

Modèles à changement de régimes markoviens

Identification de la crise financière

Sommaire

I.	Introduction de la partie	3
II.	Les séries économiques et leurs cycles	3
1.	Bref historique des crises	3
a.	Quelques grandes crises historiques.....	3
b.	Les crises contemporaines	5
2.	Les cycles économiques et les points de retournement	5
III.	Le modèle à changement de régime markovien	6
1.	Présentation	6
2.	Cas simple.....	7
a.	Stationnarité.....	7
b.	Moment, Skewness, Kurtosis, Durée dans un régime.....	8
c.	Probabilité filtrée.....	9
d.	Probabilité lissée	9
e.	Estimation par maximum de vraisemblance	10
f.	L'algorithme EM (Expectation Maximisation)	11
3.	Cas général	12
4.	Le modèle multi-varié.....	12
IV.	Application aux séries du Cisma	13
1.	Présentation du Cisma : l'entreprise et ses activités	13
2.	Les trois séries de base.....	13
3.	Calcul d'un indicateur synthétique : la composite	15
4.	Modèle à changement de régime uni-varié pour identifier les mouvements récessifs : application	17
5.	Application du modèle à changement de régime multi-varié et comparaison avec l'indicateur composite	19
V.	Conclusion de la partie	23

I. Introduction de la partie

Les crises financières ont sévi lourdement sur l'économie et ses différentes composantes. Dès lors la mise en place de méthodes pour signaler (ou même prévoir) les entrées en récession se sont avérées nécessaires afin d'effectuer des choix raisonnés en vue de limiter les dégâts. Ces méthodes se basent pour l'heure sur l'étude de séries chronologiques qui reflètent l'état dans lequel se trouve chaque entité ou l'économie toute entière.

C'est dans ce contexte que James Douglas Hamilton, scientifique américain, a réalisé différents travaux portant essentiellement sur l'étude des séries chronologiques. Ses deux principales publications : *Time Series Analysis* (1994) et *Advances in Markov-Switching Models* (2002), traitent de long en large les séries chronologiques en utilisant des méthodes statistiques, le tout se basant sur les Markov-Switching Models (Modèles à Changement de régime Markovien). Remarquons que ces modèles ne sont que des spécificités des Hidden Markov Models (Modèles de Markov Cachés).

Partant de ces études, différentes applications ont été développées sur des logiciels économiques et statistiques. Nous avons choisi d'utiliser l'application créée sous Rats que nous comparons de temps en temps aux résultats donnés sous GiveWin.

II. Les séries économiques et leurs cycles

1. Bref historique des crises

Rappelons des exemples de crises financières sans pour autant faire une liste exhaustive des crises qui ont ébranlé les pays du monde entier.

a. Quelques grandes crises historiques

➤ La fin brutale de la tulipomania en 1637

A la fin du XVI^e siècle, la Hollande découvre les tulipes. Leur rareté et leur nouveauté poussent les prix à la hausse. Dans les années 1630, elles deviennent des objets de spéculation. Un bulbe pouvait changer de main plusieurs fois à des prix en forte hausse, alors qu'il était encore sous terre et que personne ne l'avait vu. Cette euphorie touche toute les couches de la population et dure jusqu'en 1637. Puis certains commencent à vendre les tulipes (ou les bulbes) qu'ils avaient acquis, et sont imités par d'autres qui prennent peur en voyant les premiers se débarrasser de leurs bulbes. La frénésie à l'achat se mue en panique à la vente. Ceux qui avaient acheté, mettaient souvent leurs

biens en gage pour obtenir un crédit, dans l'espoir de récolter plus. Ils furent soudain dépouillés de tout ou en faillite. L'effondrement du prix des tulipes et l'appauvrissement qui en résulta provoquèrent une très sérieuse récession.

➤ L'éclatement de la bulle de la Compagnie des mers du Sud en 1720

Créée à Londres en 1711, la compagnie des mers du sud se voit accordée le seul et unique commerce et trafic en direction et en provenance des Royaumes, Terres etc. de l'Amérique, de la rive est du fleuve Aracona et jusqu'à l'extrême sud de la Terre de Feu. En échange, elle accepte de prendre à sa charge la dette de l'Etat en lui donnant des actions qu'elle émet. Cela faisait l'affaire de l'Etat car cela éteint en partie sa dette en séduisant les détenteurs de la dette publique qui acquièrent ainsi des actions d'une compagnie dont ils pensent qu'elle présente un fort potentiel de développement. Non seulement le volume des actions accroît mais le cours monte en flèche : 128 livres en janvier 1720 et 1000 livres pendant le mois d'août. D'autres sociétés tentent alors de se former sur le même modèle. Pour calmer le jeu, et pour protéger la compagnie des mers du sud, une législation restreint alors considérablement les possibilités de créer des sociétés à capital publique. Cependant, la compagnie voit le cours de ses actions plonger en septembre : 150 livres. De nombreux investisseurs se retrouvent ruinés, parmi lesquels Isaac Newton.

➤ Le jeudi noir et la crise de 1929

Entre 1921 et 1929, l'indice du cours des actions a été multiplié par quatre. Pendant toute cette époque, le crédit est facile et alimente la spéculation. En 1929, les autorités monétaires s'inquiètent de la hausse boursière et souhaite rendre le crédit moins bon marché en montant ses taux d'intérêt. Cependant une riposte est organisée par certaines banques, dont la National City Bank qui affirme qu'elle prêterait autant d'argent que nécessaire pour contrer l'action des autorités. L'euphorie connaît un terme en octobre 1929. Le mercredi 23, la situation chancelle. Le jeudi 24 (« jeudi noir »), elle tourne à la déroute. Le volume des actions mises en vente explose. Les banquiers se réunissent au siège de la banque Morgan pour essayer de stabiliser le marché. Ils rachètent en masse des actions. Effectivement la situation se calme le vendredi 25, mais le lundi 28, les volumes de vente augmentent encore. L'indice boursier chute de 12.9%, baisse qui va se poursuivre pendant trois ans.

➤ Liste non exhaustive des crises ayant marqué le capitalisme

- 1937 : La tulipomania
- 1720 : Crise de la Compagnie des mers du Sud (Royaume-Uni) et du système de John Law (France)
- 1797 : Panique bancaire au Royaume-Uni
- 1810 : Crise bancaire au Royaume-Uni
- 1819 : Crise bancaire aux Etats-Unis
- 1825 : Crise boursière au Royaume-Uni
- 1836 : Krach boursier au Royaume-Uni, puis difficultés bancaires aux Etats-Unis
- 1847 : Effondrement boursier (France, Royaume-Uni) après un engouement pour les chemins de fer

- 1873 : Krach boursier à Vienne après une spéculation liée à l'explosion universelle. Début de la grande dépression de la fin du 19^e siècle
- 1907 : Panique des banques aux Etats-Unis

b. Les crises contemporaines

- Le krach d'octobre 1987
- La crise japonaise du tournant des années 1980 et 1990
- La crise asiatique de 1997 et 1998
- La crise russe de 1998
- Le krach lent de la nouvelle économie
- La crise des subprimes de 2007 et 2008

Le terme subprime représente la note, « la cote », attribuée à des emprunteurs qui présentent un risque élevé de ne pas pouvoir rembourser leur crédit immobilier, tout simplement parce que leurs revenus sont faibles (l'emprunteur fiable étant dits « prime »).

Il est difficile de dater la crise avec exactitude. Les premiers signes datent de début 2007, lorsque le taux de défaut, c'est-à-dire la proportion des ménages qui ne peuvent plus faire face à leurs engagements, augmente sensiblement. En raison du nombre croissant d'impayés, de nombreuses maisons sont à vendre. Les prix baissent. En juin et juillet, les agences de notation déclassent de nombreux titres adossés à l'immobilier qui circulent sur les marchés. La banque allemande IKB menace de faire faillite. Le 6 août, American Home Mortgage, spécialisée dans le crédit immobilier, entame une procédure de faillite. Le 9 août, BNP-Paribas suspend la cotation de trois de ses fonds d'investissements. Un vent d'inquiétude traverse les principales places financières. La Banque Centrale Européenne injecte ce jour-là 95 milliards d'euros dans le marché interbancaire. D'autres banques centrales font de même. C'est le début « officiel » de la crise.

2. Les cycles économiques et les points de retournement

Un cycle économique est une période hypothétique de durée déterminée qui correspond plus ou moins au retour d'un même phénomène économique. La variété des cycles est assez grande, et on distingue plusieurs types de cycles suivant l'objectif que l'on se donne et le type de séries étudiées.

Le cycle d'activité se réfère à la croissance de la série brute. Son **pic** est le moment où la série commence à décroître (maximum locale). Son **creux** est le moment où elle recommence à croître (minimum local). On pourrait parfaitement concevoir des économies en plein essor dont la croissance ne ferait que ralentir, sans pour autant passer au-dessous de la barre de stagnation.

Le cycle de croissance prend en compte la tendance de la série étudiée et traite l'écart à la tendance. Ainsi le pic du cycle de croissance est le moment où la série est le plus haut par rapport à

sa tendance. Le creux du cycle de croissance est le moment où elle est au plus bas toujours par rapport à sa tendance.

Tenant compte des récurrences, nous pouvons citer quatre types de cycles fréquemment évoqués dans les théories économiques :

- Le cycle Kondratieff qui dure entre 40 et 60 ans
- Le cycle Kuznets qui dure entre 15 et 25 ans
- Le cycle Juglar : entre 8 et 10 ans
- Le cycle Kitchin : entre 3 et 4 ans

Les points de retournement. On peut dire d'après ce qui précède qu'un point de retournement n'est pas une variable observable et objective. Elle dépend du cycle qu'on considère, et de la manière dont on l'évalue.

III. Le modèle à changement de régime markovien

1. Présentation

Les processus à changement de régime markovien sont très utilisés en macroéconomie. Introduits par Hamilton en 1988, les processus à changement de régime markovien enrichissent l'analyse ARMA classique. Ils permettent à la série de suivre différents sous-modèles. Voici un exemple assez général de processus :

Soit $S_t \in \llbracket 1, M \rrbracket$ le processus d'état inobservé (autrement dit, le régime à l'instant t) ; la loi du processus observé $(Y_t)_t$ observé est déterminé par :

$$Y_t = \mu_{S_t} + \sum_{j=1}^p \Gamma_{j,S_t} Y_{t-j} + \Sigma_{S_t}^{1/2} \cdot \varepsilon_t \quad (\mathbf{1.1})$$

Où ε_t est un bruit blanc, communément supposé gaussien (quoique d'autres modélisations soient envisagées, loi de Student par exemple).

On suppose le processus d'état S_t markovien, dans la mesure où les états intéressants sont fréquemment liés et persistants. Soit donc S_t une chaîne de markov homogène, irréductible, apériodique et indépendante du processus $(\varepsilon_t)_t$:

$$\forall i, j, \mathbb{P}(S_t = j | S_{t-1} = i, S_{t-2}, (\varepsilon_t)_t) = \mathbb{P}(S_t = j | S_{t-1} = i) = p_{ij}$$

Où la matrice $M \times M$ de transition $P = (p_{ij})_{ij}$ est stochastique :

$$\forall i, j, p_{ij} \in [0,1] \text{ et } \forall i, \sum_j p_{ij} = 1, P \mathbb{I}_M = \mathbb{I}_M$$

On peut calculer par récurrence :

$$\mathbb{P}(S_{1 \rightarrow t}, Y_{1 \rightarrow t}) = \mathbb{P}(Y_t | Y_{1 \rightarrow t-1}, S_{1 \rightarrow t}) \cdot \mathbb{P}(S_t | S_{1 \rightarrow t-1}, Y_{1 \rightarrow t-1}) \cdot \mathbb{P}(S_{1 \rightarrow t-1}, Y_{1 \rightarrow t-1})$$

$$\mathbb{P}(S_{1 \rightarrow t}, Y_{1 \rightarrow t}) = \mathbb{P}(Y_t | Y_{t-p \rightarrow t-1}, S_{1 \rightarrow t}) \cdot \mathbb{P}(S_t | S_{t-1}) \cdot \mathbb{P}(S_{1 \rightarrow t-1}, Y_{1 \rightarrow t-1})$$

Nous reviendrons sur ce cas général plus tard, pour l'instant, traitons un cas simple.

2. Cas simple

Nous nous intéressons ici au modèle :

$$Y_t = \mu_{S_t} + \sigma_{S_t} \varepsilon_t \quad (1.2)$$

Autrement dit, $Y_t | S_t$ suit une loi normale de moyenne μ_{S_t} et d'écart-type σ_{S_t} :

$$Y_t | S_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_{S_t}, \sigma_{S_t}^2)$$

En dépit de sa simplicité, ce modèle présente des propriétés stochastiques riches. A titre d'exemple, suivant les valeurs des paramètres, la kurtosis peut être élevé ou faible : cette caractéristique a motivé l'application de cette modélisation aux données financières.

Ce modèle admet plusieurs sous-modèles :

- Moyennes identiques : $\mu_m \equiv \mu$, auquel cas seuls les écarts-types diffèrent, dits hétéroscédastiques. L'ensemble des écarts-types est fini et de taille faible.
- Variances identiques : $\sigma_m^2 \equiv \sigma^2$, auquel cas les régimes diffèrent uniquement par leurs moyennes. Ce modèle n'a pas été appliqué durant ce stage.
- Moyennes et variances identiques : $\mu_m \equiv \mu$ et $\sigma_m^2 \equiv \sigma^2$, auquel cas le processus est un bruit blanc. Les modèles dont les moyennes et les variances sont identiques sont dits homoscédastiques.

a. Stationnarité

Définition 1 : Stationnarité au sens faible.

Un processus X_t est dit stationnaire, au sens faible, si :

- $\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}(X_t) = m$ (indépendant de t)
- $\forall t, h \in \mathbb{Z}, \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \mathbb{E}(X_t - m)(X_{t+h} - m)' = \Gamma(h)$ (indépendant de t)

Cette définition implique en particulier que la matrice de variance-covariance ne dépend pas de t .

Définition 2 : Stationnarité au sens strict.

Si $\forall (x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n})$ la suite x_{t_1}, \dots, x_{t_n} a la même loi de probabilité que la suite $x_{t_1+h}, \dots, x_{t_n+h}$. On peut aussi dire que la fonction de répartition est la même.

$$\mathbb{P}(x_{t_1} < x_1, \dots, x_{t_n} < x_n) = \mathbb{P}(x_{t_1+h} < x_1, \dots, x_{t_n+h} < x_n)$$

On peut aussi dire que tous les moments sont invariants avec le temps.

Le processus admettant la représentation **(1.2)** est stationnaire au sens faible. En effet :

- La moyenne ne dépend pas du temps : $\forall t, \mathbb{E}(Y_t) = \sum_s \mathbb{E}(Y_t | S_t = s) = \sum_s \mu_s \pi_s$. Avec $\pi_s = \mathbb{P}(S_t = s)$ (probabilité inconditionnelle).
- La covariance entre Y_s et Y_t dépend uniquement de $t - s$. Soit $s < t$, et $Z_t = Y_t - \mathbb{E}Y_t$ de moyenne ν . Alors :

$$\text{Cov}(Y_s, Y_t) = \mathbb{E}(Z_s Z_t) = \sum_{i,j} \mathbb{P}(S_s = i, S_t = j) \mathbb{E}(Z_s Z_t | S_s = i, S_t = j)$$

$$\text{Cov}(Y_s, Y_t) = \sum_{i,j} (P^{t-s})_{ij} \pi_i \nu_i \nu_j$$

En particulier, si $\mu_s \equiv \mu$, alors $\nu = 0$ et le processus n'est pas corrélé.

b. Moment, Skewness, Kurtosis, Durée dans un régime

- Moments

On calcule les moments d'ordre k avec la formule suivante : $m_k = \mathbb{E}[(Y_t - \mathbb{E}Y_t)^k]$. Ainsi :

$$m_2 = \mathbb{V}(Y_t)$$

$$m_3 = \mathbb{E}[(Y_t - \mathbb{E}Y_t)^3]$$

$$m_4 = \mathbb{E}[(Y_t - \mathbb{E}Y_t)^4]$$

- Skewness et kurtosis

$$s = \frac{m_3}{m_2^{3/2}}, \quad k = \frac{m_4}{m_2^2}$$

$s = 0$ si Y_t suit une loi normal.

$k \leq 3$ si Y_t suit une loi normal.

- Durée dans un régime

La durée moyenne D de séjour dans le régime m s'écrit :

$$D = \frac{1}{1 - p_{mm}}$$

c. Probabilité filtrée

Les probabilités filtrées fournissent un diagnostic en temps réel. Ce diagnostic en temps réel repose sur les données utilisées : si celles-ci révisent, alors le diagnostic est conditionnel à l'état des données. Les données de comptabilité nationale, par exemple, connaissent des révisions d'amplitude variable suivant les pays et les variables examinées. En tout état de cause, il convient d'être prudent sur l'analyse des points les plus récents.

La probabilité filtrée $S_{t|t} = \mathbb{P}(S_t|Y_{1 \rightarrow t})$ peut se calculer de manière récursive. L'algorithme est le suivant :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_t|Y_{1 \rightarrow t}) &= \frac{\mathbb{P}(S_t, Y_{1 \rightarrow t})}{\mathbb{P}(Y_{1 \rightarrow t})} \\ \mathbb{P}(S_t|Y_{1 \rightarrow t}) &= \frac{\mathbb{P}(S_t, Y_{1 \rightarrow t}) \cdot \mathbb{P}(S_t, Y_{1 \rightarrow t-1})}{\mathbb{P}(Y_{1 \rightarrow t})} \\ \mathbb{P}(S_t|Y_{1 \rightarrow t}) &= \frac{\mathbb{P}(Y_t|S_t)}{\mathbb{P}(Y_{1 \rightarrow t})} \cdot \mathbb{P}(S_t, Y_{1 \rightarrow t-1}) \\ \mathbb{P}(S_t|Y_{1 \rightarrow t}) &= \mathbb{P}(Y_t|S_t) \frac{\mathbb{P}(Y_{1 \rightarrow t-1})}{\mathbb{P}(Y_{1 \rightarrow t})} \cdot \mathbb{P}(S_t, Y_{1 \rightarrow t-1})\end{aligned}$$

d. Probabilité lissée

Cette approche oblige la personne qui produit l'indicateur à réviser à chaque période les probabilités qu'il avait données auparavant. Néanmoins, cette approche paraît plus pertinente en ce sens que l'estimation des paramètres peut modifier considérablement le modèle.

La probabilité lissée $S_{t|T} = \mathbb{P}(S_t|Y_{1 \rightarrow T})$ est calculée de manière récursive. L'algorithme de calcul proposé par Kim en 1994 repose sur :

- Les probabilités lissées jointes consécutives $\mathbb{P}(S_t, S_{t+1}|Y_{1 \rightarrow T})$
- Les probabilités filtrées précédemment calculées.

$$\mathbb{P}(S_t, S_{t+1} | Y_{1 \rightarrow T}) = \mathbb{P}(S_t | S_{t+1}, Y_{1 \rightarrow T}) \cdot \mathbb{P}(S_{t+1} | Y_{1 \rightarrow T}) = \mathbb{P}(S_t | S_{t+1}, Y_{1 \rightarrow T}) \cdot S_{t+1|T}$$

Or on a :

$$\mathbb{P}(S_t | S_{t+1}, Y_{1 \rightarrow T}) = \mathbb{P}(S_t | S_{t+1}, Y_{1 \rightarrow t}, Y_{t+1 \rightarrow T})$$

$$\mathbb{P}(S_t | S_{t+1}, Y_{1 \rightarrow T}) = \frac{\mathbb{P}(S_t, S_{t+1}, Y_{1 \rightarrow t}, Y_{t+1 \rightarrow T})}{\mathbb{P}(S_{t+1}, Y_{1 \rightarrow t}, Y_{t+1 \rightarrow T})}$$

$$\mathbb{P}(S_t | S_{t+1}, Y_{1 \rightarrow T}) = \frac{\mathbb{P}(Y_{t+1 \rightarrow T} | S_t, S_{t+1}, Y_{1 \rightarrow t})}{\mathbb{P}(Y_{t+1 \rightarrow T} | S_{t+1}, Y_{1 \rightarrow t})} \cdot \frac{\mathbb{P}(S_t, S_{t+1}, Y_{1 \rightarrow t})}{\mathbb{P}(S_{t+1}, Y_{1 \rightarrow t})}$$

$$\mathbb{P}(S_t | S_{t+1}, Y_{1 \rightarrow T}) = \frac{\mathbb{P}(Y_{t+1 \rightarrow T} | S_t, S_{t+1}, Y_{1 \rightarrow t})}{\mathbb{P}(Y_{t+1 \rightarrow T} | S_{t+1}, Y_{1 \rightarrow t})} \cdot \mathbb{P}(S_t | S_{t+1}, Y_{1 \rightarrow t})$$

Le premier terme de ce produit vaut 1, car conditionnement à S_{t+1} , S_t et $Y_{1 \rightarrow t}$ n'apportent aucune information sur $Y_{t+1 \rightarrow T}$, de sorte que numérateur et dénominateurs sont égaux à $\mathbb{P}(Y_{t+1 \rightarrow T} | S_{t+1})$. Nous avons donc montré que : $\mathbb{P}(S_t | S_{t+1}, Y_{1 \rightarrow T}) = \mathbb{P}(S_t | S_{t+1}, Y_{1 \rightarrow t})$. Il faut alors distinguer deux cas de figure :

- L'évènement $\{S_{t+1} = m, Y_{1 \rightarrow t}\}$ est de probabilité nulle, auquel cas $\mathbb{P}(S_t, S_{t+1} = m | Y_{1 \rightarrow T}) = 0$
- L'évènement $\{S_{t+1} = m, Y_{1 \rightarrow t}\}$ n'est pas de probabilité nulle.

Dans ce dernier cas on peut développer :

$$\mathbb{P}(S_t | S_{t+1}, Y_{1 \rightarrow t}) = \frac{\mathbb{P}(S_t, S_{t+1}, Y_{1 \rightarrow t})}{\mathbb{P}(S_{t+1}, Y_{1 \rightarrow t})} = \frac{\mathbb{P}(S_{t+1} | S_t, Y_{1 \rightarrow t}) \cdot \mathbb{P}(S_t, Y_{1 \rightarrow t})}{\mathbb{P}(S_{t+1}, Y_{1 \rightarrow t})}$$

Or : $\mathbb{P}(S_{t+1} | S_t, Y_{1 \rightarrow t}) = \mathbb{P}(S_{t+1} | S_t)$, donc :

$$\mathbb{P}(S_t | S_{t+1}, Y_{1 \rightarrow t}) = \frac{\mathbb{P}(S_{t+1} | S_t) \cdot \mathbb{P}(S_t | Y_{1 \rightarrow t})}{\mathbb{P}(S_{t+1} | Y_{1 \rightarrow t})} = \frac{P_{S_{t+1} S_t | t}}{S_{t+1|t}}$$

Où $S_{t+1|t} = P' S_{t|t}$. On en déduit les lois lissées jointes :

$$\mathbb{P}(S_t, S_{t+1} | Y_{1 \rightarrow T}) = \frac{\mathbb{P}(S_{t+1} | S_t) \cdot \mathbb{P}(S_t | Y_{1 \rightarrow t})}{\mathbb{P}(S_{t+1} | Y_{1 \rightarrow t})} \cdot \mathbb{P}(S_{t+1} | Y_{1 \rightarrow T}) = \frac{P_{S_{t+1} S_t | t}}{S_{t+1|t}} \cdot S_{t+1|T}$$

e. Estimation par maximum de vraisemblance

Pour calculer les paramètres du modèle, nous recherchons la vraisemblance associée au paramètre $\theta = (\mu = (\mu_m)_{m \in \llbracket 1; M \rrbracket}, \sigma^2 = (\sigma_m^2)_{m \in \llbracket 1; M \rrbracket}, (p_{ij})_{i,j \in \llbracket 1; M \rrbracket^2})$.

Soit $f(\cdot; \mu; \sigma^2)$ la densité de $\mu + \sigma \varepsilon$; si ε est gaussien alors $f(\cdot; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma} \phi(\frac{\cdot - \mu}{\sigma})$, où ϕ est la densité d'une gaussienne centrée réduite. La vraisemblance s'écrit :

$$L_\theta(Y_{1 \rightarrow T}) = \sum_{S_1, \dots, S_T} \mathbb{P}(S_1 = s_1, \dots, S_T = s_T) \cdot \mathbb{P}(Y_{1 \rightarrow T} | S_1 = s_1, \dots, S_T = s_T)$$

$$\Rightarrow L_{\theta}(Y_{1 \rightarrow T}) = \sum_{s_1, \dots, s_T} \pi_{s_1} \prod_{t=2}^T p_{s_{t-1}s_t} \prod_{t=1}^T f(Y_t; \mu_{s_t}, \sigma_{s_t}^2)$$

Cette expression est quasiment impossible à calculer : elle comporte trop de termes. Typiquement, le nombre de termes croît en M^T . Toutefois, Ryden, Terassssvirta et Asbryk introduisent en 1998 une simplification, amorcée par :

$$L_{\theta}(Y_{1 \rightarrow T}) = \sum_{s_T} \mathbb{P}_{\theta}(Y_{1 \rightarrow T-1}, S_t = s_T) \cdot \mathbb{P}_{\theta}(Y_T | S_T = s_T, Y_{1 \rightarrow T-1})$$

Le dernier terme de cette somme est connu, c'est $f(Y_t; \mu_{s_t}, \sigma_{s_t}^2)$. Quant au premier il s'écrit :

$$\mathbb{P}(Y_{1 \rightarrow t-1}, S_t = s_t) = \sum_{s_{t-1}} \mathbb{P}(Y_{1 \rightarrow t-1}, S_t = s_t, S_{t-1} = s_{t-1})$$

$$\mathbb{P}(Y_{1 \rightarrow t-1}, S_t = s_t) = \sum_{s_{t-1}} \mathbb{P}(S_t = s_t | S_{t-1} = s_{t-1}, Y_{1 \rightarrow t-1}) \cdot \mathbb{P}(S_{t-1} = s_{t-1}, Y_{1 \rightarrow t-1})$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(Y_{1 \rightarrow t-1}, S_t = s_t) = \sum_{s_{t-1}} \mathbb{P}(S_t = s_t | S_{t-1} = s_{t-1}) \cdot \mathbb{P}(S_{t-1} = s_{t-1}, Y_{1 \rightarrow t-1})$$

(S_t est, conditionnellement à S_{t-1} , indépendant du passé de Y)

Par récurrence, une expression plus aisée à calculer de la log-vraisemblance apparaît. Soit $F(y; \mu, \sigma^2)$ la matrice diagonale des termes $f(y; \mu_m, \sigma_m^2)$.

$$L_{\theta}(Y_{1 \rightarrow T}) = \pi' P(Y_1; \mu, \sigma^2) \prod_{t=2}^T \{PF(Y_t; \mu, \sigma^2)\}_{\mathbb{I}_M}$$

Finalement un algorithme numérique maximise cette vraisemblance.

f. L'algorithme EM (Expectation Maximisation)

La maximisation numérique de la log-vraisemblance bute sur l'existence d'extrema locaux. L'utilisation d'un algorithme EM permet de résoudre ce problème.

Objectif :

L'algorithme EM est une procédure itérative qui sert à calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance en présence de données cachées ou manquantes.

Principe :

Chaque itération de l'algorithme comprend deux étapes :

- L'étape d'Expectation : les données cachées ou manquantes sont estimées sachant les données observées et les paramètres estimés à l'étape précédentes.

- L'étape de Maximisation : maximisation de la log-vraisemblance en tenant compte des données cachées ou manquantes calculées à l'étape E.

L'algorithme EM alterne entre les étapes E et M en réévaluant les paramètres à chaque itération, jusqu'à convergence de ce dernier.

3. Cas général

Hamilton en 1989 propose le modèle suivant :

$$Y_t = \mu_{s_t} + \sum_{j=1}^p \Gamma_{j,s_t} (Y_t - \mu_{s_{t-j}}) + \varepsilon_t$$

appelé Markov Switching in Mean (MSM). Mais on peut envisager le cas Markov Switching with Intercept (MSI) :

$$Y_t = \mu_{s_t} + \sum_{j=1}^p \Gamma_{j,s_t} Y_t + \varepsilon_t$$

Nous utilisons le modèle MSI pour nos applications.

L'algorithme EM enchaîne les phases E et M jusqu'à convergence.

La phase E de l'algorithme EM est identique à celle du cas simple, il faut juste adapter les paramètres pour le calcul des probabilités.

La phase M quant à elle consiste en l'estimation des paramètres par maximisation de la log-vraisemblance, étant donnée la connaissance des probabilités filtrées et lissées dans la phase E. Ce qui ne pose pas de difficultés car nous disposons d'une expression analytique des estimateurs.

4. Le modèle multi-varié

Notons que jusqu'à présent nous avons présenté le modèle uni-varié qui consiste à utiliser une seule série de données, représentée par Y_t .

A ce stade on s'intéresse à combiner plusieurs séries. On utilise le même raisonnement que le modèle uni-varié, sauf que là, Y_t n'est pas un vecteur, mais une matrice.

Nous tâcherons de faire des applications dans les deux cas et de faire des comparaisons par la suite.

IV. Application aux séries du Cisma

1. Présentation du Cisma : l'entreprise et ses activités

Le syndicat pour la Construction l'Infrastructures la Sidérurgie et la Manutention (CISMA) est membre de la Fédération des Industries Mécaniques (FIM). C'est une organisation professionnelle qui rassemble les entreprises qui conçoivent, produisent et commercialisent des équipements pour la Construction, les Infrastructures, la Sidérurgie et la Manutention; il regroupe également les fournisseurs de composants et d'équipements spéciaux pour ces matériels.

Le CISMA compte aujourd'hui 189 adhérents - PME, PMI et filiales de groupes internationaux - qui emploient quelques 30 000 personnes en France. Ces entreprises exportent 72 % de leur production et réalisent un CA de 5,4 milliards d'euros.

Dans ce contexte de globalisation et d'accroissement des échanges commerciaux, le CISMA entend remplir 4 missions essentielles :

- rapprocher les acteurs de la profession,
- défendre les intérêts de ses adhérents,
- conseiller les décideurs,
- valoriser les différents secteurs d'activité.

Pour mener à bien ces objectifs, le CISMA s'appuie sur une connaissance approfondie des problématiques du secteur et fournit à ses membres une expertise technique hautement qualifiée.

Ses équipes produisent et diffusent des informations économiques, statistiques, juridiques et fiscales. Elles participent à l'élaboration de réglementations techniques et de recommandations professionnelles ainsi qu'à l'harmonisation des normes.

Le CISMA intervient également dans la promotion de la profession et du savoir-faire des industriels ; il organise des réunions de travail entre adhérents et fournit des conseils personnalisés à ses membres (interprétation d'un texte réglementaire, approche d'un marché étranger, intervention dans un litige...).

Membre majeur de la Fédération des Industries Mécaniques (FIM), le CISMA contribue à améliorer l'image, déjà forte, de la mécanique en France. Le CISMA est aussi très actif aux plans européen et international : il coopère de façon permanente avec ses homologues européens et participe à de nombreux comités européens.

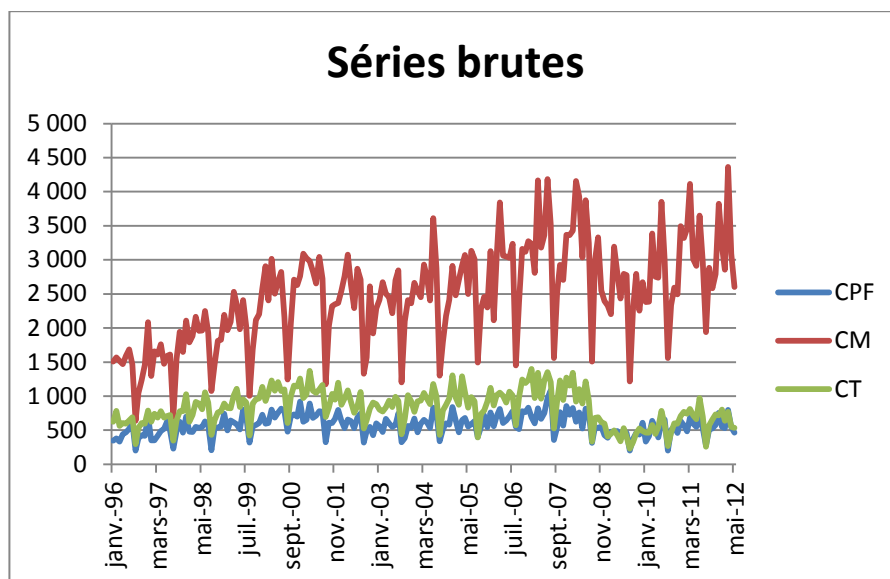
De plus amples explications sur l'entreprise sont disponibles sur le site internet du Cisma.

2. Les trois séries de base

Nous disposons de trois séries mensuelles qui répertorient les ventes de chariot du Cisma. Il s'agit des séries des commandes de porte à faux (CPF), commande magasiniers (CM), et commandes thermiques (CT).

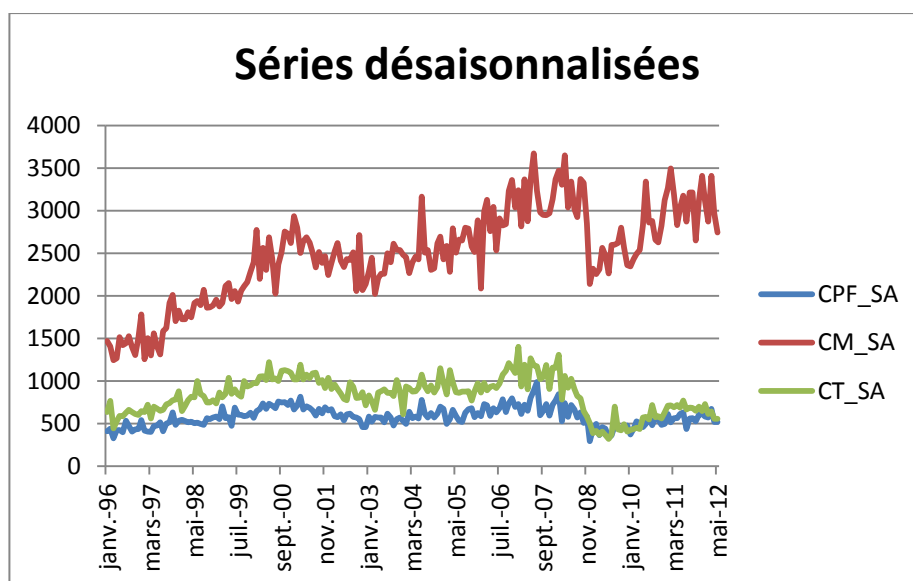
Les séries initiales vont de janvier 1996 et jusqu'en mai 2012, elles ont été complétées par les données de juin et juillet.

Séries de ventes de chariots brutes



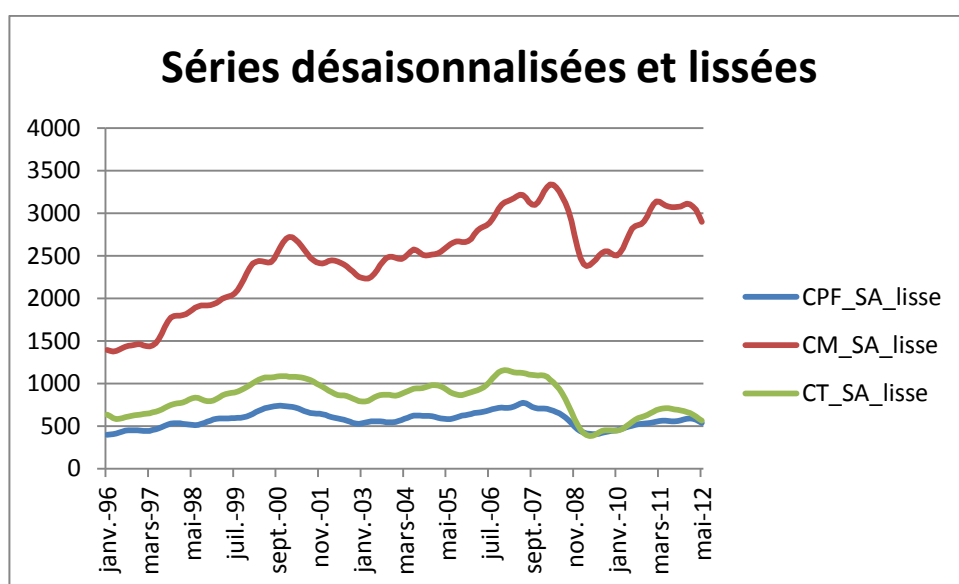
Les séries ont été désaisonnalisées ...

Séries de ventes de chariots désaisonnalisées



... puis lissées.

Séries de ventes de chariots du Cisma désaisonnalisées et lissées



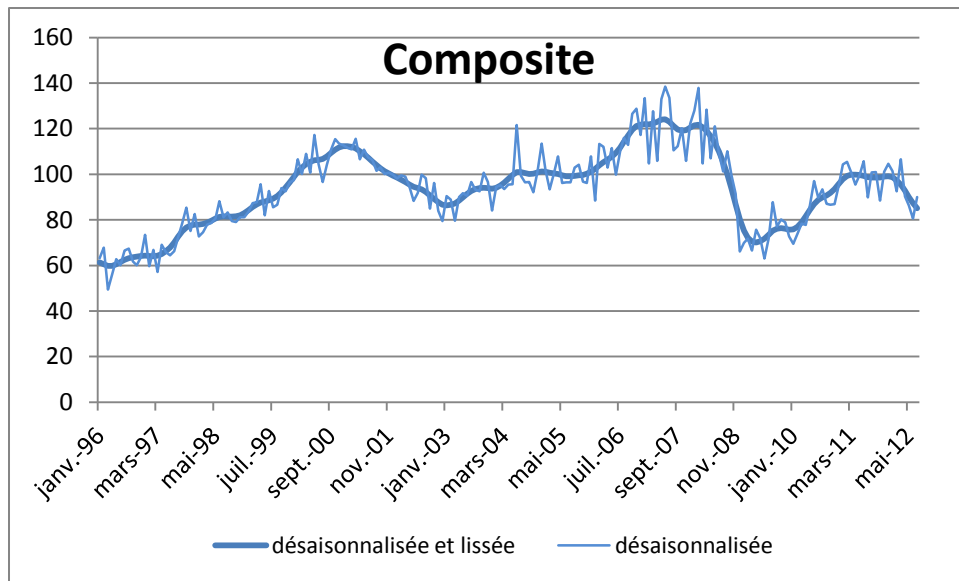
3. Calcul d'un indicateur synthétique : la composite

Les trois séries brutes sont pondérées par un prix moyen fourni par le Cisma pour créer un indicateur synthétique appelé composite. Il est ensuite désaisonnalisé et lissé par un filtre passe bas.

Notons que l'indicateur est le même si nous avons pondéré les séries après les avoir désaisonnalisées et lissées; puisque les méthodes utilisées pour désaisonnaliser et lisser sont linéaires.

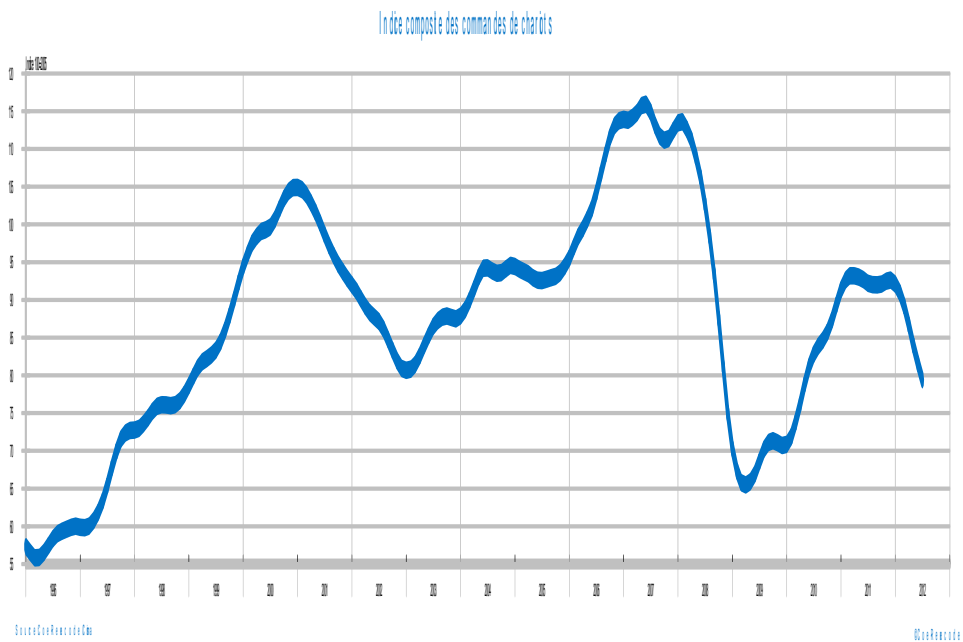
La pondération exercée sur les séries est de 23000 sur les commandes porte à faux, 12000 sur les commandes magasiniers, et 25000 sur les commandes thermiques.

Indice composite des chariots



Indice composite des chariots en base 100 pour l'année 2005

Cet indice est calculé en ramenant la valeur de l'année 2005 de la composite normale à 100 et après une règle de trois, on peut avoir les valeurs des autres années.



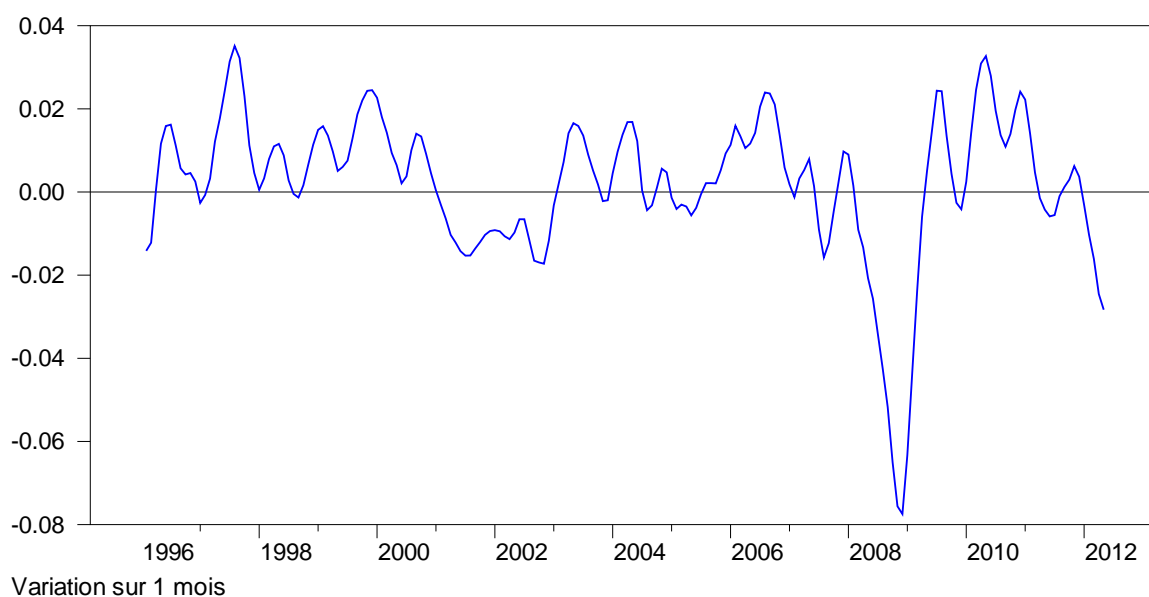
4. Modèle à changement de régime uni-varié pour identifier les mouvements récessifs : application

Nous utilisons le logiciel Rats pour implémenter le modèle à changement de régime uni-varié. Le choix du nombre de régimes et de l'hétéroscédasticité ou de l'homoscédasticité nous appartient. Pour savoir lequel est le bon, nous avons dû tester le modèle en faisant varier le nombre de régimes et la scédasticité. Le modèle choisi étant celui qui signalait au mieux les périodes de crises connues du passées.

Le modèle à deux régimes hétéroscédastique est satisfaisant pour reproduire les récessions. La période d'apprentissage est courte et seule l'étude dynamique du dernier point est valide.

Nous appliquons ce modèle à la variation sur un mois du log de notre série.

Variation sur un mois de la composite

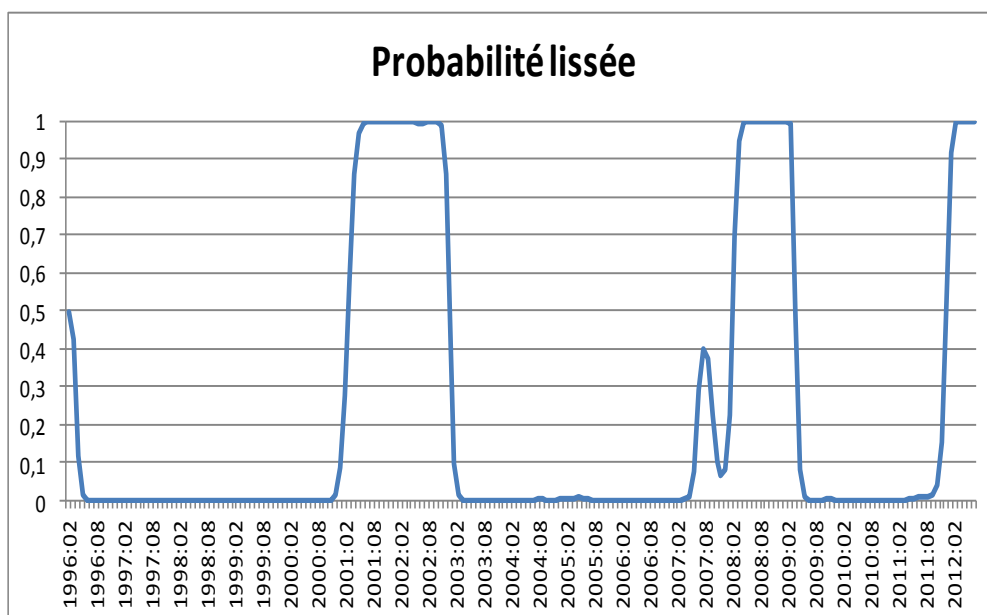


Les résultats obtenus sont les suivants :

Variable	Coefficient	Ecart-type	T de student
Coeff régime 1	0,01	0,0	10,6
Coeff régime 2	-0,02	0,0	-3,7
Ecart-type rég 1	0.000095602	0,0	8,0
Ecart-type rég 2	0.000368872	0,0	3,6
P(1,1)	0,97	0,0	46,2
P(2,1)	0,1	0,1	1,1

Le régime de récession est celui pour lequel le coefficient est le plus petit. Dans notre cas il s'agit du régime 2.

Probabilités lissées du régime de recession :



Depuis 1996, la série composite a connu deux phases récessives.

Phases récessives	Durée (mois)	Amplitude
janv2011-janv2003	24	-23.10%
févr2008-avril2009	14	-42.40%
déc2011-		

Le dernier point haut de la série est atteint en décembre 2011 et il est détecté en temps réel en mars 2011 mais avec la donnée publiée en mai (voir tableau ci-dessous). La probabilité franchit le seuil de 50 % à 64 %. Les données d'avril à juillet confirment ce diagnostic (la probabilité atteint 100 % en juillet). La révision de la série brute mais aussi du lissage contribuent à ce décalage du signal.

Avant mars 2011, aucun signal de retournement n'est fourni.

Scénarios prévisionnels

Avec les données de juin et juillet, l'indice composite lissé poursuit sa chute. Si l'on extrapole cette chute moyenne de 2,2% par mois jusque la fin de l'année, la variation annuelle sera de -12,1 %. Dans un scénario alternatif plus optimiste où les commandes demeurent en moyenne à leur niveau de juillet jusqu'à la fin de l'année, la baisse serait de 9,8%. On peut donc avancer la fourchette [-12 %, -10 %]. La probabilité d'une phase baissière est à 100%, ne laissant pas envisager de sortie proche.

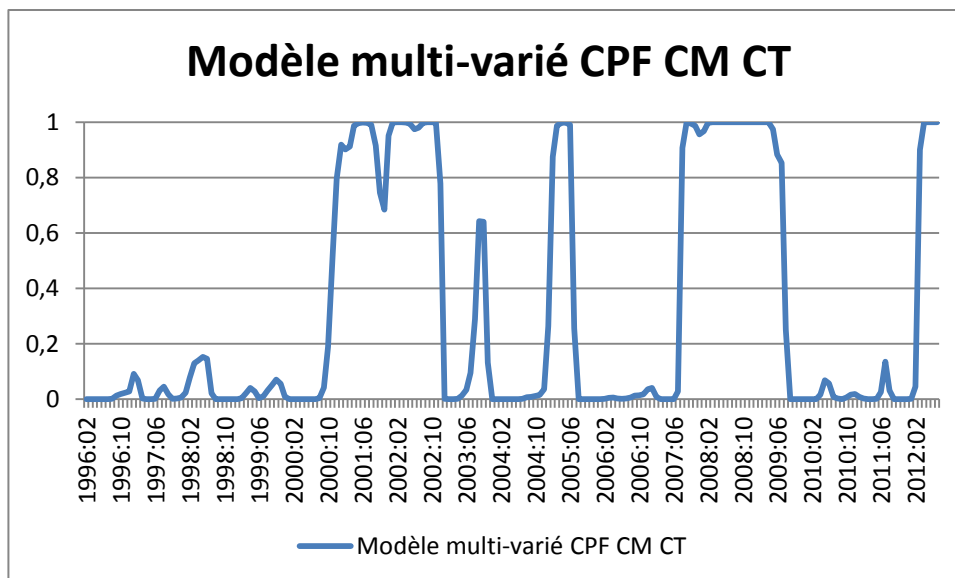
Millésime des probabilités filtrées

	PFILTREE_Mars	PFILTREE_Avril	PFILTREE_Mai	PFILTREE_Juin	PFILTREE_Juillet
2011:01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2011:02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2011:03	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01
2011:04	0.01	0.01	0.02	0.01	0.01
2011:05	0.02	0.02	0.03	0.02	0.02
2011:06	0.05	0.03	0.06	0.04	0.03
2011:07	0.08	0.04	0.08	0.05	0.05
2011:08	0.05	0.03	0.05	0.03	0.04
2011:09	0.03	0.02	0.03	0.01	0.03
2011:10	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02
2011:11	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01
2011:12	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01
2012:01	0.00	0.01	0.02	0.02	0.03
2012:02	0.00	0.02	0.12	0.24	0.23
2012:03	0.00	0.04	0.64	0.98	0.90
2012:04		0.11	1.00	1.00	1.00
2012:05			1.00	1.00	1.00
2012:06				1.00	1.00
2012:07					1.00

La question est de savoir combien de temps va durer cette nouvelle phase baissière.

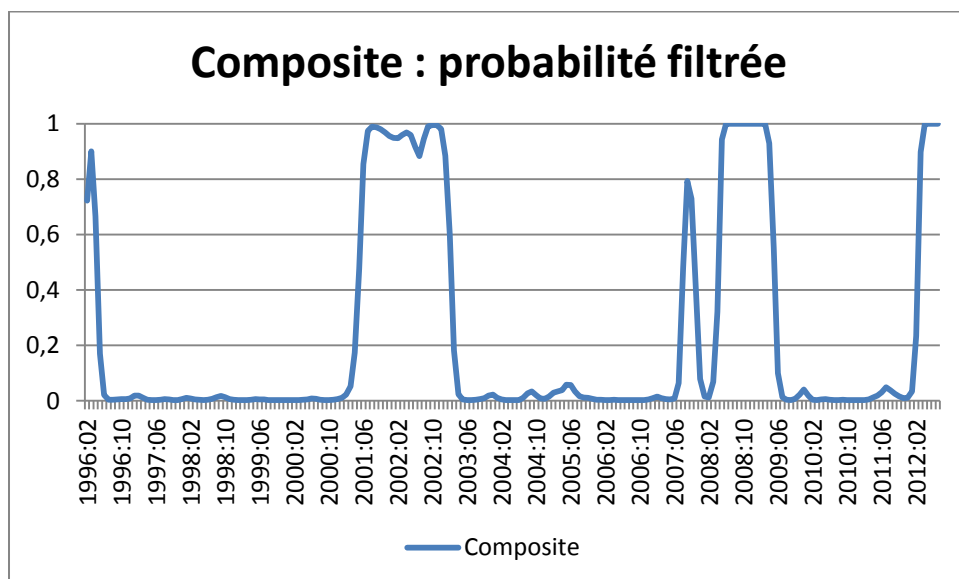
5. Application du modèle à changement de régime multi-varié et comparaison avec l'indicateur composite

Pour le modèle multi-varié, nous utilisons un programme fait sous Ox par Krolzig. De même que pour la composite, on choisit de faire un modèle à deux régimes hétéroscédastique. La probabilité filtrée du régime de récession est la suivante :



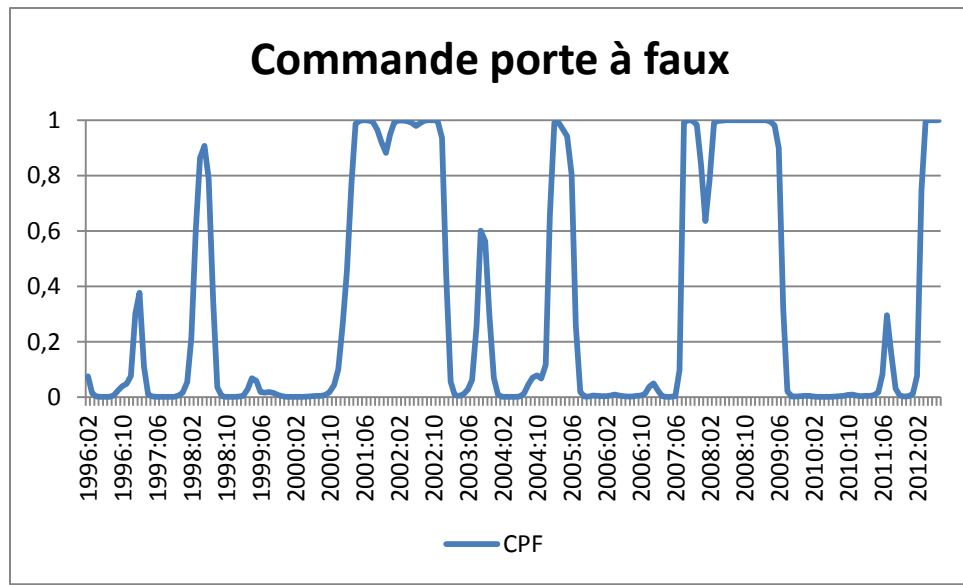
Les régimes de récession détectés ne sont pas exactement les mêmes que ceux de la composite.

Le modèle multi-varié et la composite sont censés être des synthèses reflétant les trois séries. On devrait donc avoir des résultats plus ou moins semblables. Cependant, les graphiques des probabilités filtrées résultant des deux méthodes mettent en lumière leurs différences.

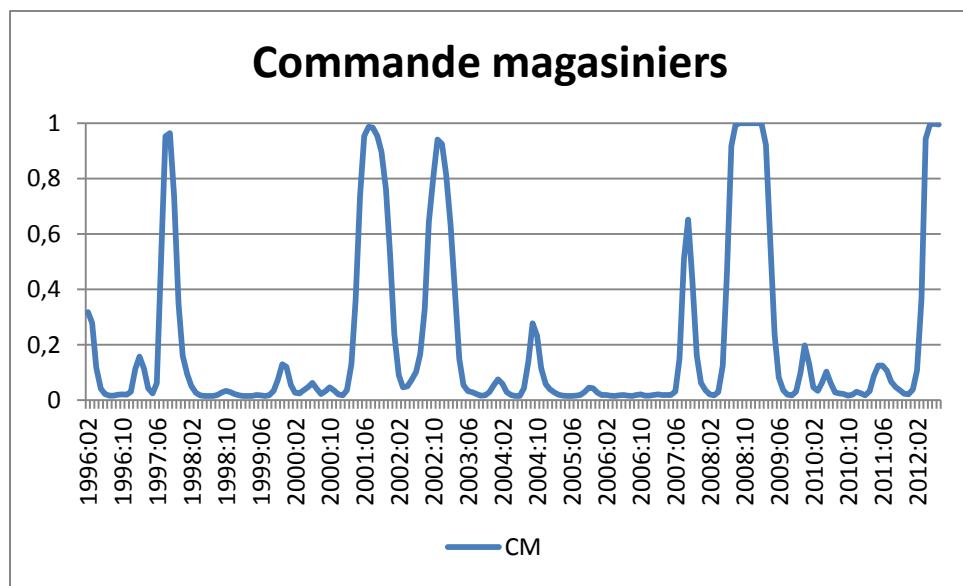


Pour comprendre la différence entre les deux indicateurs synthétiques, nous appliquons la méthode uni-variée à deux régimes hétéroscédastisque sur chaque série séparément des autres.

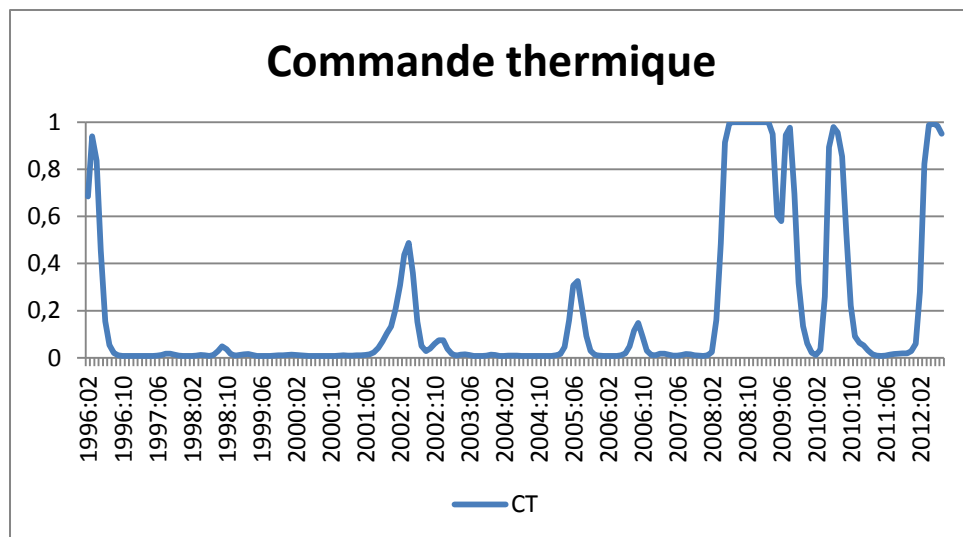
Probabilités filtrées de la variation du logarithme sur un mois.



En début 1998 on a un signal de récession, de même qu'entre octobre 2000 et fin 2002, en 2003, en 2005, entre 2007 et 2009 et à partir de mars 2012.



En début 2000, il n'y a pas de signal, nous avons un double signal entre fin 2000 et mi-2003, et un autre signal en 2008.



Entre 1997 et 2007, la probabilité ne dépasse pas 0.5. Nous n'avons pas de signal.

Diagnostic :

Les trois séries n'ont pas toutes le même poids. Une d'entre elles, la série de commandes magasiniers, a un poids beaucoup plus élevé que les autres, soit environ quatre fois le poids de la série commandes porte à faux, et plus de deux fois le poids de la série de commandes thermique.

Points communs et des divergences

Points communs	
La récession de novembre 2000 à février 2003	Elle apparait dans la série CPF et dans la série CM. Mais dans cette dernière, c'est une double récession. La série CT ne la mentionne pas, mais puisqu'elle est commune aux deux autres, alors les indicateurs synthétiques les détectent
La récession de fin 2007 à fin 2009	Elle est détectée par les trois séries
La récession de mars 2012 jusqu'à maintenant	Elle aussi est détectée par les trois séries
Aucun signal entre 1996 et 2000	Ceci malgré que la CPF émet un signal en février 1998

L'indicateur composite est influencé par la pondération qu'on donne aux composantes. Ces pondérations équilibrent les poids des trois séries. Alors que le multi-varié conserve l'effet du poids. D'où les différences ci-dessous :

Divergences	
Le modèle multi-varié détecte deux récessions qui n'apparaissent pas avec la composite. De septembre à octobre 2003 et de février à juin 2005.	Ces récessions apparaissent uniquement dans CPF avec une forte probabilité.

V. Conclusion de la partie

La partie qui s'achève a été consacrée à l'application des modèles à changement de régime markovien. Avec en input des séries de ventes. Le choix du nombre de régimes et de la scédasticité se fait après avoir testé plusieurs cas. Mais en général nous nous arrêtons à 3 régimes. Car à partir de 4 régimes, les programmes deviennent instables. Le choix de deux régimes implique qu'il n'y a que deux phases : une phase de récession, et une phase de croissance. Alors qu'une phase de plus (le cas de trois régimes), aurait représenté la période de ralentissement.