sont traitées au niveau $N - 1$, exactement comme dans le cas mono-niveau (équation 3.9).

-Interactions lointaines : il y a cinq phases dans ce calcul.

1. **Initialisation :** Pour toute cellule \mathcal{C} du niveau $N - 1$, on calcule la fonction de radiation

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}(N-1)}(\vec{s}) = \int_{x \in \Gamma \cap \mathcal{C}(N-1)} e^{ik\vec{s} \cdot x M^{(N-1)}} f(x) dx$$

en tout point \vec{s} de notre quadrature de \mathcal{S} pour le niveau $N - 1$.

2. **Montées :** pour tous les niveaux $d = N - 2, \dots, N_{plaf}$ (dans cet ordre), et pour toute cellule $\mathcal{C}^{(d)}$ du niveau d , on calcule la fonction de radiation $\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(d)}}$ à partir de celles des enfants :

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(d)}}(\vec{s}) = \sum_{\mathcal{C}^{(d)} \in e(\mathcal{C}^{(d)})} e^{ik\vec{s} M^{(d+1)} \vec{M}^{(d)}} \mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(d+1)}}(\vec{s})$$

Il y a $N - N_{plaf} - 1$ étapes de montées.

3. **Transfert :** On va traiter le niveau N_{plaf} différemment des autres, si $d = N_{plaf}$ on parcourra toutes les cellules non-voisines de $\mathcal{C}'^{(d)}$ et donc on aura :

$$\mathcal{G}_{\mathcal{C}'^{(d)}}(\vec{s}) = \sum_{\mathcal{C}^{(d)} \notin v(\mathcal{C}^{(d)})} T_{M^{(d)} \vec{M}'^{(d)}}^{L^{(d)}}(\vec{s}) \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(d)}}(\vec{s})$$

Ce document est la propriété d'EADS FRANCE ; il ne peut être communiqué à des tiers et/ou reproduit sans l'autorisation préalable écrite d'EADS FRANCE et son contenu ne peut être divulgué.

Pour les autres niveaux $d = N_{plaf} + 1, \dots, N - 1$, on parcourra les cellules banlieues de $\mathcal{C}'^{(d)}$ et donc on aura :

$$\mathcal{G}_{\mathcal{C}'^{(d)}}(\vec{s}) = \sum_{\mathcal{C}^{(d)} \in b(\mathcal{C}'^{(d)})} T_{M^{(d)} \vec{M}'^{(d)}}^{L^{(d)}}(\vec{s}) \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(d)}}(\vec{s})$$

pour tout \vec{s} de notre quadrature de S pour le niveau d .

Il y a $N - N_{plaf}$ étapes de transfert.

4. **Descentes** : On calcule la deuxième partie de la fonction de radiation $\mathcal{G}_{\mathcal{C}'^{(d)}}$ de la cellule $\mathcal{C}'^{(d)}$ à partir du parent pour $d = N_{plaf} + 1, \dots, N - 1$ (dans cet ordre) et pour $\mathcal{C}'^{(d)}$

$$\mathcal{G}_{\mathcal{C}'^{(d)}}(\vec{s}) = e^{ik\vec{s}M^{(d-1)}\vec{M}^{(d)}} \mathcal{G}_{\mathcal{C}'^{(d-1)}}(\vec{s})$$

Cette partie se rajoute naturellement à la partie calculée dans la phase «transfert».

5. **Intégration** : pour toutes cellule $\mathcal{C}'^{(N-1)}$ et pour toute fonction de base φ_j localisée dans $\mathcal{C}'^{(N-1)}$, on calcule l'intégrale :

$$\frac{ik}{16\pi^2} \int_{y \in \Gamma \cap \mathcal{C}'^{(N-1)}} \int_{\vec{s} \in S} \mathcal{G}_{\mathcal{C}'^{(N-1)}}(\vec{s}) e^{ik\vec{s}M^{(N-1)}y} \varphi_j(y) d\vec{s} dy$$

Le résultat de cette intégration constitue la partie «interactions lointaines» de la j -ième composante de notre produit matrice-vecteur et se rajoute naturellement à la partie «interactions proches».

Les différentes étapes de la méthode multipôle rapide sont représenté à la figure 3.7

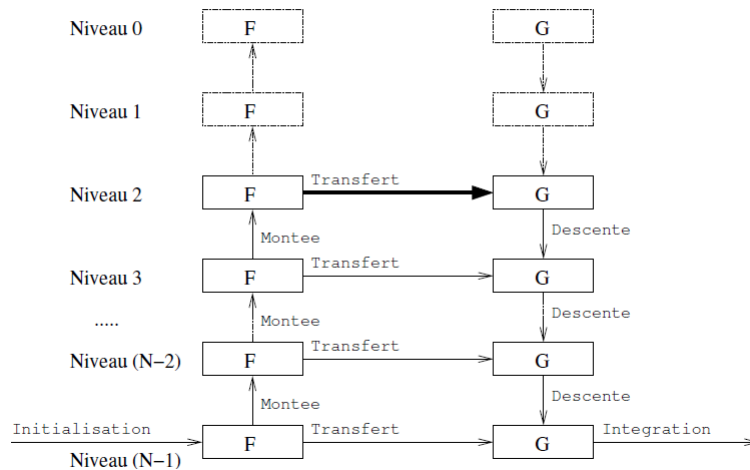


FIGURE 3.7 – FMM multi-niveau avec $N_{plaf} = 2$

3.1.3 Champ lointain avec la FMM

On considère un objet Ω parfaitement conducteur de frontière Γ se trouvant dans le vide. L'objet est illuminé par une onde électromagnétique incidente de fréquence f et de pulsation $\omega = 2\pi f$. On cherche à calculer le champ diffracté loin de Ω . Pour cela on suppose que l'on est à une distance R ($R \rightarrow +\infty$) de celui-ci dans une direction (θ, φ) qu'on appellera $\vec{\xi}$, $\vec{\xi} \in \mathcal{S}$ sphère unité de \mathbb{R}^3 . L'amplitude de l'onde électromagnétique diffractée dans cette direction est donnée par :

$$\vec{A}(\vec{\xi}) = i\omega\mu_0 \left(\int_{\Gamma} e^{-ik\vec{\xi} \cdot \vec{O}x} (\vec{j}(x) - \vec{\xi} \cdot \vec{j}(x) \vec{\xi}) dx \right) \quad (3.16)$$

Le point O sert à fixer l'origine des phases, son choix n'influe pas sur le module de $\vec{A}(\vec{\xi})$. Pour y assez grand le champ électrique \vec{E} s'écrit sous la forme :

$$\vec{E}(y) = \frac{e^{ik|y|}}{4\pi|y|} \vec{A}\left(\frac{y}{|y|}\right) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|y|}\right)\right)$$

On ne s'intéresse qu'au champ électrique, car on peut déduire le champ magnétique \vec{H} à partir de \vec{E} puisque les deux champs sont orthogonaux et que le rapport des modules vaut $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ qui est l'impédance du vide.

On remarque bien une très grande ressemblance entre la fonction de radiation 3.15, en remplaçant \vec{t} par \vec{j} cette fonction s'écrit :

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\vec{s}) = \int_{x \in \Gamma \cap \mathcal{C}} e^{ik\vec{s} \cdot x} \vec{M}(\vec{j}(x) - (\vec{s} \cdot \vec{j}(x)) \vec{s}) dx$$

et l'expression du champ lointain :

$$\vec{A}(\vec{\xi}) = i\omega\mu_0 \left(\int_{\Gamma} e^{-ik\vec{\xi} \cdot \vec{O}x} (\vec{j}(x) - \vec{\xi} \cdot \vec{j}(x) \vec{\xi}) dx \right)$$

Donc on dit que $i\omega\mu_0 \mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\vec{s})$ est l'amplitude du champ lointain diffracté dans la direction \vec{s} par la portion de l'objet $\Gamma \cap \mathcal{C}$. Donc pour calculer le champ lointain on prend pour cellule \mathcal{C} la racine de l'arbre (elle contient tout Γ). Dans ce cas là on aura :

$$\vec{A}(\vec{\xi}) = i\omega\mu_0 \mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\vec{\xi})$$

On choisit comme origine des phases le point M le centre de la cellule \mathcal{C} .

Avec ça on aura calculé le champ lointain dans toutes les directions de notre discrétisation

Ce document est la propriété d'EADS FRANCE ; il ne peut être communiqué à des tiers et/ou reproduit sans l'autorisation préalable écrite d'EADS FRANCE et son contenu ne peut être divulgué.

de la sphère unité \mathcal{S} . Pour se ramener au champ lointain dans les directions demandées par l'utilisateur on a le choix entre deux méthodes, la première est l'interpolation linéaire et la deuxième en passant par les harmoniques sphériques.

Pour notre algorithme, on a choisi l'interpolation linéaire suivante :

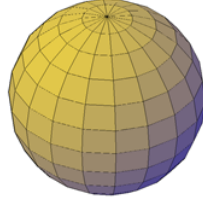


FIGURE 3.8 – grille (θ, ϕ)

La figure 3.8 représente la discrétisation en θ et ϕ de la sphère unité
Une partie de cette grille représenter de la figure 3.9

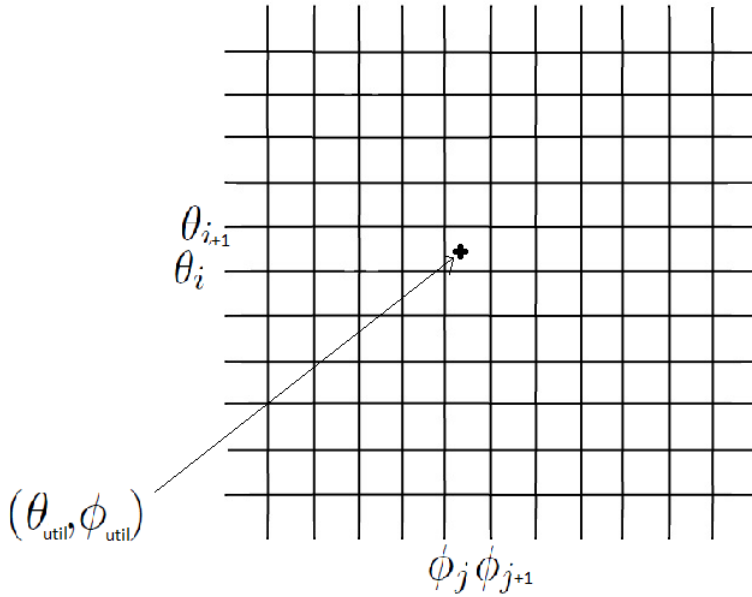


FIGURE 3.9 – grille (θ, ϕ)

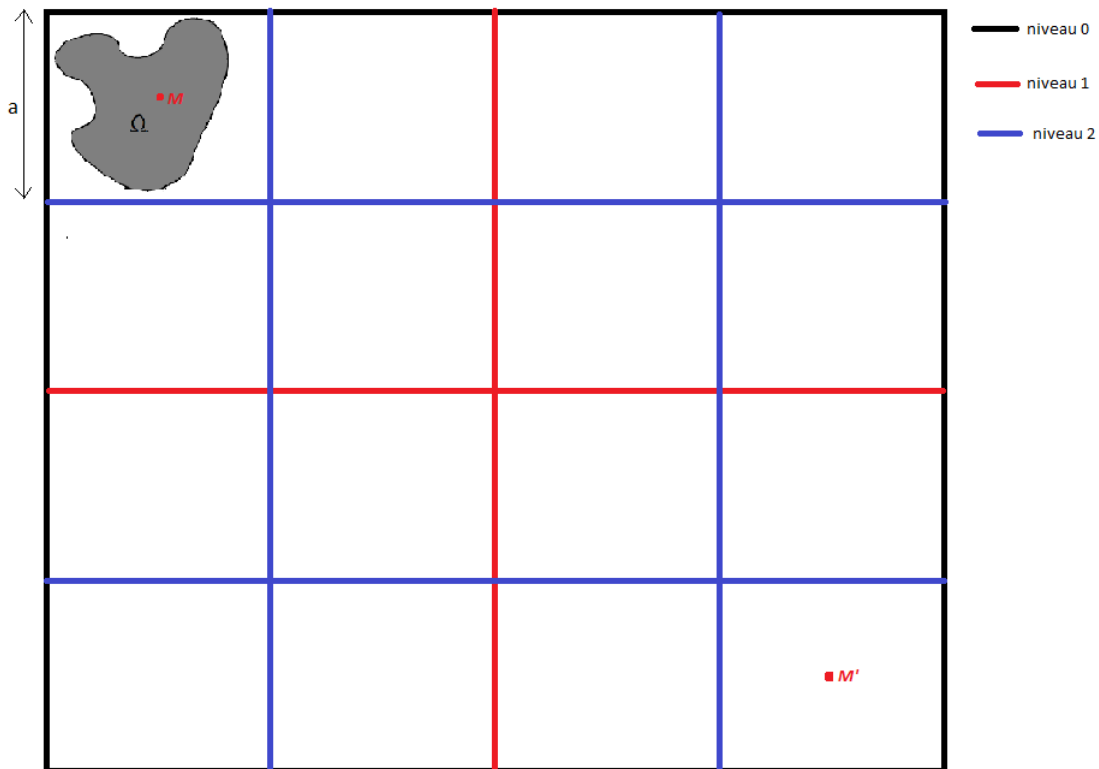
$$\begin{aligned}
 A(\theta_{util}, \phi_{util}) &= [(\theta_{i+1} - \theta_{util})(\phi_{j+1} - \phi_{util})\mathcal{F}_C(\theta_i, \phi_j) + (\theta_{i+1} - \theta_{util})(\phi_{util} - \phi_j)\mathcal{F}_C(\theta_i, \phi_{j+1}) \\
 &\quad + (\theta_{util} - \theta_{i+1})(\phi_{j+1} - \phi_{util})\mathcal{F}_C(\theta_{i+1}, \phi_j) + (\theta_{util} - \theta_i)(\phi_{util} - \phi_j)\mathcal{F}_C(\theta_{i+1}, \phi_{j+1})] \\
 &\quad / (\theta_i\phi_j - \theta_i\phi_{j+1} - \theta_{i+1}\phi_j + \theta_{i+1}\phi_{j+1})
 \end{aligned}$$

Dans le but d'utiliser les routines déjà implémentées au sein de EADS sans modifier la structure du code, il aurait fallu ajouter, à notre algorithme, des étapes qui correspondraient aux étapes de transfert et d'intégration de l'algorithme FMM. Dans l'étape qui correspond au transfert j'enregistre la fonction de radiation dans un vecteur et dans l'étape qui correspond à l'intégration je fait l'interpolation. Pour pouvoir faire ces deux étapes il a fallu construire un arbre de manière est ce que, au niveau deux, la totalité de notre objet soit englobé dans une seule cellule car il n'y a pas de transfert à la racine et au niveau 1 de l'arbre et le champ lointain diffracté correspond, à une constante près, à la fonction de radiation calculée sur la cellule qui englobe tout l'objet. Pour construire un tel arbre, on considère une boîte, de dimension a , qui englobe l'objet et en partant du centre, $M(x_0, y_0, z_0)$, de cette boîte, on calcule un point, M' de coordonnées (x, y, z) tel que :

$$\begin{cases} x = x_0 + 3a \\ y = y_0 + 3a \\ z = z_0 + 3a \end{cases}$$

On construit notre arbre en englobant l'objet et le point M' dans une même boîte. Cette boîte est ensuite divisée en huit boîtes identique qui constituent le niveau 1, on répète cette division pour obtenir le niveau 2.

La figure 3.10 représente l'équivalent 2d de ce qu'on a fait pour construire notre arbre.

FIGURE 3.10 – *Arbre pour notre algorithme*

3.1.4 Validation

Pour valider notre algorithme, on lui a passé une batterie de tests qui représentent la quasi-totalité des cas pratiques. Ces tests se trouvaient déjà dans la base de données de EADS parmi les autotests et on leur a ajouté l'option "fmm". On compare le résultat obtenu avec le résultat obtenu avec un calcul classique (sans l'option "fmm"). Cette comparaison revient à calculer la quantité suivante :

$$\frac{\|U_{class} - U_{fmm}\|_{L^2}}{\|U_{class}\|_{L^2}}$$

Les résultats obtenus pour les différents tests sont représentés dans le tableau suivant :

Ce document est la propriété d'EADS FRANCE ; il ne peut être communiqué à des tiers et/ou reproduit sans l'autorisation préalable écrite d'EADS FRANCE et son contenu ne peut être divulgué.

Description	Erreur
Cône-sphère parfaitement conducteur (1320 dl) illuminé par 26 ondes planes à la fréquence 300 MHz	0.01040496
Cône-sphère diélectrique ($\epsilon = 2$, $\mu = 1$, 2640 dl) illuminé par 26 ondes planes à la fréquence 210 MHz avec plan de sol $x = 0$.	0.04325095
Cône-sphère diélectrique absorbant ($\epsilon = 14$, $\mu = 0.6i$, 2640 dl) illuminé par 26 ondes planes à la fréquence 150 MHz avec plan de sol $y = 0$.	0.01509439
Cône-sphère parfaitement conducteur avec une couche de diélectrique ($\epsilon = 2$, $\mu = 1$, 3576 dl) illuminé par 26 ondes planes à la fréquence 210 MHz avec plan de sol $z = 0$.	0.02706654
Cône-sphère avec plan de symétrie $y = 0$ parfaitement conducteur avec une couche de diélectrique absorbant ($\epsilon = 14$, $\mu = 0.6i$, 1942 dl) illuminé par 26 ondes planes à la fréquence 150 MHz.	0.00991963
Cône-sphère avec deux plan de symétrie $y = 0$ et $z = 0$ parfaitement conducteur (403 dl) illuminé par 26 ondes planes à la fréquence 300 MHz.	0.01044440
Cône-sphère parfaitement conducteur (1320 dl) illuminé par 26 ondes planes à des fréquence de 150 MHz 300 MHz par pas de 30 Mhz (6 fréquences).	0.01040496
Boîte parfaitement conductrice ($dx = 2m$, $dy = 1m$ et $dz = 0.5m$) (1320 dl) avec une boucle sur les fréquences et un dipôle électrique placé au point (0,0.4,0.1) avec $j_0 = (0, 0, 1)$.	0.00601779
Boîte parfaitement conductrice ($dx = 2m$, $dy = 1m$ et $dz = 0.5m$) avec plan de symétrie $z = 0$ (1488 dl) avec une boucle sur les fréquences et un dipôle magnétique placé au point (0,0.4,0.1) avec $m_0 = (0, 0, 1)$.	0.00458567
Boîte parfaitement conductrice ($dx = 2m$, $dy = 1m$ et $dz = 0.5m$) (1320 dl) avec plan de sol $z = 0$, avec une boucle sur les fréquences et un dipôle électrique placé au point (0,0.4,0.85) avec $j_0 = (0, 0, 1)$.	0.01282398
Boîte parfaitement conductrice ($dx = 2m$, $dy = 1m$ et $dz = 0.5m$) (2706 dl) avec une boucle sur les fréquences et un fichier dipôle avec rotation et translation	0.00590625
Cône-sphère parfaitement conducteur (1320 dl) illuminé par 26 ondes planes à la fréquence 300 MHz (calcul en simple precision)	0.01040541
Plaque parfaitement conductrice illuminée par un générateur positionné sur fil à la fréquence 4 GHz (Mode BF)	0.01463684
Boîte (cube unité) PC illuminée par un dipôle électrique situé au point (0.5, 0.5, 0.3), avec 3 fréquences (10MHz, 100MHz, 1GHz)	0.00000791

Boîte (cube unité) PC illuminée par un dipôle magnétique situé au point (0.5, 0.5, 0.3), avec 3 fréquences (10MHz, 100MHz, 1GHz). Mode BF (La 2 nd erreur sans l'option BF)	0.00000738
Cône-sphere (1334+823(mobiles) dl) illuminé avec une onde plana à la fréquence 350 MHz (il y a une partie mobile mais pas de symétrie)	0.01752927 0.01758301
Cône-sphere (728+434(mobiles) dl) illuminé avec une onde plana à la fréquence 350 MHz (il y a une partie mobile et avec symétrie (mur impair))	0.01312402 0.01309137
Cône-sphere (728+434(mobiles) dl) illuminé avec une onde plana à la fréquence 350 MHz (il y a une partie mobile et avec symétrie (mur pair et impair))	0.01757823 0.01764476
Guide coaxial avec plan de masse de taille 2λ par 3λ (3219+90 dl). Le guide traverse le plan de masse et l'âme dépasse d'une longueur égale à $\lambda/4$. Rayon intérieur= $\lambda/30$, rayon extérieur= $\lambda/10$ et Longueur du guide= $\lambda/2$.	0.06273541
Plaque parfaitement conductrice illuminée par un générateur positionné sur un fil à la fréquence 4 GHz. Pas de contact entre le fil et la Plaque.	0.01183791
Plaque parfaitement conductrice illuminée par une onde plane à la fréquence 4 GHz. Fil avec générateur passif. Contact entre le fil et la Plaque.	0.00563923
Objet métallique parfaitement conducteur illuminé par un dipôle fil (fil de taille $t\lambda/4$ et générateur à l'origine) ou par un dipôle électrique (amplitude= $-I * d/2$ avec I l'intensité dans le générateur), $F = 4GHz$.	0.00299217
Deux guides coaxiaux avec un plan de symétrie en $y = 0$ et avec $F = 3.95GHz$	0.01223262
4 guides coaxiaux avec deux plans de symétrie en $y = 0$ et $z = 0$. $F = 3.95GHz$	0.04032101
2 guides coaxiaux avec un plan de symétrie en $y = 0$. $F = 3.95GHz$ second membre de type onde plane	0.01674136

3.2 FMM en acoustique

Comme on a présenté le principe de la méthode multipôle précédemment, dans cette partie on va survoler juste les étapes qui sont différentes par rapport à l'électromagnétisme.

3.2.1 Préparation de la FMM

On va préparer, dans cette section, notre problème au calcul FMM. On commence par découper la surface \mathcal{S} en un découpage hiérarchique ; en construisant un octree autour de l'objet Ω^- . On répartit les degrés de liberté entre les feuilles de cet arbre de la façon suivante : les fonctions de bases, χ_j , sont localisées à l'intérieur des triangles et ω_j sur les sommets des triangles. Ensuite on fixe le nombre de pôles de chaque niveau de notre arbre et le nombre de directions (θ, φ) de notre discrétisation de la sphère unité. On cherchera à calculer les interactions lointaines entre les degrés de liberté situés dans des feuilles non-voisines pour cela, on prend deux cellules \mathcal{C} et \mathcal{C}' et on calculera le terme d'interaction entre les sous-domaines $S \cap \mathcal{C}$ et $S \cap \mathcal{C}'$

On va appliquer la méthode multipôle rapide au calcul du système 1.5 pour cela on va écrire la décomposition du noyau de Green :

$$G(y, x) = \frac{ik}{16\pi^2} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{\vec{s} \in S} e^{ik\vec{s}.y\vec{M}} T_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}) e^{ik\vec{s}.M'\vec{x}} d\vec{s} \quad (3.17)$$

avec M est le centre de la cellule \mathcal{C} et M' est le centre de la cellule \mathcal{C}' .

De plus on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial(e^{ik\vec{s}.M'\vec{x}})}{\partial \vec{v}_x} = \vec{grad}_x(e^{ik\vec{s}.M'\vec{x}}) \cdot \vec{v}_x = ik\vec{s} \cdot \vec{v}_x e^{ik\vec{s}.M'\vec{x}} \\ \frac{\partial(e^{ik\vec{s}.y\vec{M}})}{\partial \vec{v}_y} = \vec{grad}_y(e^{ik\vec{s}.y\vec{M}}) \cdot \vec{v}_y = -ik\vec{s} \cdot \vec{v}_y e^{ik\vec{s}.y\vec{M}} \end{cases} \quad (3.18)$$

On a aussi les décompositions suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \vec{v}_x} = -\frac{k}{16\pi^2} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{\vec{s} \in S} e^{ik\vec{s}.y\vec{M}} T_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}) k\vec{s} \cdot \vec{v}_x e^{ik\vec{s}.M'\vec{x}} d\vec{s} \\ \frac{\partial G(x, y)}{\partial \vec{v}_y} = \frac{k}{16\pi^2} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{\vec{s} \in S} k\vec{s} \cdot \vec{v}_y e^{ik\vec{s}.y\vec{M}} T_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}) e^{ik\vec{s}.M'\vec{x}} d\vec{s} \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial^2 G(y, x)}{\partial \nu_x \partial \nu_y} = \frac{ik}{16\pi^2} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{\vec{s} \in S} k\vec{s} \cdot \vec{v}_y e^{ik\vec{s}.y\vec{M}} T_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}) e^{ik\vec{s}.M'\vec{x}} d\vec{s} \quad (3.20)$$

Ce document est la propriété d'EADS FRANCE ; il ne peut être communiqué à des tiers et/ou reproduit sans l'autorisation préalable écrite d'EADS FRANCE et son contenu ne peut être divulgué.

3.2.2 Calcul multipôle

Après ce qu'on vient de voir, on peut faire une méthode multipôle pour l'acoustique. On va avoir quatre termes différents pour les étapes d'initialisation et d'intégration. Les étapes de montée, transfert et descente restent identiques au cas électromagnétique.

- Pour le terme $-\frac{1}{ik} \oint_{S \times S} \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial \nu_x \partial \nu_y} \phi(y) \omega_i(x) dy dx$ on a :

Initialisation :

$$\mathcal{F}_C(\vec{s}) = - \int_{y \in S \cap C} k \vec{s} \cdot \vec{\nu}_y e^{ik\vec{s} \cdot y \vec{M}} \phi(y) dy$$

Intégration : On a à calculer le terme suivant

$$\frac{1}{16\pi^2} \int_{x \in S \cap C'} \int_{\vec{s} \in S} \mathcal{G}_C(\vec{s}) k \vec{s} \cdot \vec{\nu}_x e^{ik\vec{s} \cdot \vec{M}'x} \omega_i(x) d\vec{s} dx$$

- Pour le terme $-\int_{S \times \Gamma} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_x} \lambda(y) \omega_i(x) dy dx$ on a :

Initialisation :

$$\mathcal{F}_C(\vec{s}) = \int_{y \in \Gamma \cap C} k e^{ik\vec{s} \cdot y \vec{M}} \lambda(y) dy$$

Intégration : On a à calculer le terme suivant

$$\frac{1}{16\pi^2} \int_{x \in S \cap C'} \int_{\vec{s} \in S} \mathcal{G}_C(\vec{s}) k \vec{s} \cdot \vec{\nu}_x e^{ik\vec{s} \cdot \vec{M}'x} \omega_i(x) d\vec{s} dx$$

- Pour le terme $-\int_{\Gamma \times S} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y} \phi(y) \chi_i^\Gamma(x) dy dx$ on a :

Initialisation :

$$\mathcal{F}_C(\vec{s}) = - \int_{y \in \Gamma \cap C} k \vec{s} \cdot \vec{\nu}_y e^{ik\vec{s} \cdot y \vec{M}} \phi(y) dy$$

Intégration : On a à calculer le terme suivant

$$\frac{1}{16\pi^2} \int_{x \in \Gamma \cap C'} \int_{\vec{s} \in S} \mathcal{G}_C(\vec{s}) k e^{ik\vec{s} \cdot \vec{M}'x} \chi_i^\Gamma(x) d\vec{s} dx$$

- Pour le terme $-ik \int_{\Gamma \times \Gamma} G(x,y) \lambda(y) \chi_i^\Gamma(x) dy dx$ on a :

Initialisation :

$$\mathcal{F}_C(\vec{s}) = \int_{y \in \Gamma \cap C} k e^{ik\vec{s} \cdot y \vec{M}} \lambda(y) dy$$

Ce document est la propriété d'EADS FRANCE ; il ne peut être communiqué à des tiers et/ou reproduit sans l'autorisation préalable écrite d'EADS FRANCE et son contenu ne peut être divulgué.

Intégration : On a à calculer le terme suivant

$$\frac{1}{16\pi^2} \int_{x \in \Gamma \cap \mathcal{C}'} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} \mathcal{G}_{\mathcal{C}}(\vec{s}) k e^{ik\vec{s} \cdot \vec{M}^T x} \chi_i^{\Gamma}(x) d\vec{s} dx$$

On remarque que certains termes sont identiques donc on peut se ramener à une méthode multipôle à une seule composante :

Initialisation : Pour toute cellule \mathcal{C} , on calcule la fonction de radiation

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\vec{s}) = \int_{y \in \mathcal{S} \cap \mathcal{C}} k [\lambda(y) - \vec{s} \cdot \vec{\nu}_y \phi(y)] e^{ik\vec{s} \cdot y \vec{M}} dy \quad (3.21)$$

en tout point \vec{s} de notre quadrature de \mathcal{S} .

Montée, Transfert, Descente : Ces étapes restent identiques par rapport au cas électromagnétique.

Intégration : pour toutes cellule \mathcal{C}' et pour toute fonction de base φ_j localisée dans \mathcal{C}' , on calcule l'intégrale :

$$\begin{cases} \frac{1}{16\pi^2} \int_{x \in \mathcal{S} \cap \mathcal{C}'} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} \mathcal{G}_{\mathcal{C}}(\vec{s}) k \vec{s} \cdot \vec{\nu}_x e^{ik\vec{s} \cdot \vec{M}^T x} \omega_i(x) d\vec{s} dx \\ \frac{1}{16\pi^2} \int_{x \in \Gamma \cap \mathcal{C}'} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} \mathcal{G}_{\mathcal{C}}(\vec{s}) k e^{ik\vec{s} \cdot \vec{M}^T x} \chi_i^{\Gamma}(x) d\vec{s} dx \end{cases}$$

3.2.3 Champ lointain avec la FMM

On considère un objet Ω^- régulier, de frontière S constituée d'une partie traitée Γ , d'impédance η , et d'une partie rigide Σ , se trouvant dans un fluide parfait (généralement l'air ou de l'eau). L'objet est illuminé par une onde plane acoustique incidente u_{inc} de fréquence f et de pulsation $\omega = 2\pi f$. On cherche à calculer le champ diffracté loin de Ω^- . Pour cela on suppose que l'on est à une distance R , ($R \rightarrow +\infty$), de celui-ci dans une direction (θ, φ) qu'on appellera $\vec{\xi}$, $\vec{\xi} \in \mathcal{S}$ sphère unité de \mathbb{R}^3 .

On a vu dans la chapitre 2 que l'amplitude de l'onde acoustique diffractée dans une direction $\vec{\xi}$ est donné par :

$$A(\vec{\xi}) = -ik \int_S e^{-ik(\vec{o}\vec{x} \cdot \vec{\xi})} \left(\lambda(x) - \vec{\xi} \cdot \vec{\nu}_x \phi(x) \right) dx$$

Il y a une très grande ressemblance entre cette quantité et la fonction 3.21 qui s'écrit sous la forme suivante :

Ce document est la propriété d'EADS FRANCE ; il ne peut être communiqué à des tiers et/ou reproduit sans l'autorisation préalable écrite d'EADS FRANCE et son contenu ne peut être divulgué.

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\vec{s}) = \int_{y \in S \cap \mathcal{C}} k [\lambda(y) - \vec{s} \cdot \vec{\nu}_y \phi(y)] e^{ik\vec{s} \cdot y \vec{M}} dy$$

On remarque que, si on prend pour cellule \mathcal{C} la racine de l'arbre qui englobe l'objet Ω^- (elle contient toute la frontière S), on a :

$$A(\vec{\xi}) = -i\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\vec{\xi})$$

Donc pour calculer notre champ lointain il suffit de forcer la FMM d'aller jusqu'à la racine de l'arbre et d'enregistrer la fonction de radiation de la racine. Et pour se ramener aux directions demandées par l'utilisateur, on fait une interpolation linéaire.

Pour garder la structure du code tel qu'elle est, comme en électromagnétisme, on ajouté une étape de transfert, cette étape ne fait pas de transfert mais enregistre la fonction de radiation, et une étape d'intégration mais qui, au lieu de faire de l'intégration, fait de l'interpolation linéaire. Enfin on construit l'arbre tel qu'au niveau 2, l'objet soit englobé par une seule cellule. Cet arbre est construit de la façon vu à la section 3.1.3.

3.2.4 Validation

Comme pour le cas électromagnétique, pour valider notre algorithme, on lui a passé une batterie de tests (c'est les mêmes tests qu'on a utilisé pour valider à la section 2.3). On a, ensuite, comparé nos résultats avec les résultats obtenus à la section 2.3 (méthode classique). Le tableau suivant résume les tests passés à notre algorithme et l'erreur commise pour chaque test. Pour rappel, on calcul l'erreur suivante :

$$\frac{\|U_{class} - U_{fmm}\|_{L^2}}{\|U_{class}\|_{L^2}}$$

Avec :

U_{class} : est le résultat obtenu avec le calcul classique.

U_{fmm} : est le résultat obtenu avec le calcul multipôle.

Description du test	Erreur
Cône-sphère rigide (927 dl) illuminé par 13 ondes planes avec $F = 340Hz$	0.00736453
Cône-sphère rigide (927 dl) illuminé par 13 ondes planes avec une boucle sur les fréquences (les fréquences sont rangées entre $260Hz$ et $340Hz$ avec un pas de $40Hz$)	0.00736453
Cône-sphère impédant (1256 dl) illuminé par 13 ondes planes avec $F = 340Hz$	0.00194926
Cône-sphère rigide (534 dl) illuminé par 13 ondes planes avec $F = 340Hz$ et avec un plan de symétrie $y = 0$	0.00736297
Cône-sphère rigide (534 dl) illuminé par 13 ondes planes avec une boucle sur les fréquences (les fréquences sont rangées entre $260Hz$ et $340Hz$ avec un pas de $40Hz$) et avec un plan de symétrie $y = 0$	0.00736297
Cône-sphère rigide (308 dl) illuminé par 13 ondes planes avec $F = 340Hz$ et avec deux plans de symétrie $x = 0$ et $y = 0$	0.00445194
Cône-sphère rigide (308 dl) illuminé par 13 ondes planes avec une boucle sur les fréquences (les fréquences sont rangées entre $260Hz$ et $340Hz$ avec un pas de $40Hz$) et avec deux plans de symétrie $x = 0$ et $y = 0$	0.00445194
Cône-sphère impédant (832 dl) illuminé par 13 ondes planes avec $F = 340Hz$ et avec deux plans de symétrie $x = 0$ et $y = 0$	0.00107094
Sphère rigide illuminée par un monopole avec $F = 340Hz$ et un écoulement nul	0.00657394
Sphère rigide illuminée par un monopole avec $F = 340Hz$ et un écoulement = $(0, 0, 0.5)$	0.00185708
Sphère rigide illuminée par un monopole avec $F = 340Hz$ et un écoulement = $(0.1, 0.2, 0.3)$	0.00246527
Sphère rigide illuminée par un monopole avec $F = 340Hz$ et un écoulement = $(0, 0, 0.5)$ (calcul en simple précision)	0.00186687
Sphère rigide (820 dl) illuminée par un dipôle avec $F = 340Hz$ et un écoulement nul	0.00638966
Nacelle (2706 dl avec 371 dl traités et 275 dl modal) avec $F = 340Hz$	0.00429828
Nacelle (2706 dl avec 371 dl traités et 275 dl modal) avec une partie mobile et avec $F = 340Hz$	0.00432639 0.00432639
Nacelle (1059 dl avec 196 dl traités et 131 dl modal) avec $F = 340Hz$ et avec une symétrie (mur pair)	0.00429463
Nacelle (1059 dl avec 196 dl traités et 131 dl modal) avec $F = 340Hz$ et avec une symétrie (mur pair) et une partie mobile	0.00426764 0.00426764

Nacelle (1059 dl avec 196 dl traités et 131 dl modal) avec $F = 340Hz$ et avec une symétrie (mur impair)	0.00783559
Nacelle (1059 dl avec 196 dl traités et 131 dl modal) avec $F = 340Hz$ et avec une symétrie (mur impair) et une partie mobile	0.00742051 0.00742051
Nacelle (1059 dl avec 196 dl traités et 131 dl modal) avec $F = 340Hz$ et avec deux symétries (mur pair et impair)	0.00429442
Nacelle (1059 dl avec 196 dl traités et 131 dl modal) avec $F = 340Hz$ et avec une partie mobile et deux symétries (mur pair et impair)	0.00446469 0.00446469
Nacelle (2706 dl avec 371 dl traités et 275 dl modal) avec $F = 340Hz$ et un écoulement $M = (0, 0, 0.5)$	0.00585646
Nacelle (2706 dl avec 371 dl traités et 275 dl modal) avec une partie mobile et avec $F = 340Hz$ et un écoulement $M = (0, 0, 0.5)$	0.00584115 0.00584115
Nacelle (1059 dl avec 196 dl traités et 131 dl modal) avec $F = 340Hz$ et un écoulement $M = (0, 0, 0.5)$ et avec une symétrie (mur pair)	0.00581741
Nacelle (1059 dl avec 196 dl traités et 131 dl modal) avec $F = 340Hz$ et un écoulement $M = (0, 0, 0.5)$ et avec une symétrie (mur pair) et une partie mobile	0.00584642 0.00584642
Nacelle (1059 dl avec 196 dl traités et 131 dl modal) avec $F = 340Hz$ et un écoulement $M = (0, 0, 0.5)$ et avec une symétrie (mur impair)	0.01158540
Nacelle (1059 dl avec 196 dl traités et 131 dl modal) avec $F = 340Hz$ et un écoulement $M = (0, 0, 0.5)$ et avec une symétrie (mur impair) et une partie mobile	0.01183297 0.01183297
Nacelle (1059 dl avec 196 dl traités et 131 dl modal) avec $F = 340Hz$ et un écoulement $M = (0, 0, 0.5)$ et avec deux symétries (mur pair et impair)	0.00581741
Nacelle (1059 dl avec 196 dl traités et 131 dl modal) avec $F = 340Hz$ et un écoulement $M = (0, 0, 0.5)$ et avec une partie mobile deux symétries (mur pair et impair)	0.00605298 0.00605298
Plan de sol accompagné de deux boîtes rigides (une en dessus l'autre en dessous), illuminé par des ondes planes et des dipôles localisé des deux cotés du plan	0.01701503
Plan de sol, illuminé par des ondes planes et des dipôles localisé des deux cotés du plan	0.00708510
Plan de sol avec une fente, accompagné de deux boîtes rigides (une en dessus l'autre en dessous) et illuminé par des ondes planes et des dipôles localisé des deux cotés du plan	0.01294688

Plan de sol avec une fente illuminé par des ondes planes et des dipôles localisé des deux cotés du plan	0.01067599
Plan de sol avec une fente illuminé par un guide d'ondes	0.01048008
Boule maillée par les tétraèdres, centrée à l'origine, le rayon=0.1, $\rho = 1.2$, $c = 340$, et $M = 0$. Extérieur ; $\rho = 1.2$, $c = 340$ et $M = 0$. Monopole centré au point $(0, 0, -0.3)$	0.00521886
Boule maillée par les tétraèdres, centrée à l'origine, le rayon=0.15, $\rho = 1.2$, $c = 340$, et $M = 0$, contenant une sphère rigide de rayon 0.1. Extérieur ; $\rho = 1.2$, $c = 340$ et $M = 0$. Monopole centré au point $(0, 0, -0.3)$	0.00151912
Boule maillée par les tétraèdres, centrée à l'origine, le rayon=0.1, $\rho = 1.2$, $c = 340$, et $M = 0$, à coté d'une sphère rigide (centrée au point $(0, 0, 0.3)$, rayon=0.1). Extérieur ; $\rho = 1.2$, $c = 340$ et $M = 0$. Monopole centré au point $(0, 0, -0.3)$	0.00242682
Boule maillée par les tétraèdres, centrée à l'origine, le rayon=0.1, $\rho = 1.2$, $c = 340$, et $M = 0$, contre une sphère rigide (centrée au point $(0, 0, 0.15)$, rayon= 0.1). Extérieur ; $\rho = 1.2$, $c = 340$ et $M = 0$. Monopole centré au point $(0, 0, -0.3)$	0.00252782
Sphère rigide de rayon $R = 1m$ (1338 dl), fréquence $F = 340Hz$, illuminé par une onde sphérique placée au point $(0, 0, 0)$	0.02115002
Sphère de rayon $R = 1m$ avec une partie traitée et avec un plan de symétrie $z = 0$ (2034 dl), fréquence $F = 340Hz$, illuminé par une onde sphérique placée au point $(0, 0, 0)$	0.01192550

3.3 Résultats

3.3.1 Comparaison FMM avec FMM pour Anten

Dans l'algorithme FMM que j'ai construit pour le calcul du champ lointain, j'ai gardé la même structure de la FMM en modifiant le contenu de certaines étapes. Le tableau suivant résume la différence entre la FMM classique et la FMM pour le calcul du champ lointain.

FMM classique	FMM pour ANTEN
Initialisation	Inchangée
Montée	Inchangée
Transfert	Seulement au niveau 2, on sauvegarde la fonction de radiation
Descente	On fait rien
Intégration	On fait l'interpolation linéaire
Interactions proches	On fait rien

3.3.2 Comparaison Anten avec et sans FMM

On a utilisé notre algorithme Anten avec et sans FMM sur le cas réel suivant : On considère un Airbus A320 avec 3.8 millions d'inconnus illuminé par 7 monopoles acoustiques, et on calcule le champ lointain dans les directions $\varphi = 90^\circ$ et θ varie de 0° à 180° avec un pas de 1°

	Temps de calcul	nombre de directions
Sans FMM	473secondes	181
Avec FMM	4637secondes	$6737 * 13476$

On remarque que pour un petit nombre de directions, le mieux c'est d'utiliser l'algorithme sans la FMM. Mais comme le temps de calcul est proportionnel par rapport au nombre d'inconnus, nombre de second membre et nombre de directions, alors, pour ce cas, il est plus intéressant d'utiliser l'algorithme avec FMM, à partir d'environ 1780 directions, car le temps de calcul présenté dans ce tableau pour l'algorithme avec FMM est le temps de calcul dans toutes les directions de notre discrétisation de la sphère unité ($6737 * 13476$) environ 90 millions directions.

En ce qui concerne le résultat, on obtient le même avec les deux méthodes, et ça est illustré à la figure 3.11

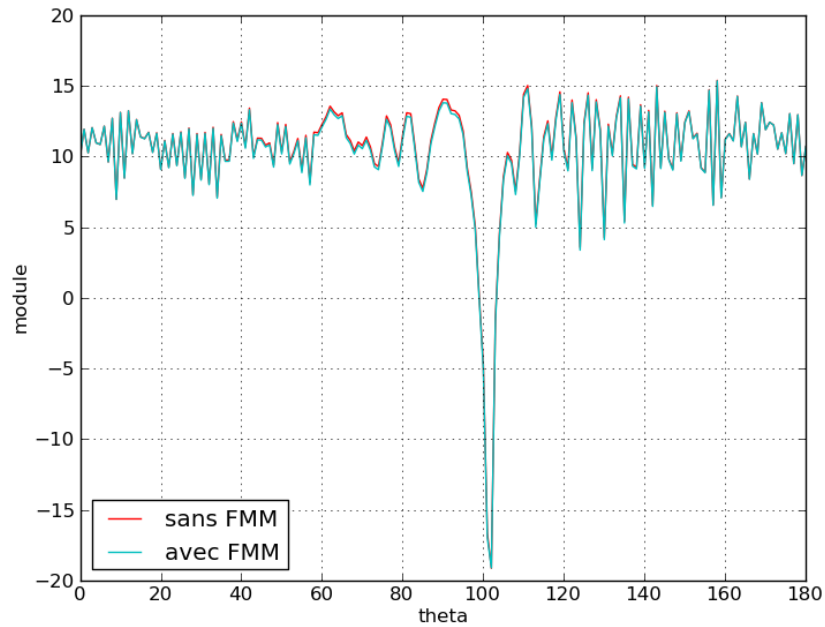


FIGURE 3.11 – *résultat avec et sans FMM pour A320*

4 Visualisation

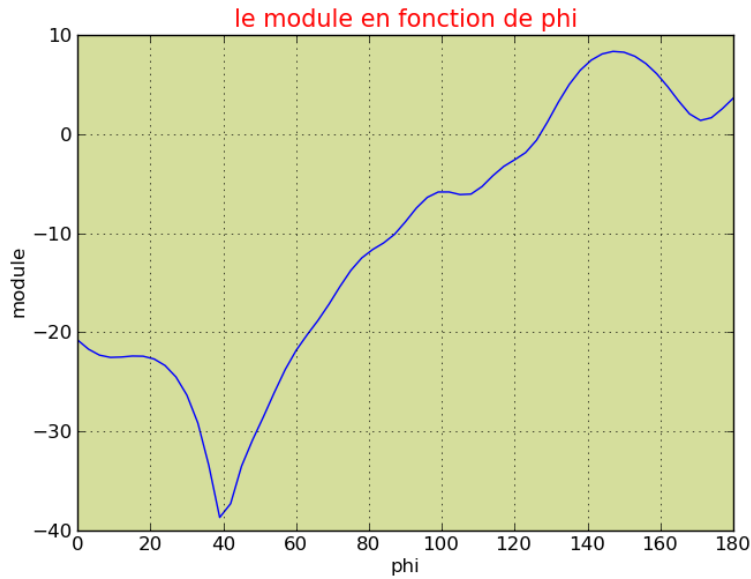
Introduction

Dans ce chapitre on va présenter quelques graphes obtenus à partir de la fonction de radiation et d'autres obtenus à partir du résultat de la méthode classique. J'ai écrit des script python pour représenter la fonction de radiation et le résultat sous différentes formes. Je ne trace que le module de la fonction de radiation en fonction de la grille (θ, φ) . Les figures 3d sont obtenues en utilisant Paraview et les figures 2d en utilisant la librairie "matplotlib" de python. Pour commencer, on va tracer le résultat obtenu avec la méthode classique et qui se trouve dans le fichier `r_18`

4.1 Représentation du résultat en 2D

On va tracer le résultat obtenu avec la méthode classique en 2D. On s'intéresse au cas étudié à la section 2.3.2 et on trace le module en fonction de φ qui varie de 0° à 180° avec un pas de 3° 4.1.

Le script qui fait ça est `PlotR18En2D.py` et prend deux arguments : le fichier `.p18` du quel on récupère la forme du résultat (sous la forme complexe ou module et phase) et le fichier `_r18` qui contient le résultat.

FIGURE 4.1 – *résultat en 2D avec la méthode classique*

4.2 Représentation du résultat en polaire

On va tracer le résultat obtenu avec la méthode classique en 2D. On s'intéresse au cas étudié à la section 2.3.2 et on trace le module en fonction de φ qui varie de 0° à 180° avec un pas de 3° (figure 4.2). Comme on est en coordonnées polaires, φ représente l'angle et le module représente le rayon.

Le script qui fait ça est `PlotR18En2D.py` et prend deux arguments : le fichier `.p18` du quel on récupère la forme du résultat (sous la forme complexe ou module et phase) et le fichier `_r18` qui contient le résultat.

Les courbes 4.1 et 4.2 vont servir pour la comparaison avec les courbes qu'on tracera à partir de la fonction de radiation.

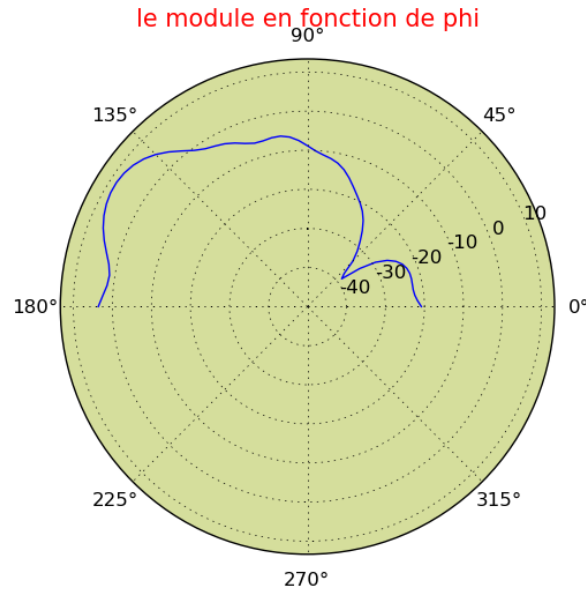


FIGURE 4.2 – résultat en coordonnées polaires

4.3 Visualisation 3D

Dans cette section, on va représenter le module de la fonction de radiation sous la forme d'une «patate», c'est à dire on trace en 3d le module de la fonction de radiation en fonction de la grille (θ, φ) issue de la discrétisation de la sphère unité.

Pour ça, on relit le fichier qui contient la fonction de radiation sous la forme complexe et on l'enregistre dans un vecteur V . Ensuite on calcule la quantité qu'on va tracer mod :

pour tout $i : 1 \rightarrow Nb$ avec Nb est le nombre de composantes de V

$$\begin{cases} mod(i) = 20\log_{10}(|V(i)|) & \text{si } |V(i)| > 10^{-10} \\ mod(i) = -200 & \text{si } |V(i)| \leq 10^{-10} \end{cases}$$

Enfin il ne fallait pas avoir de valeurs négatives, pour cela on calculait le minimum de mod et on rajoutait $-min + 5$ à toutes les composantes de mod .

Le script qui fait ça est "Visu3D.py".

La figure 4.3 représente la fonction de radiation du cas étudié à la section 2.3.2 et la figure 4.4 représente une coupe de la figure 4.3 sur le plan $z = 0$ ce qui correspond à $\theta = 90$. On remarque que cette courbe a le même profil que la courbe 4.2

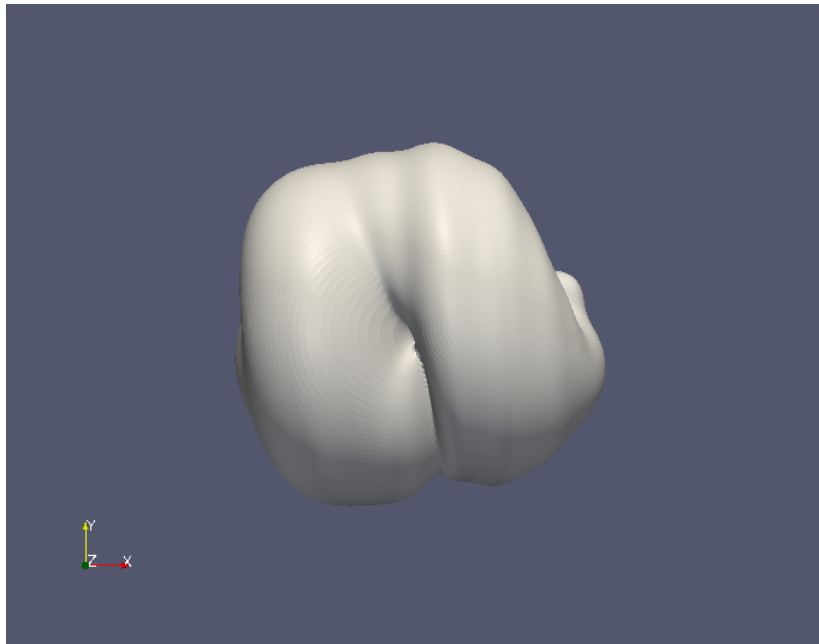
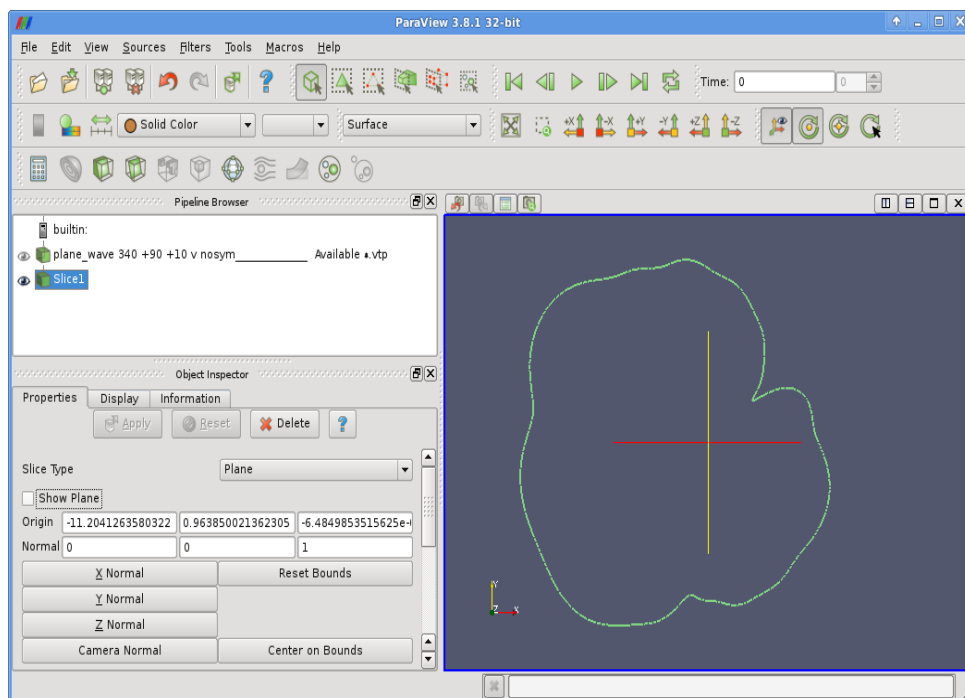


FIGURE 4.3 – la fonction de radiation représentée en 3D

FIGURE 4.4 – 2^{me} prise du résultat avec paraview

4.4 Visualisation sous la forme d'une sphère

Dans cette section, on va représenter le module de la fonction de radiation avec une échelle de couleurs sur la sphère unité, c'est à dire on trace en 3d le module de la fonction de radiation en fonction de la grille (θ, φ) issue de la discrétisation de la sphère unité.

Pour ça, on relit le fichier qui contient la fonction de radiation sous la forme complexe et on l'enregistre dans un vecteur V . Ensuite on calcule la quantité qu'on va tracer *mod* :

pour tout $i : 1 \rightarrow Nb$ avec Nb est le nombre de composantes de V

$$\begin{cases} mod(i) = 20\log_{10}(|V(i)|) & \text{si } |V(i)| > 10^{-10} \\ mod(i) = -200 & \text{si } |V(i)| \leq 10^{-10} \end{cases}$$

Le script qui fait ça est "VisuSphere.py" La figure 4.5 représente la fonction de radiation du cas étudié à la section 2.3.2(c'est le même cas qu'on a présenté précédemment)

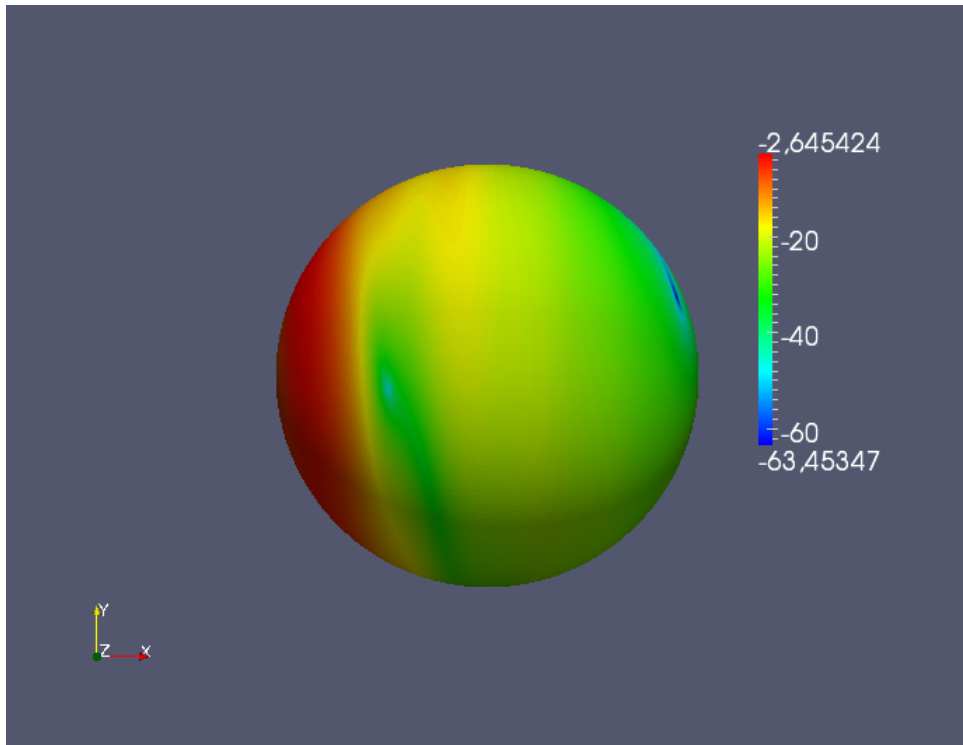


FIGURE 4.5 – la fonction de radiation représentée sur la sphère unité

4.5 Visualisation en 2d avec Matplotlib

Dans cette section on représente la grille (θ, φ) en 2d et non sur une sphère. On calcule le module et on le représente, comme pour le cas de la sphère, avec une échelle de couleurs en utilisant “matplotlib” qui est une laibririe de Python.

La figure 4.6 correspond au cas illustré à la section 2.3.2.

Cette figure est obtenue avec le script python “plotFctRAD.py” qui prend en entrée un fichier “_Theta_Phi.bin” qui contient la grille (θ, φ) , un fichier “_RAD.bin” qui contient la fonction de radiation et un fichier “.r01.h” qui contient la description des seconds membres.

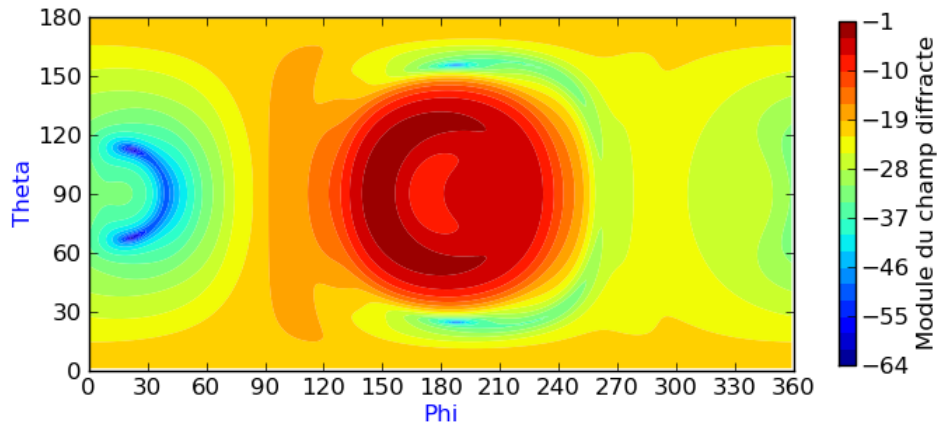


FIGURE 4.6 – la fonction de radiation représentée sur la grille (θ, ϕ)

4.6 Visualisation en 2d avec Paraview

On va représenter ici le module de la fonction de radiation de la même façon que la section précédente mais en utilisant “Paraview” au lieu de “matplotlib”. L’avantage d’utiliser Paraview est de pouvoir faire des coupes pour tracer des courbes en dimension 2.

La figure 4.7 représente le module de la fonction de radiation du cas étudié précédemment. La courbe à gauche représente module avec une echelle de couleurs. Cette courbe correspond à la courbe tracée à la section précédente avec une difference dans l’échelle de couleurs. La courbe à droite représente une coupe en dimension 2 de la courbe de gauche. Cette coupe est réalisée pour $\theta = 90^\circ$ et φ varie de 0 à 180°.

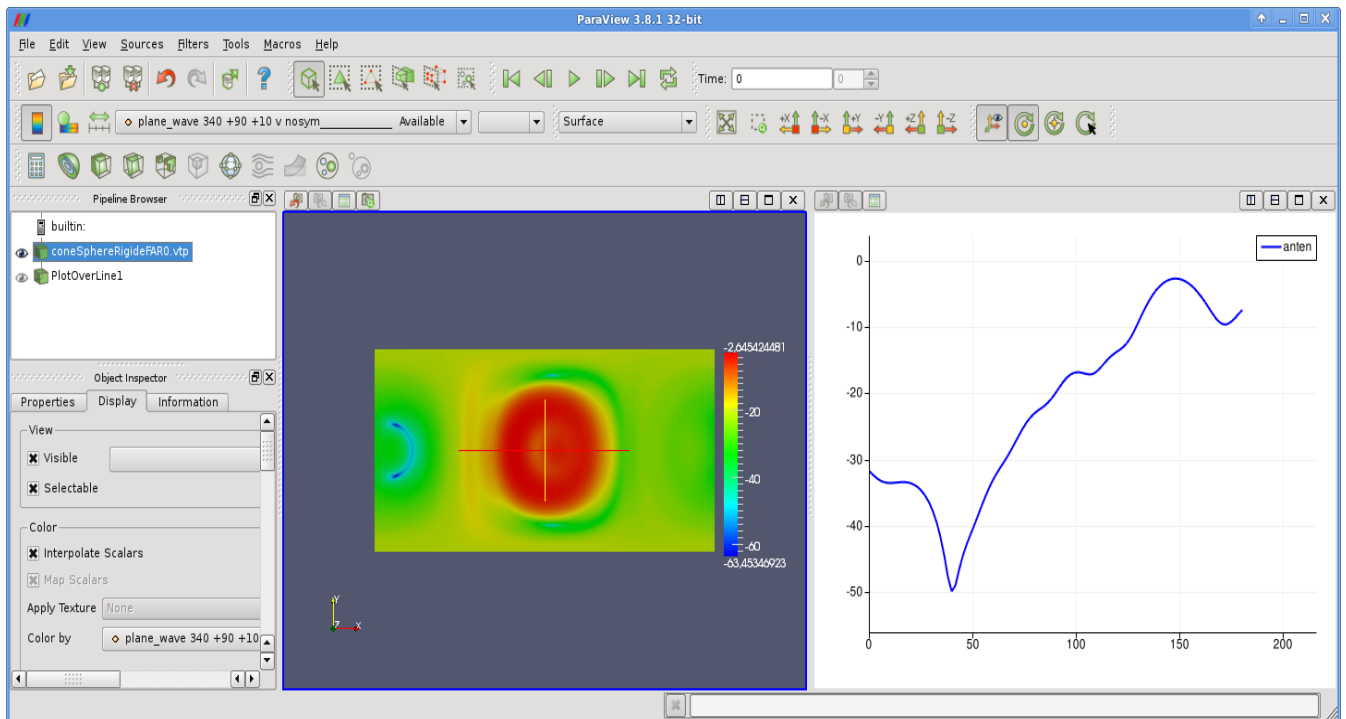


FIGURE 4.7 – la fonction de radiation représentée sur la grille (θ, ϕ) avec Paraview

On remarque qu'il y a une différence d'environ $11dB$ entre la courbe de droite de la figure 4.7 et la courbe 4.1. Cette différence vient du fait que la courbe 4.1 est tracé à partir du résultat enregistré dans le fichier `_r18`, et que chez EADS, dans la cas d'une onde plane, on rajoute $10\log_{10}(4\pi)$ au module avant de l'enregistrer.

Conclusion

Durant ce stage, on a implémenté et ajouté le code Anten à ACTIPOLE, qui est un code qui calcule le champ lointain diffracté en acoustique. Ensuite on a implémenté la méthode multipôle rapide pour le calcul de champs lointains en électromagnétisme et en acoustique.

Les résultats étaient satisfaisant en terme de précision, de plus la méthode multipôle rapide est très efficace pour traiter les problèmes de grande taille et pour calculer le champ lointain dans un nombre considérable de directions. Par contre quand on calcule le champ lointain avec la FMM, on consomme beaucoup en terme de mémoire, c'est pourquoi il est préférable d'utiliser la FMM sur un seul processus. Et malgré ça on gagne beaucoup en terme de temps en utilisant la FMM pour les problèmes de très grande taille en terme d'inconnus et de nombre de directions.

A Théorème de représentation intégrale

A.1 Théorème de représentation

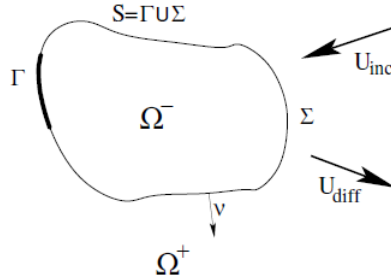


FIGURE A.1

Théorème 1. Soit u une fonction régulière jusqu'au bord Γ . On note u^- et u^+ ses restrictions sur Ω^- et Ω^+ respectivement. On définit ϕ et p comme les sauts des traces tangentielles de u et de $\frac{\partial u}{\partial \nu}$. Donc on a :

$$\begin{cases} \phi = u^- - u^+ & \text{sur } \Gamma \\ p = \frac{\partial u^-}{\partial \nu} - \frac{\partial u^+}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Si

$$-(\Delta u^- + k^2 u^-) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega^-)$$

Et

$$-(\Delta u^+ + k^2 u^+) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega^+)$$

Et u^+ satisfait la condition suivante :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r \left(\frac{\partial u^+}{\partial r} - iku^+ \right) = 0$$

Ce document est la propriété d'EADS FRANCE ; il ne peut être communiqué à des tiers et/ou reproduit sans l'autorisation préalable écrite d'EADS FRANCE et son contenu ne peut être divulgué.

© - EADS FRANCE - 2011

alors u est la somme d'un potentiel de simple couche et d'un potentiel de double couche :

$$u = \mathcal{S}p - \mathcal{D}\phi \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

Plus précisément, on a les formules de représentation intégrale suivantes :

$$u(x) = \mathcal{S}p(x) - \mathcal{D}\phi(x) \quad \text{pour } x \in \Omega^- \cup \Omega^+$$

Et

$$\frac{1}{2}(u^-(x) + u^+(x)) = \mathcal{S}p(x) - \mathcal{D}\phi(x)$$

D'autre part on a

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^-}{\partial n}(x) + \frac{\partial u^+}{\partial n}(x)\right) = D^*p(x) - N\phi(x)$$

Avec les définitions suivantes (tirées de [3]) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{S}p(x) = \int_{\Gamma} G(x, y)p(y)dy & \text{pour } x \in \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{D}\phi(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y)\phi(y)dy & \text{pour } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma \\ \mathcal{S}p(x) = \int_{\Gamma} G(x, y)p(y)dy & \text{pour } x \in \Gamma \\ \mathcal{D}\phi(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y)\phi(y)dy & \text{pour } x \in \Gamma \\ D^*\phi(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x, y)\phi(y)dy & \text{pour } x \in \Gamma \\ N\phi(x) = -\text{rot}_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(x, y)\text{rot}_{\Gamma}\phi(y)dy \\ \quad + k^2 \int_{\Gamma} G(x, y)\phi(y) \cdot \vec{\nu}(x)dy & \text{pour } x \in \Gamma \end{array} \right.$$

Bibliographie

- [1] Guillaume SYLVAND : *La méthode multipôle rapide en électromagnétisme : performances, parallélisation, applications*, thèse de doctorat de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, 2002
- [2] Jean Claude NEDELEC : *Ondes acoustiques et électromagnétiques - Équations intégrales*, cours de DEA de l'école polytechnique et de l'université Paris 6, 1996
- [3] Isabelle TERRASSE & Toufik ABBOUD : *Modélisation des phénomènes de propagation d'ondes*, École Polytechnique, Département de Mathématiques appliquées, 2007.