



BUREAU DE RECHERCHES GÉOLOGIQUES ET MINIÈRES

INGÉNIEURS SUP GALILÉE - UNIVERSITÉ PARIS NORD

RAPPORT DE STAGE DE FIN D'ÉTUDE

Étude de la Génération et de la Propagation d'Ondes Sismiques

Stagiaire : LI Yang

Maître du stage : Ariane DUCCELLIER

Tuteur du stage : Emmanuel AUDUSSE

Dates de stage : du 2 Avril au 27 Septembre 2013

Orléans, Le 19 Septembre 2013

Remerciements

Je tiens à remercier dans un premier temps madame Ariane DUCCELLIER de m'avoir offert la chance d'effectuer mon stage de fin d'études au sein du BRGM. Je tiens tout particulièrement à la remercier de m'avoir apporté les explications du phénomène modélisé, et de m'avoir accordé une forte autonomie ainsi qu'une grande liberté de travail.

Je remercie Mr Emmanuel AUDUSSE pour son conseil technique.

Je remercie Mr Pascal OMNES et Mme Juliet RYAN pour leurs éclairages sur mon sujet de stage.

Je remercie Mr Hideo AOCHI pour m'avoir apporté les explications sur la rupture dynamique des séismes.

Je remercie Mr Florent DE MARTIN pour son aide lors de mes soucis ponctuels dans l'utilisation du logiciel GID et du cluster Dogger du BRGM.

Je remercie Mr Claudio TROVATO pour m'avoir apporté les explications sur les aspects géologiques pour les ondes sismiques.

Je remercie également l'ensemble des employés du BRGM que j'ai rencontrés. C'est vous qui m'avez donné un stage passionnant et mémorable.

J'associe à ces remerciements tous les professeurs m'ayant enseigné durant ces années d'études ainsi que les étudiants avec qui j'ai eu l'occasion, même brièvement, de travailler.

A la fin, je tiens ici particulièrement à remercier l'ensemble de ma famille pour son soutien durant tout mon cursus scientifique.

LI Yang

le 19 Septembre 2013

Sommaire

1	Introduction	5
2	Présentation du BRGM	5
2.1	Historique et présentation générale	5
2.2	Présentation générale	5
2.3	Unité DRP/RSV	7
3	Ondes Sismiques[6]	9
3.1	Les différents types d'ondes	9
3.1.1	Ondes de volume	9
3.1.2	Ondes de surface	10
4	Équation des ondes de volume[3]	11
4.1	Équation du mouvement	11
4.2	Équation des ondes sismiques	12
	Interprétation	13
5	Nucléation[6]	13
6	Système de l'élastodynamique[2][5]	14
6.1	Mise en équations	14
6.2	Conditions initiales et conditions aux limites	14
6.3	Méthode des volumes finis pour l'élastodynamique	15
6.4	Un schéma volumes finis de type saute-mouton en temps avec flux centrés en espace	16
6.4.1	Choix de flux	17
6.5	Condition CFL	18
6.5.1	Estimation d'énergie	19
6.5.2	Conditions aux limites réfléchissantes	20
6.6	La faille horizontale	22
6.7	Rupture dynamique avec un critère de seuil pour la contrainte	23
6.8	Cas des volumes finis	25
7	Résultats numériques	27
7.1	Input	27
7.2	Le pas de temps	28
7.3	Source cinématique	28
	Remarque	30
7.4	Comparaison avec la méthode des différences finies	30
	Test 1	30
	Remarque	34
	Test 2	34
	Remarque	37
	Test 3	37
7.4.1	Fonction readmesh	40
7.4.2	Résultat de temps de calcul	41

7.5	Source dynamique	43
8	Conclusion et perspectives	46

1 Introduction

J'ai effectué mon stage de fin d'études au sein du Bureau de Recherches Géologiques et Minières (BRGM), dans le service DRP/RSV sous l'encadrement de madame Ariane DUCCELLIER.

Le stage a débuté le 2 avril 2013 pour une période de 6 mois, et a pour objectif de réaliser des simulations de séismes avec un code utilisant la méthode Volumes finis, et de comparer les résultats avec ceux obtenus avec la méthode différences finies.

La deuxième section de ce rapport est consacrée à la présentation de l'entreprise BRGM et du service dans lequel s'est déroulé le stage. Les 3^{ème}, 4^{ème}, 5^{ème}, et 6^{ème} sections de ce travail mettent l'accent sur la partie théorique utilisée. Nous présenterons un modèle mathématique de propagation d'ondes sismiques dans les milieux complexes. Nous allons présenter la méthode de volumes finis pour la résolution de ce modèle. Pour la comparaison entre la méthode de différences finies et de volumes finis, on pose la source sismique sur un point du domaine et on met plusieurs récepteurs dans le domaine, enfin on compare les sismogrammes obtenus par les 2 méthodes. Ensuite nous allons faire la simulation dans le cas où il existe une faille dans le domaine et une zone de nucléation sur la faille. Les résultats numériques obtenus feront l'objet de la section 7.

2 Présentation du BRGM

2.1 Historique et présentation générale

C'est en 1941 qu'a été créé, à l'initiative d'Edmond Friedel, ingénieur général des mines et de Pierre Pruvost, doyen de la faculté des sciences de Lille, l'embryon de l'actuel BRGM. Ces deux éminents spécialistes des sciences de la terre s'étaient émus de la déperdition des résultats fournis par les forages profonds, pétroliers ou autres, qui commençaient à être réalisés en métropole. C'est essentiellement dans le but de créer des archives du sous-sol de la France qu'a été créé le Bureau de Recherches Géologiques et Géophysiques (BRGG), service extérieur de la direction des mines du ministère de l'industrie, financé uniquement sur fonds d'Etat.

C'est ensuite en 1959, après la fusion du BRGG et du Bureau Minier de la France d'Outre-mer (BUMIFOM), que le Bureau de Recherches Géologiques et Minières (BRGM) fut créé. C'est un Etablissement Public à caractère Industriel et Commercial (EPIC) dont le statut a été redéfini en 2004, et qui se trouve sous la double tutelle du Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche et du Ministère de l'Ecologie, de l'Environnement, du Développement durable et de la Mer (MEEDM).

2.2 Présentation générale

Le BRGM (Bureau de Recherches Géologiques et Minières) est l'établissement public de référence dans les applications des sciences de la Terre pour gérer les ressources et les risques du sol et du sous-sol. Il a pour signature Géosciences pour une Terre durable.

Basé à Orléans, ses missions sont :

1. Recherche scientifique
2. Appui aux politiques publiques
3. Coopération internationale
4. Sécurité minière
5. Formation

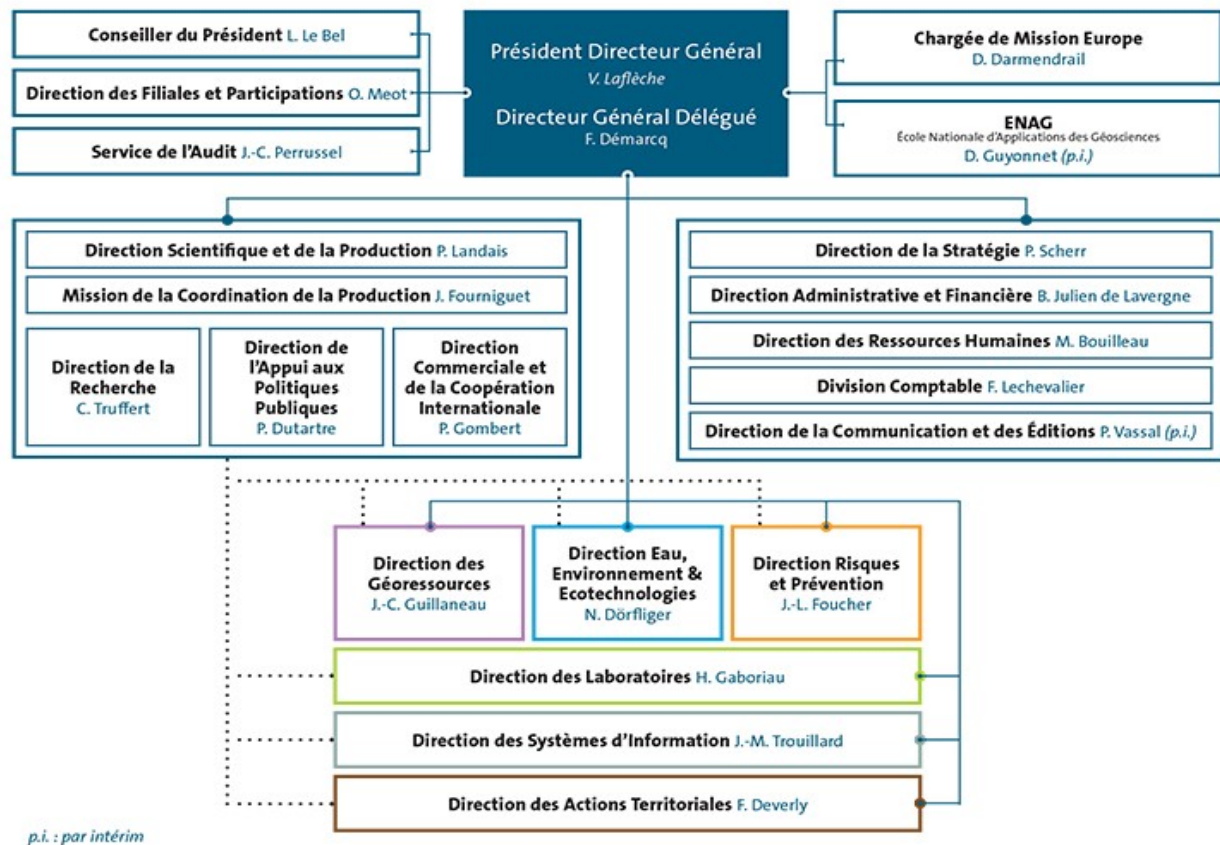
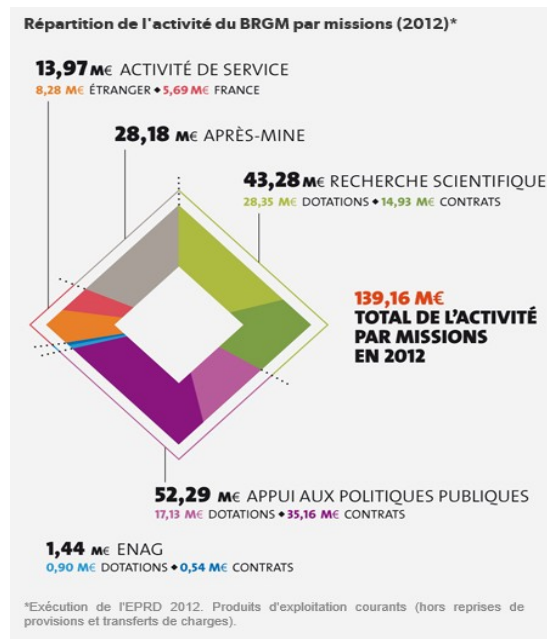
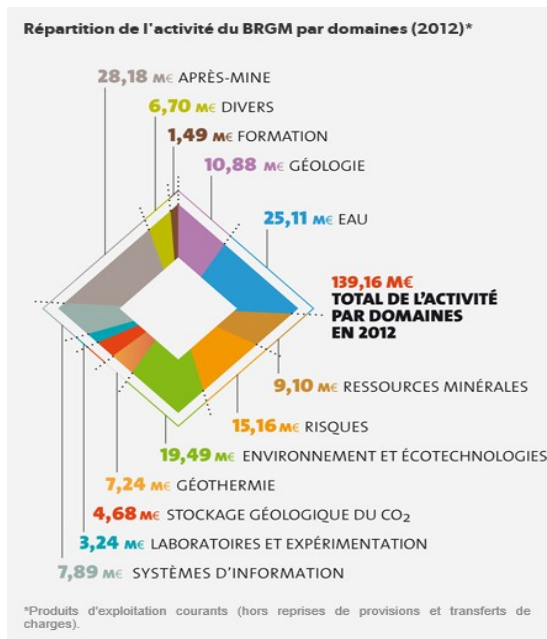
Les objectifs du BRGM sont :

1. Comprendre les phénomènes géologiques et les risques associés, développer des méthodologies et des techniques nouvelles, produire et diffuser des données de qualité.
2. Développer et mettre à disposition les outils nécessaires à la gestion du sol, du sous-sol et des ressources, à la prévision des risques naturels et des pollutions, aux politiques de réponse au changement climatique.

Le BRGM est le service géologique national français, ses domaines d'expertise sont :

1. Géologie
2. Ressources Minérales
3. Géothermie
4. Stockage géologique du CO_2
5. Risques
6. Après-mine
7. Eau
8. Environnement et écotechnologies
9. Laboratoires et expérimentation
10. Systèmes d'information

En 2012 , Le BRGM emploie plus de 1100 personnes dont plus de 700 chercheurs et ingénieurs (géologues, géotechniciens, hydrogéologues, géochimistes, modélisateurs, géophysiciens, informaticiens,...), dans ses 32 implantations en France métropolitaine et en Outre-mer. Ses équipes interviennent dans plus de 40 pays.



2.3 Unité DRP/RSV

L'unité DRP/RSV travaille à la compréhension, l'évaluation et la gestion des risques sismique et volcanique. En particulier, la vingtaine d'agents qui la composent réalisent :

1. Des évaluations de l'aléa sismique en France métropolitaine, en Outre-mer ou à l'inter-

national,

2. Des modélisations de la source sismique, de la propagation des ondes et de la réponse des sols,
3. Des simulations du comportement des ouvrages bâtis en cas de séisme,
4. L'implantation de réseaux d'accéléromètres pour la surveillance sismique,
5. Des expertises et tierces expertises pour aider à la gestion des contraintes d'aménagement des territoires et à l'implantation d'ouvrages sensibles et d'installations classées,
6. Des microzonages sismiques et des cartographies de risque incluant les dommages matériels, humains et économiques, en France et à l'international,
7. Des recherches sur la vulnérabilité des systèmes aux séismes et aux éruptions,
8. Des exercices de crise sismique en appui aux pouvoirs publics et des développements d'outils automatisés pour l'assistance à la gestion de crise,
9. Des bases de données (SisFrance sur l'histoire des séismes ressentis en France, Néopal sur les déformations récentes et les paléoséismes,...).

3 Ondes Sismiques[6]

Les ondes sismiques sont des ondes élastiques qui peuvent traverser un milieu en le modifiant selon la magnitude du séisme. L'impulsion de départ va "entamer" les particules élémentaires présentes dans le milieu, qui vont "pousser" d'autres particules avant de reprendre leur place, se propageant suivant une réaction en chaîne.

Les vibrations lors d'un séisme se propagent dans toutes les directions. On distingue deux types d'ondes, les ondes de volume qui traversent la Terre et les ondes de surface qui se propagent à sa surface. Sur les enregistrements des sismographes, elles se succèdent ou se superposent. Leur vitesse de propagation et leur amplitude sont modifiées par les structures géologiques qu'elles traversent, c'est pourquoi, les signaux enregistrés sont la combinaison d'effets liés à la source, aux milieux traversés et aux instruments de mesure.

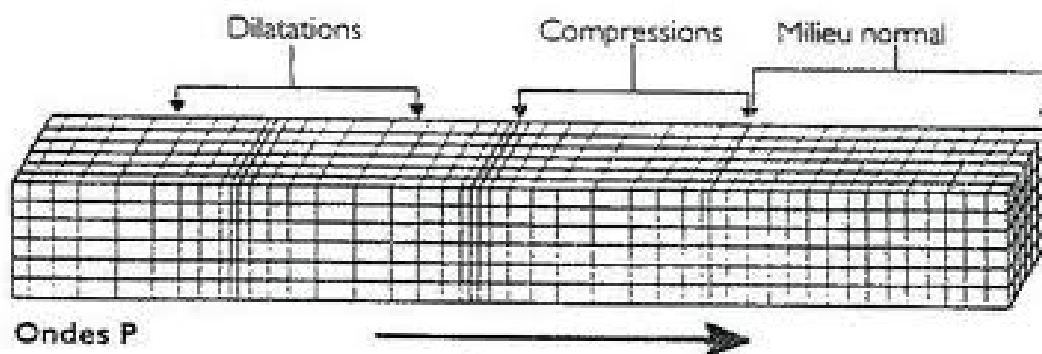
3.1 Les différents types d'ondes

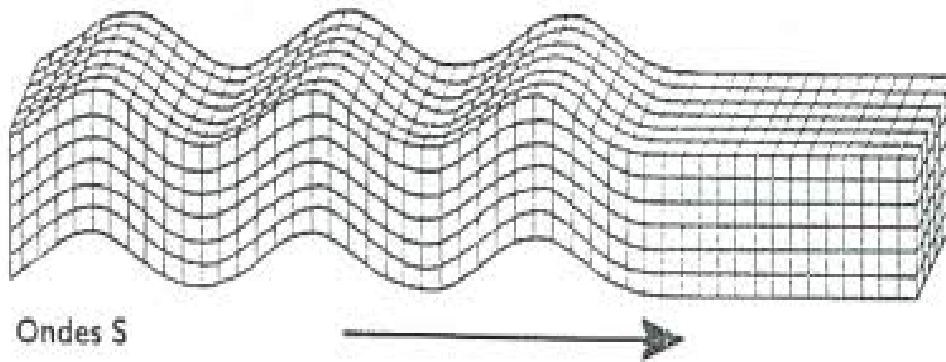
3.1.1 Ondes de volume

Elles se propagent à l'intérieur du globe. Leur vitesse de propagation dépend du matériau traversé et, d'une manière générale, cette dernière augmente avec la profondeur car le matériau traversé devient plus dense.

On distingue :

1. les ondes P ou ondes primaires appelées aussi ondes de compression ou ondes longitudinales. Le déplacement du sol qui accompagne leur passage se fait par des dilatations et des compressions successives. Ces déplacements du sol sont parallèles à la direction de propagation de l'onde. Ce sont les plus rapides ($6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ près de la surface) et donc les premières à être enregistrées sur les sismogrammes.
2. les ondes S ou ondes secondaires appelées aussi ondes de cisaillement ou ondes transversales. À leur passage, les mouvements du sol s'effectuent perpendiculairement au sens de propagation de l'onde. Ces ondes ne se propagent pas dans les milieux liquides, elles sont en particulier arrêtées par le noyau externe de la Terre. Leur vitesse est de $4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Elles apparaissent en second sur les sismogrammes.



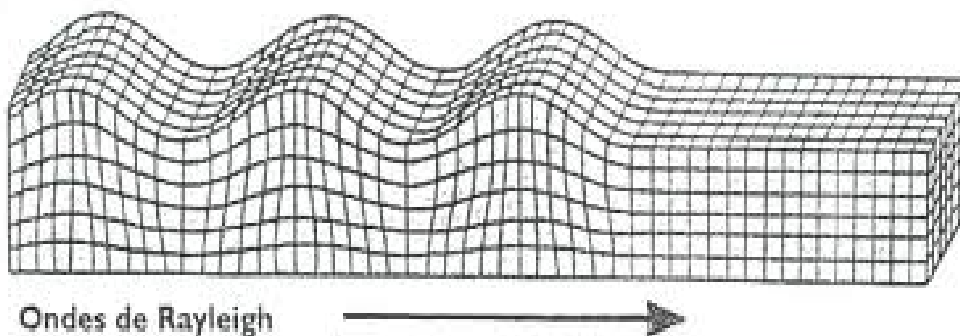
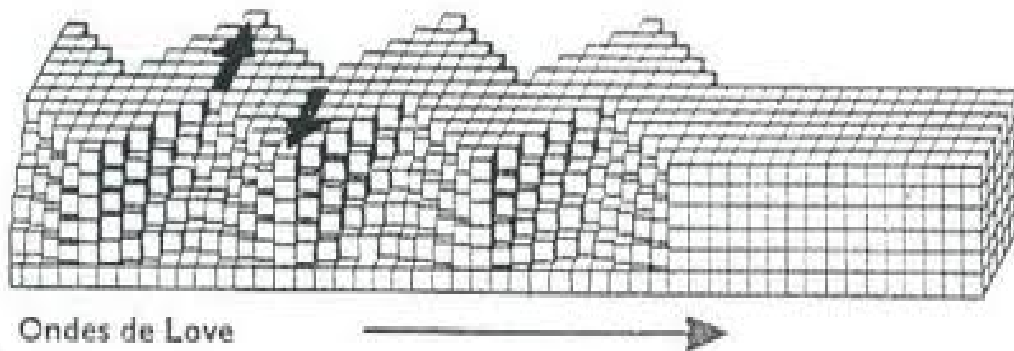


3.1.2 Ondes de surface

Ce sont des ondes guidées par la surface de la Terre. Leur effet est comparable aux rides formées à la surface d'un lac. Elles sont moins rapides que les ondes de volume mais leur amplitude est généralement plus forte.

On distingue :

1. L'onde de Love : c'est un anglais Augustus Edward Hough Love qui a découvert son existence en 1911. Son déplacement est comparable à celui des ondes S sans le mouvement vertical. Les ondes de Love provoquent un ébranlement horizontal qui est la cause de nombreux dégâts aux fondations d'un édifice qui n'est pas une construction parasismique. Les ondes de Love se propagent à environ $4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$
2. L'onde de Rayleigh : elle a été découverte par John William Strutt Rayleigh en 1885. Son déplacement est complexe, assez semblable à celui d'une poussière portée par une vague, constituant un mouvement à la fois horizontal et vertical.



4 Équation des ondes de volume[3]

Les ondes de volume sont des vibrations capables de se propager à l'intérieur d'un volume, par opposition aux ondes de surface, qui se propagent le long d'une interface. Dans cette partie, nous dérivons leurs équations de propagation à partir du principe fondamental de la dynamique, puis en identifions une famille de solutions en géométrie cartésienne et sphérique.

4.1 Équation du mouvement

Considérons un volume infinitésimal dV d'un solide de masse volumique ρ , délimité par la surface dS . Ce milieu est soumis à des forces de volume que nous regroupons dans le terme \vec{f} , ainsi qu'à des forces surfaciques décrites par le tenseur des contraintes σ_{ij} . Nous adoptons un système de coordonnées cartésiennes dans un repère à 3 directions orthogonales x_1, x_2, x_3 . D'après la relation de Cauchy, la i -ème composante de la force élémentaire s'exerçant sur une surface dS de normale unitaire \vec{n} s'écrit

$$dF_i = \sigma_{ij} n_j dS$$

avec la convention de sommation par indices répétés. Appliquons le principe fondamental de la dynamique à un volume macroscopique V délimité par la surface S . Nous égalisons le produit de la masse par l'accélération avec la somme des forces, et notons \vec{v} le champ de vitesse au sein de ce solide.

$$\int_V \rho \frac{dv_i}{dt} dV = \int_S \sigma_{ij} n_j dS + \int_V f_i dV \quad (1)$$

D'après le théorème de Gauss

$$\int_S \sigma_{ij} n_j dS = \int_V \sigma_{ij,j} dV$$

avec la notation

$$\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

et l'opérateur $\frac{d}{dt}$ désignant la dérivée lagrangienne

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$$

On peut donc, à partir de l'équation(1), revenir à l'échelle mésoscopique et écrire l'équation du mouvement

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \partial_j v_i \right) = \sigma_{ij,j} + f_i \quad (2)$$

4.2 Équation des ondes sismiques

Le passage d'une onde sismique dans un volume rocheux V se traduit par de brèves vibrations d'amplitude extrêmement faible par rapport à la taille du volume (déformation de l'ordre d'1 mm par km, soit 10^{-6} , éventuellement 10^{-5} à proximité de la source). Dans ces conditions, on peut considérer que le matériau se comporte de façon élastique, et non plastique ou visqueuse. On peut donc négliger dans l'équation(2) le terme d'advection $v_j \partial_j v_i$

Introduisons alors le champ de déplacement \vec{u} traduisant le changement de position des points constituant le solide, de sorte que $\vec{v} = \partial_t \vec{u}$. Enfin, nous considérons l'effet des forces volumiques négligeable, car nous nous plaçons en champ lointain, c'est à dire loin de la source des ondes sismiques. Nous négligeons par ailleurs tout effet de la gravité, hypothèse valide dans le cadre des ondes de volume mais non valide pour l'étude des vibrations basse fréquence.

L'équation(2) se simplifie ainsi en

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sigma_{ij,j} \quad (3)$$

Le terme de gauche fait intervenir les 3 composantes du champ de déplacement tandis que le terme de droite fait appel aux contraintes. On peut toutefois relier contraintes et déformations dans le cadre de l'élasticité linéaire par

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

où C_{ijkl} désigne un tenseur d'ordre 4 contenant 21 paramètres élastiques indépendantes décrivant le comportement du matériau dans chaque direction de l'espace. Nous nous plaçons dans le cas dit isotrope, où les propriétés du matériau sont indépendantes de la direction considérée. Le nombre de constantes élastiques indépendantes est alors ramené à seulement 2 : les coefficients de Lamé λ et μ . Le coefficient μ exprime une résistance au cisaillement, mais le paramètre λ n'a pas d'interprétation physique simple. Le couple (λ, μ) peut être relié au couple module d'Young-coefficient de Poisson avec une valeur avoisinant 30 GPa dans la croûte et 70 GPa dans le manteau. En revanche, $\mu = 0$ dans les liquides, qui n'ont aucune résistance au cisaillement

La relation contrainte déformation en cas isotrope s'écrit

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

La déformation est elle même reliée au déplacement par

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \partial_j [\lambda \partial_k u_k \delta_{ij} + \mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i)] \\ &= \partial_i (\lambda \partial_k u_k) + (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \partial_j \mu + \mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \\ &= \lambda \partial_i \partial_k u_k + (\partial_k u_k) \partial_i \lambda + (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \partial_j \mu + \mu (\partial_j \partial_i u_j + \partial_j \partial_j u_i) \end{aligned}$$

On obtient alors l'équation complète

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 \vec{u} + (\vec{\nabla} \lambda) \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + (\underline{\underline{\nabla}} \vec{u} + {}^t \underline{\underline{\nabla}} \vec{u}) \vec{\nabla} \mu$$

En considérant négligeables les variations des paramètres élastiques μ et λ dans le milieu, cette équation se simplifie en

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 \vec{u}$$

Nous introduisons alors l'identité vectorielle

$$\nabla^2 \vec{u} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{u}$$

et obtenons l'équation des ondes élastiques en milieu isotrope et homogène

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \mu \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{u} \quad (4)$$

Prenons à présent la divergence des deux membres de l'équation(4). La divergence d'un rotationnel étant nulle, ceci donne

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = (\lambda + 2\mu) \nabla^2(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \quad (5)$$

Et en prenant le rotationnel des deux membres de l'équation (le rotationnel d'un gradient étant nul), nous obtenons

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\vec{\nabla} \times \vec{u}) &= -\mu \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \\ &= -\mu(\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}))) \\ &= \mu \nabla^2(\vec{\nabla} \times \vec{u}) \end{aligned}$$

Interprétation L'équation d'ondes(4) décrit à la fois le transport d'une variation de volume (les ondes de compression-dilatation, décrites par le terme $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$) et de petites rotations (les ondes de cisaillement, décrites par le terme $\vec{\nabla} \times \vec{u}$). La Terre oppose de façon générale beaucoup moins de résistance aux dilatations qu'aux rotations, c'est pourquoi les ondes de compression-dilatation sont toujours les premières arrivées, d'où leur nom d'**ondes P**. Les ondes de cisaillement arrivent en second, et sont communément appelées **ondes S**.

5 Nucléation[6]

La nucléation est la phase d'initiation durant laquelle le mécanisme de la rupture dynamique se met en marche. Elle peut se dérouler en trois étapes :

1. Une phase de nucléation quasi-statique lente, stable et survenant dans des zones de dimensions relativement restreintes par rapport à la taille globale du domaine.
2. Une phase initiale de nucléation sismique dynamique, lente également, et transitoire vers l'instabilité.
3. une phase de nucléation sismique caractérisée par une accélération exponentielle du glissement et une croissance rapide de la zone de nucléation.

Plusieurs modèles de nucléation sismique ont été proposés, parmi lesquels nous pouvons citer les modèles de fracture avec cohésion, les modèles de fracture avec corrosion sous contrainte, les modèles SWF (Slip Weakening Friction), les modèles RSF (Rate and State Friction). Pour la suite de ce travail, nous avons appliqués le modèle SWF, qui est un modèle simple et qui ne tient pas compte de la phase quasi-statique.

6 Système de l'élastodynamique[2][5]

Pendant la période de mon stage, nous avons réalisé la simulation numérique de séismes par volumes finis et différences finies en deux dimensions. Dans cette section, nous présenterons le système de l'élastodynamique que nous avons utilisé pour la simulation numérique. Nous allons aussi parler des conditions aux limites et de la condition initiale.

6.1 Mise en équations

Dans un milieu infini, élastique, linéaire et isotrope, le mouvement d'un élément de matière est régi par les équations élasto-dynamiques suivantes :

En 2D

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \overrightarrow{div \underline{\sigma}} \quad (6)$$

$$\underline{\sigma} = \lambda div \vec{u} I_2 + \mu (\vec{\nabla} \vec{u} + {}^t(\vec{\nabla} \vec{u})) \quad (7)$$

où $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur déplacement des particules, $\underline{\sigma} \in sym_2(\mathbb{R})$ est le tenseur des contraintes, λ et μ sont les coefficients de Lamé locaux.

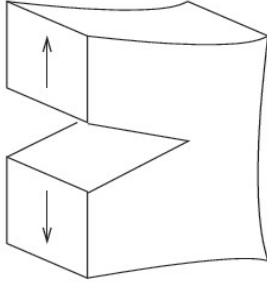
6.2 Conditions initiales et conditions aux limites

Nous nous intéressons dans le présent travail aux problèmes de contact parfait avec frottement agissant sur une certaine surface, appelée faille, où une rupture peut se produire donnant lieu à des discontinuités localisées des champs élastiques. Nous allons donc spécifier les conditions initiales et aux limites liées à ce type de problème.

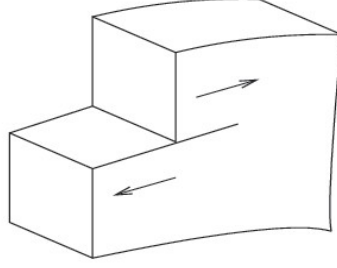
Considérons un milieu Ω contenant une faille Σ . Ce milieu est soumis à des forces surfaciques, appelées vecteur de contraintes, à des forces de volume comme la gravité (que nous négligeons). Comme le milieu est solide, il résiste aux chargements en accumulant de l'énergie élastique dans son volume. Une fois la résistance du milieu atteinte par ces chargements, le corps solide finit par céder le long des zones de faiblesse pré-existantes et une rupture spontanée se produit. Nous considérons l'instant qui précède le déclenchement de la rupture comme l'instant initial. Ainsi, pour les conditions initiales, les vitesses sont identiquement nulles puisque le milieu est initialement au repos, et il existe un champ de contrainte non identiquement nul.

Il existe trois modes de rupture :

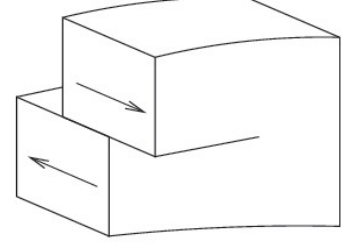
1. Le mode I ou d'ouverture : ce mode est considéré comme étant le plus souvent rencontré en mécanique de la rupture pour beaucoup de matériaux. Il est aussi le plus dangereux pour l'extension d'une fissure. Cependant, une fois amorcée et pour des sollicitations mixtes ou des géométries complexes, la fissure a tendance à bifurquer, et reste donc rarement rectiligne.
2. Le mode II ou plan : il produit des glissements parallèles au plan tangent à la fracture. La direction du glissement est normale au front de rupture
3. Le mode III ou anti-plan : il produit aussi des glissements parallèles au plan tangent de la fracture, mais la direction du glissement est parallèle au front de rupture.



Mode I



Mode II



Mode III

On considère qu'on est dans le mode plan pour lequel seule la composante tangentielle du vecteur traction $\vec{T} = \underline{\sigma} \vec{n}$ sur la faille est mise à contribution durant le relâchement de contraintes. Pendant la rupture dynamique, la faille peut évoluer en fonction du temps. Nous la noterons donc $\Sigma(t)$. Lorsque les contraintes dépassent la résistance du milieu, les tractions cisailantes sur la surface de rupture évoluent selon le frottement qui, à son tour, est gouverné par une loi constitutive. Cette relation constitutive dépend du temps et d'un ensemble de paramètres que nous noterons Ψ . Les tractions imposées sur $\Sigma(t)$ peuvent ainsi s'exprimer sous la forme :

$$\|\vec{T}_T\| = {}^t \vec{t} \quad \underline{\sigma}(t, x) \quad \vec{n} = g(t, \Psi), \forall x \in \Gamma \quad (8)$$

- \vec{n} : vecteur normal
- \vec{t} : vecteur tangent

Comme on permet la discontinuité de déplacement, on définit les limites de la valeur au plan de Faille du déplacement et de la vitesse sur la faille.

$$\vec{u}^\pm = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \vec{u}[\vec{x} \pm \epsilon \vec{x}, t] \quad (9)$$

$$\vec{v}^\pm = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \vec{v}[\vec{x} \pm \epsilon \vec{x}, t] \quad (10)$$

Grâce à ces notations, on peut définir le saut de déplacement tangentiel et le saut de vitesse tangentielle :

$$\mathcal{U} = (\vec{u}^+ - \vec{u}^-) \cdot \vec{t} \quad (11)$$

$$\mathcal{V} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = (\vec{v}^+ - \vec{v}^-) \cdot \vec{t} \quad (12)$$

6.3 Méthode des volumes finis pour l'élastodynamique

remarque 6.1. En deux dimensions d'espace, le tenseur de contraintes $\underline{\sigma}$ est défini par $\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$. Etant symétrique, il est souvent plus commode de l'écrire sous une forme vectorielle. On introduit alors les variables suivantes $\mathbf{T} = (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})/2$ et $\mathbf{T}' = (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})/2$ et on appellera, dans la suite, vecteur de contraintes le vecteur $\vec{\tau}$ défini par $\vec{\tau} = {}^t(\mathbf{T}, \mathbf{T}', \sigma_{xz})$ et vecteur de vitesse le vecteur \vec{v} défini par $\vec{v} = {}^t(v_x, v_z)$

On introduit le vecteur vitesse défini par $\vec{v} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ dans le système (6) et (7). On obtient un système hyperbolique de premier ordre suivant :

$$\tilde{\Lambda} \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t} = (M_x \frac{\partial}{\partial x} + M_z \frac{\partial}{\partial z}) \vec{v} \quad (13)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = (N_x \frac{\partial}{\partial x} + N_z \frac{\partial}{\partial z}) \vec{\tau} \quad (14)$$

$$\text{où } \tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda+\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix}, M_x = {}^t N_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_z = {}^t N_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si on désigne par \vec{F} et \vec{G} les fonctions définies respectivement dans $\mathbb{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ par $\vec{F} = (M_x \vec{v}, M_z \vec{v})$ et $\vec{G} = (N_x \vec{\tau}, N_z \vec{\tau})$, le système s'écrit alors :

$$\tilde{\Lambda} \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t} = \overrightarrow{\text{div} \vec{F}(\vec{v})} \quad (15)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \overrightarrow{\text{div} \vec{G}(\vec{\tau})} \quad (16)$$

Par la formule de Green, on obtient en intégrant les équations (10) et (11) sur un volume \mathcal{T} :

$$\int_{\mathcal{T}} \tilde{\Lambda} \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t} dv = \int_{\partial \mathcal{T}} \vec{F}(\vec{v}) \vec{n} ds \quad (17)$$

$$\int_{\mathcal{T}} \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dv = \int_{\partial \mathcal{T}} \vec{G}(\vec{\tau}) \vec{n} ds \quad (18)$$

où \vec{n} désigne la normale unitaire à \mathcal{T} , dirigée vers l'extérieur et $\partial \mathcal{T} ds$ signe le bord du volume \mathcal{T} .

6.4 Un schéma volumes finis de type saute-mouton en temps avec flux centrés en espace

Soit Ω un domaine de \mathbf{R}^2 , et désignons par $\partial \Omega$ son bord. Soit $V(\Omega)$ une partition en triangles ou rectangles de Ω .

Pour simplifier l'écriture des équations qui vont suivre, nous allons introduire les notations suivantes :

1. $\mathcal{A}_i = \int_{\mathcal{T}_i} dV$ volume de la cellule \mathcal{T}_i .

2. $\mathcal{T}_{ij} = \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_j$

3. $\vec{\mathcal{I}}_{ij} = \int_{\mathcal{T}_{ij}} \vec{n}_{ij} ds$ où \vec{n}_{ij} est la normale unitaire dirigée de \mathcal{T}_i vers \mathcal{T}_j

4. $l_{ij} = \|\vec{\mathcal{I}}_{ij}\|$ longueur de \mathcal{T}_{ij}

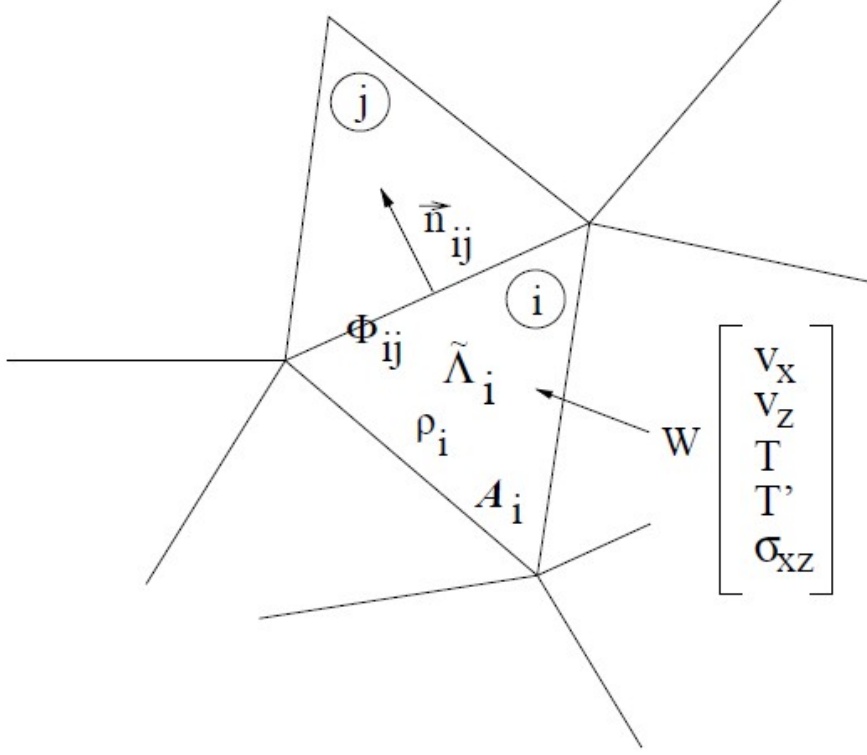


FIGURE 1 – Deux cellules adjacentes i et j qui sont dans le maillage, ρ_i et $\tilde{\Lambda}_i$ sont les propriétés élastiques locales dans la cellule i , la variable \tilde{W} est constante dans chaque cellule, et Φ_{ij} représente le flux entre 2 cellules

Le système (12) et (13) s'écrit alors :

$$\mathcal{A}_i \tilde{\Lambda}_i \left(\frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t} \right)_i = \sum_{j \in V(i)} l_{ij} F_{ij} \quad (19)$$

$$\mathcal{A}_i \rho_i \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_i = \sum_{j \in V(i)} l_{ij} G_{ij} \quad (20)$$

où $\left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right)_i$ et $\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_i$ sont respectivement des approximations, supposées constantes, de $\frac{\partial \tau}{\partial t}$ et $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ dans chaque cellule \mathcal{T}_i , $l_{ij} F_{ij}$ et $l_{ij} G_{ij}$ sont des approximations des flux $\int_{\partial \mathcal{T}_i} \vec{F}(\vec{v}) \vec{n} dS$ et $\int_{\partial \mathcal{T}_i} \vec{G}(\vec{\tau}) \vec{n} dS$ respectivement, et $V(i)$ désigne l'ensemble des cellules voisines de \mathcal{T}_i

6.4.1 Choix de flux

On utilise des flux centrés en espace.

$$F_{ij} = F(\vec{v}_i, \vec{v}_j, \vec{n}_{ij}) \quad \text{avec} \quad F(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}) = \frac{F(\vec{u}) + F(\vec{v})}{2} \cdot \vec{n} = \underbrace{\left(\sum_k n_k M_k \right)}_{\mathbb{P}} \frac{\vec{u} + \vec{v}}{2} \quad (21)$$

$$G_{ij} = G(\vec{\tau}_i, \vec{\tau}_j, \vec{n}_{ij}) \quad \text{avec} \quad G(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}) = \frac{G(\vec{u}) + G(\vec{v})}{2} \cdot \vec{n} = \underbrace{\left(\sum_k n_k N_k \right)}_{\mathbb{Q}} \frac{\vec{u} + \vec{v}}{2} \quad (22)$$

Pour la discrétisation en temps, on utilise un schéma saute-mouton, et le schéma s'écrit alors :

$$\mathcal{A}_i \tilde{\Lambda}_i \frac{\tau_i^{n+1} - \tau_i^n}{\Delta t} - \sum_{j \in V(i)} l_{ij} F_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = 0 \quad (23)$$

$$\mathcal{A}_i \rho_i \frac{v_i^{n+\frac{3}{2}} - v_i^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} - \sum_{j \in V(i)} l_{ij} G_{ij}^{n+1} = 0 \quad (24)$$

avec les flux internes :

$$F_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = F(v_i^{n+\frac{1}{2}}, v_j^{n+\frac{1}{2}}, n_{ij}) = \mathbb{P}_{ij} \frac{v_i^{n+\frac{1}{2}} + v_j^{n+\frac{1}{2}}}{2} \text{ où } \mathbb{P}_{ij} = \sum_{k \in \{x,z\}} n_{ijk} M_k$$

et

$$G_{ij}^{n+1} = G(\tau_i^{n+1}, \tau_j^{n+1}, n_{ij}) = \mathbb{Q}_{ij} \frac{\tau_i^{n+1} + \tau_j^{n+1}}{2} \text{ où } \mathbb{Q}_{ij} = \sum_{k \in \{x,z\}} n_{ijk} N_k$$

Plus précisément, pour toutes les interfaces internes le schéma s'écrit :

$$\mathbf{T}_i^{n+1} = \mathbf{T}_i^n + \frac{(\lambda + \mu)\Delta t}{\mathcal{A}_i} \sum_{j \in V(i)} \frac{l_{ij}}{2} [n_{ijx}(v_{ix}^{n+\frac{1}{2}} + v_{jx}^{n+\frac{1}{2}}) + n_{ijz}(v_{iz}^{n+\frac{1}{2}} + v_{jz}^{n+\frac{1}{2}})] \quad (25)$$

$$\mathbf{T}_i^{n+1} = \mathbf{T}_i^n + \frac{\mu\Delta t}{\mathcal{A}_i} \sum_{j \in V(i)} \frac{l_{ij}}{2} [n_{ijx}(v_{ix}^{n+\frac{1}{2}} + v_{jx}^{n+\frac{1}{2}}) - n_{ijz}(v_{iz}^{n+\frac{1}{2}} + v_{jz}^{n+\frac{1}{2}})] \quad (26)$$

$$\sigma_{ixz}^{n+1} = \sigma_{ixz}^n + \frac{\mu\Delta t}{\mathcal{A}_i} \sum_{j \in V(i)} \frac{l_{ij}}{2} [n_{ijz}(v_{ix}^{n+\frac{1}{2}} + v_{jx}^{n+\frac{1}{2}}) + n_{ijx}(v_{iz}^{n+\frac{1}{2}} + v_{jz}^{n+\frac{1}{2}})] \quad (27)$$

$$v_{ix}^{n+\frac{3}{2}} = v_{ix}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\mathcal{A}_i \rho_i} \sum_{j \in V(i)} \frac{l_{ij}}{2} [n_{ijx}(\mathbf{T}_i^{n+1} + \mathbf{T}_j^{n+1} + \mathbf{T}_i^{n+1} + \mathbf{T}_j^{n+1}) + n_{ijz}(\sigma_{ixz}^{n+1} + \sigma_{jxz}^{n+1})] \quad (28)$$

$$v_{iz}^{n+\frac{3}{2}} = v_{iz}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\mathcal{A}_i \rho_i} \sum_{j \in V(i)} \frac{l_{ij}}{2} [n_{ijz}(\mathbf{T}_i^{n+1} + \mathbf{T}_j^{n+1} - \mathbf{T}_i^{n+1} - \mathbf{T}_j^{n+1}) + n_{ijx}(\sigma_{ixz}^{n+1} + \sigma_{jxz}^{n+1})] \quad (29)$$

6.5 Condition CFL

On peut montrer qu'il existe des critères du type CFL pour maillage structuré ou non structuré.

1. Dans un domaine infini homogène partitionné de manière structurée, la condition de stabilité en norme L^2 est assurée par la condition suivante :

$$v_p \Delta t \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta z^2}} \leq 1$$

où $v_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ est la vitesse de l'onde de pression P

2. Dans le cas d'un maillage non structuré, le schéma est stable en norme L^2 si pour toutes cellules adjacentes \mathcal{T}_i et \mathcal{T}_k la condition suivante est vérifiée :

$$\Delta t < \frac{2}{\sqrt{v_p^2 - v_s^2} \|\mathbb{Q}_{ik}\|} \sqrt{\frac{\mathcal{A}_i \mathcal{A}_k}{l_i l_k}}$$

où $v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ est la vitesse de l'onde de cisaillement S et $l_i = \sum_{k \in V(i)} l_{ik}$ est le périmètre de la cellule \mathcal{T}_i .

Ces 2 conditions CFL impliquent qu'on est dans un milieu homogène, c'est-à-dire que ρ, μ et λ sont constantes.

6.5.1 Estimation d'énergie

On cherche à déterminer une autre condition nécessaire et/ou suffisante de stabilité du schéma volumes finis en se basant sur la définition d'une énergie qui devra être conservée par le schéma, en tenant compte des conditions aux limites qu'il nous reste à déterminer. On considère l'énergie totale discrète du système, donnée par :

$$E^n = \frac{1}{2} \sum_i \mathcal{A}_i ({}^t\tau_i^n \tilde{\Lambda}_i \tau_i^n + \rho_i {}^t v_i^{n-\frac{1}{2}} v_i^{n+\frac{1}{2}}) \quad (30)$$

La variation de cette énergie entre deux pas de temps successifs s'écrit :

$$\Delta E = E^{n+1} - E^n \quad (31)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \mathcal{A}_i ({}^t(\tau_i^{n+1} + \tau_i^n) \tilde{\Lambda}_i (\tau_i^{n+1} - \tau_i^n) + \rho_i {}^t v_i^{n+\frac{1}{2}} (v_i^{n+\frac{3}{2}} - v_i^{n-\frac{1}{2}})) \quad (32)$$

$$(\text{car } \tilde{\Lambda}_i \text{ est symétrique}) \quad (33)$$

En notant $\tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} = \frac{\tau_i^{n+1} + \tau_i^n}{2}$, on a :

$$\Delta E = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \in V(i)} l_{ij} ({}^t \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} \mathbb{P}_{ij} (v_i^{n+\frac{1}{2}} + v_j^{n+\frac{1}{2}}) + {}^t v_i^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_{ij} (\tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} + \tau_j^{[n+\frac{1}{2}]})) \quad (34)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \in V(i)} l_{ij} ({}^t \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} \mathbb{P}_{ij} v_j^{n+\frac{1}{2}} + {}^t v_i^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_{ij} \tau_j^{[n+\frac{1}{2}]}) \quad (35)$$

$$= \frac{\Delta t}{2} \sum_{\substack{\text{interfaces} \\ \text{internes}}} [l_{ij} ({}^t \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} \mathbb{P}_{ij} v_j^{n+\frac{1}{2}} + {}^t v_i^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_{ij} \tau_j^{[n+\frac{1}{2}]}) + l_{ji} ({}^t \tau_j^{[n+\frac{1}{2}]} \mathbb{P}_{ji} v_i^{n+\frac{1}{2}} + {}^t v_j^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_{ji} \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]})] \quad (36)$$

$$+ \frac{\Delta t}{2} \sum_{\substack{\text{interfaces} \\ \text{externes}}} l_{ij} ({}^t \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} \mathbb{P}_{ij} v_j^{n+\frac{1}{2}} + {}^t v_i^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_{ij} \tau_j^{[n+\frac{1}{2}]}) \quad (37)$$

$$= \frac{\Delta t}{2} \sum_{\substack{\text{interfaces} \\ \text{externes}}} l_{ij} ({}^t v_j^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_{ij} \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} + {}^t v_i^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_{ij} \tau_j^{[n+\frac{1}{2}]}) \quad (38)$$

$$= \Delta t \sum_{\substack{\text{interfaces} \\ \text{externes}}} l_{ij} ({}^t (\frac{v_i^{n+\frac{1}{2}} + v_j^{n+\frac{1}{2}}}{2}) \mathbb{Q}_{ij} \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} - \frac{1}{2} {}^t v_i^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_{ij} \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]}) \quad (39)$$

$$+ {}^t v_i^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_{ij} \frac{\tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} + \tau_j^{[n+\frac{1}{2}]}}{2} - \frac{1}{2} {}^t v_i^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_{ij} \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]}) \quad (40)$$

$$= \Delta t \sum_{\substack{\text{interfaces} \\ \text{externes}}} l_{ij} ({}^t v_i^{n+\frac{1}{2}} (G_{ij}^{[n+\frac{1}{2}]} - \mathbb{Q}_{ij} \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]}) + {}^t \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} F_{ij}^{n+\frac{1}{2}}) \quad (41)$$

où le terme "interfaces externes" désigne toute surface à travers laquelle le champ subit une modification (discontinuité, réflexion, absorption, etc.). Dans la suite, on supposera que le bord $\partial\Omega$ du domaine est la réunion de toutes ces interfaces externes ($\partial\Omega$ n'est donc pas forcément connexe), et on appellera cellule frontière toute cellule contenant une (ou plusieurs) interface externe.

6.5.2 Conditions aux limites réfléchissantes

Nous avons choisi les conditions aux limites réfléchissantes, c'est-à-dire qui renvoient le champ incident. Afin de trouver les expressions des flux réfléchissants, on va partir d'une idée simple. Sur une surface réfléchissante, le champ (ou une partie du champ) est renvoyé tel qu'il est, et donc ne dépend pas (ou partiellement) du champ voisin. Ceci justifie l'écriture des flux de la manière suivante :

$$F_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \mathbb{P}_{ij} v_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (\mathbb{A}_{ij}^{n+\frac{1}{2}} v_i^{n+\frac{1}{2}} + \mathbb{B}_{ij} v_j^{n+\frac{1}{2}}) \quad (42)$$

$$G_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2} \mathbb{Q}_{ij} \tau_i^{n+1} + \frac{1}{2} (\mathbb{C}_{ij} \tau_i^{n+1} + \mathbb{D}_{ij} \tau_j^{n+1}) \quad (43)$$

où $\mathbb{A}_{ij}, \mathbb{B}_{ij}, \mathbb{C}_{ij}, \mathbb{D}_{ij}$ sont des matrices à déterminer.

remarque 6.2. Pour des raisons de symétrie, les matrices $\mathbb{A}_{ij}, \mathbb{B}_{ij}, \mathbb{C}_{ij}$ et \mathbb{D}_{ij} vérifient les relations suivantes : $\mathbb{A}_{ji} = -\mathbb{A}_{ij}, \mathbb{B}_{ji} = -\mathbb{B}_{ij}, \mathbb{C}_{ji} = -\mathbb{C}_{ij}$ et $\mathbb{D}_{ji} = -\mathbb{D}_{ij}$. Le signe "-" provient du fait que l'on a $\vec{n}_{ji} = -\vec{n}_{ij}$ pour toute interface $\mathcal{T}_{ij} = \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_j$

Reste donc à calculer ces matrices. Pour ce faire, reprenons l'expression de la variation d'énergie et remplaçons l'expression des flux par leurs valeurs respectives. On a :

$$\Delta E = \Delta t \sum_{\substack{\text{interfaces} \\ \text{externes}}} l_{ij} ({}^t v_i^{n+\frac{1}{2}} (G_{ij}^{[n+\frac{1}{2}]} - \mathbb{Q}_{ij} \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]}) + {}^t \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} F_{ij}^{n+\frac{1}{2}}) \quad (44)$$

$$= \frac{\Delta t}{2} \sum_{\text{rflchissantes}} \text{interfaces} [l_{ij} (- {}^t v_i^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_{ij} \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} + {}^t v_i^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{C}_{ij} \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} + {}^t v_i^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{D}_{ij} \tau_j^{[n+\frac{1}{2}]} \quad (45)$$

$$+ {}^t \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} \mathbb{P}_{ij} v_i^{n+\frac{1}{2}} + {}^t \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} \mathbb{A}_{ij} v_i^{n+\frac{1}{2}} v_i^{n+\frac{1}{2}} + {}^t \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} \mathbb{B}_{ij} v_j^{n+\frac{1}{2}}) \quad (46)$$

$$+ {}^t \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} \mathbb{P}_{ji} v_j^{n+\frac{1}{2}} + {}^t \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} \mathbb{A}_{ji} v_j^{n+\frac{1}{2}} v_i^{n+\frac{1}{2}} + {}^t \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} \mathbb{B}_{ji} v_j^{n+\frac{1}{2}}) \quad (47)$$

$$+ l_{ji} (- {}^t v_j^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_{ji} \tau_j^{[n+\frac{1}{2}]} + {}^t v_j^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{C}_{ji} \tau_j^{[n+\frac{1}{2}]} + {}^t \tau_j^{[n+\frac{1}{2}]} \mathbb{D}_{ji} \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} \quad (48)$$

$$+ {}^t v_j^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_{ji} \tau_j^{[n+\frac{1}{2}]} + {}^t v_j^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{C}_{ji} \tau_j^{[n+\frac{1}{2}]} + {}^t \tau_j^{[n+\frac{1}{2}]} \mathbb{D}_{ji} \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} \quad (49)$$

$$+ {}^t \tau_j^{[n+\frac{1}{2}]} \mathbb{P}_{ji} v_j^{n+\frac{1}{2}} + {}^t \tau_j^{[n+\frac{1}{2}]} \mathbb{A}_{ji} v_j^{n+\frac{1}{2}} v_i^{n+\frac{1}{2}} + {}^t \tau_j^{[n+\frac{1}{2}]} \mathbb{B}_{ji} v_i^{n+\frac{1}{2}}) \quad (50)$$

$$+ {}^t \tau_j^{[n+\frac{1}{2}]} \mathbb{P}_{ji} v_j^{n+\frac{1}{2}} + {}^t \tau_j^{[n+\frac{1}{2}]} \mathbb{A}_{ji} v_j^{n+\frac{1}{2}} v_i^{n+\frac{1}{2}} + {}^t \tau_j^{[n+\frac{1}{2}]} \mathbb{B}_{ji} v_i^{n+\frac{1}{2}}) \quad (51)$$

$$= \frac{\Delta t}{2} \sum_{\text{rflchissantes}} \text{interfaces} l_{ij} ({}^t v_i^{n+\frac{1}{2}} ({}^t \mathbb{A}_{ij} + \mathbb{C}_{ij}) \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} + {}^t v_i^{n+\frac{1}{2}} (- {}^t \mathbb{B}_{ij} + \mathbb{D}_{ij}) \tau_j^{[n+\frac{1}{2}]} \quad (52)$$

$$- {}^t v_j^{n+\frac{1}{2}} ({}^t \mathbb{A}_{ij} + \mathbb{C}_{ij}) \tau_j^{[n+\frac{1}{2}]} - {}^t v_j^{n+\frac{1}{2}} (- {}^t \mathbb{B}_{ij} + \mathbb{D}_{ij}) \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]}) \quad (53)$$

Une condition suffisante de stabilité serait donc,

$${}^t \mathbb{A}_{ij} + \mathbb{C}_{ij} = 0 \quad (54)$$

$$- {}^t \mathbb{B}_{ij} + \mathbb{D}_{ij} = 0 \quad (55)$$

Plusieurs choix des matrices $\mathbb{A}_{ij}, \mathbb{B}_{ij}, \mathbb{C}_{ij}$ et \mathbb{D}_{ij} sont possibles conduisant chacune à une condition réfléchissante particulière. En voici quelques uns.

-Déplacement constant : Le champ de vitesse est nul sur la surface réfléchissante, alors que le champ de contrainte est complètement libre. Les flux F_{ij} doivent donc être nuls pour tous v_i et v_j . Ce qui implique $\mathbb{A}_{ij} = \mathbb{P}_{ij}$ et $\mathbb{B}_{ij} = 0$. On en déduit avec les relations (54) et (55) que $\mathbb{C}_{ij} = \mathbb{Q}_{ij}$ et $\mathbb{D}_{ij} = 0$. Les flux s'écrivent :

$$F_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = 0 \quad (56)$$

$$G_{ij}^{n+1} = \mathbb{Q}_{ij} \tau_i^{n+1} \quad (57)$$

-Surface complètement libre : Le tenseur de contrainte est nul sur la surface réfléchissante et le champ de vitesse est complètement libre. Les flux G_{ij} doivent donc être nuls pour tous v_i et v_j . Ce qui implique $\mathbb{C}_{ij} = -\mathbb{Q}_{ij}$ et $\mathbb{D}_{ij} = 0$. On en déduit avec les relations (54) et (55) que $\mathbb{A}_{ij} = \mathbb{P}_{ij}$ et $\mathbb{B}_{ij} = 0$. Les flux s'écrivent donc,

$$F_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbb{P}_{ij} v_i^{n+\frac{1}{2}} \quad (58)$$

$$G_{ij}^{n+1} = 0 \quad (59)$$

6.6 La faille horizontale

On suppose qu'il existe une faille horizontale dans le domaine, donc la normale sur ce segment est $\vec{n}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{n}_{z_{ij}} \end{pmatrix}$, on applique la formule qu'on a trouvé pour la variation d'énergie discrète totale, on trouve l'expression ci-dessous :

$$\Delta E^n = \frac{\Delta t}{2} \sum_{i,j \in \Gamma} l_{ij} \{ \sigma_{xz_i}^{[n+\frac{1}{2}]} v_{x-j}^{n+\frac{1}{2}} + [T_i^{[n+\frac{1}{2}]} - T_i'^{[n+\frac{1}{2}]}] v_{z_j}^{n+\frac{1}{2}} + \sigma_{xz_j}^{[n+\frac{1}{2}]} v_{x_i}^{n+\frac{1}{2}} + [T_j^{[n+\frac{1}{2}]} - T_j'^{[n+\frac{1}{2}]}] v_{z_i}^{n+\frac{1}{2}} \} n_{z_{ij}}$$

Pour la simplifier, on omet l'indice temporel et on la considère comme une formule de conservation d'énergie :

$$\sum_{i,j \in \Gamma} [\sigma_{xz_i} v_{x_j} + (T_i - T_i') v_{z_j} + \sigma_{xz_j} v_{x_i} + (T_j - T_j') v_{z_i}] n_{z_{ij}} = 0$$

Nous avons vu que les flux à travers une interface quelconque du domaine sont donnés par la moyenne de valeurs des champs situés de part et d'autre de cette interface. Ce raisonnement n'est plus valable lorsque cette dernière coïncide avec la surface de la faille. En effet, les champs ou plus précisément quelques composantes de ces champs-pouvant subir des discontinuités à travers la surface de la faille, il n'est plus concevable de considérer que les flux à travers la surface de la faille résultent d'une égale contribution des champs de chaque côté de l'interface en question. Afin de tenir compte de ces discontinuités, on va considérer les flux nouveaux Φ_{ij^*} et Φ_{ji^*} .

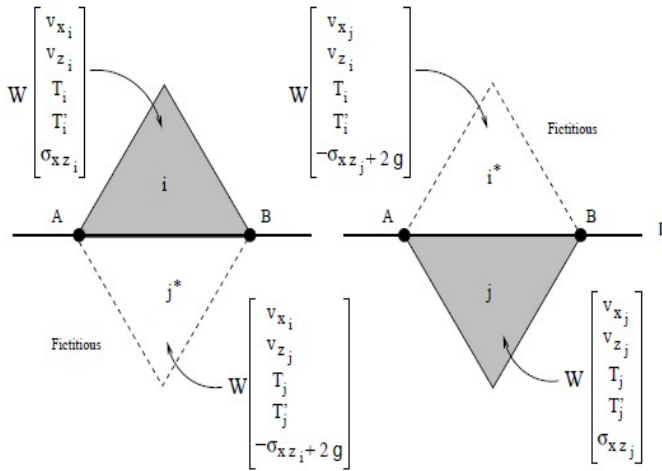


FIGURE 2 – 2 cellules contiguës qui se trouvent en haut et en bas de la faille $\Gamma, [AB]$ représente la même interface horizontale entre \mathcal{T}_i et \mathcal{T}_j , la ligne pointillée représente la cellule fictive

Pour que la conservation d'énergie soit respectée, les nouveaux flux doivent satisfaire une condition :

$$\Delta E_{ji^*}^n + \Delta E_{ij^*}^n = 0 \quad (60)$$

En d'autres termes, c'est l'égalité suivante :

$$\sigma_{xz_i^*} v_{x_j} + (T_i^* - T_i') + \sigma_{xz_j} v_{x_i^*} + (T_j - T_j') v_{z_i^*} - \quad (61)$$

$$[\sigma_{xz_i} v_{x_j^*} + (T_i - T_i') v_{z_j^*} + \sigma_{xz_j^*} v_{x_i} + (T_{j^*} - T_{j^*}') v_{z_i}] = 0 \quad (62)$$

Comme on est dans le mode plan, la composante normale de la vitesse doit être continue, tandis que la composante tangentielle doit être discontinue. Cela conduit aux définitions des variables locales de la cellule fictive :

$$v_{x_{j^*}} = v_{x_i} \quad (63)$$

$$v_{z_{j^*}} = v_{z_j} \quad (64)$$

$$T_{j^*} = T_j \quad (65)$$

$$T_{j^*}' = T_j' \quad (66)$$

$$\sigma_{xz_{j^*}} = -\sigma_{xz_i} \quad (67)$$

Cette définition permet la conservation d'énergie, et pour que ces définitions vérifient en plus la condition aux limites sur la faille (8), on modifie la dernière équation sous la forme :

$$\sigma_{xz_{j^*}} = -\sigma_{xz_i} + 2g \quad (68)$$

Où g ici est considéré comme la moyenne de la contrainte tangentielle à travers la faille. Il y a un facteur 2 parce qu'on applique le schéma centré.

Enfin on trouve le nouveau flux Φ_{ij^*} à travers l'interface \mathcal{T}_{ij} :

$$\Phi_{v_{x_{ij^*}}} = \frac{T_i + T_j + T_i' + T_j'}{2} + g n_{z_{ij}} \quad (69)$$

$$\Phi_{v_{z_{ij^*}}} = g n_{x_{ij}} + \frac{T_i + T_j - T_i' - T_j'}{2} n_{z_{ij}} \quad (70)$$

$$\Phi_{T_{ij^*}} = v_{x_i} n_{x_{ij}} + \frac{v_{z_i} + v_{z_j}}{2} n_{z_{ij}} \quad (71)$$

$$\Phi_{T_{ij^*}'} = v_{x_i} n_{x_{ij}} - \frac{v_{z_i} + v_{z_j}}{2} \quad (72)$$

$$\Phi_{\sigma_{xz_{ij^*}}} = \frac{v_{z_i} + v_{z_j}}{2} n_{x_{ij}} + v_{x_i} n_{z_{ij}} \quad (73)$$

On a donc trouvé la formule pour le flux à travers la faille horizontale.

6.7 Rupture dynamique avec un critère de seuil pour la contrainte

Pour déterminer la condition de contrainte sur la faille, on applique une loi dite "loi d'affaiblissement par frottement" (slip-weakening friction law en anglais) :

$$g = \begin{cases} \tau_u - (\tau_u - \tau_f) \frac{\mathcal{U}}{\delta_0} & \text{si } 0 \leq \mathcal{U} \leq \delta_0 \\ \tau_f & \text{si } \mathcal{U} \geq \delta_0 \end{cases} \quad (74)$$

où g est le coefficient de frottement, τ_u est un seuil de frottement statique et δ_0 est un glissement critique pour atteindre un niveau de frottement résiduel stationnaire τ_f .

La contrainte tangentielle sur la faille est toujours inférieure à τ_c , et elle satisfait toujours une condition de jump up sur la surface de la faille :

$$\tau \leq g \quad (75)$$

$$(\tau - g)\mathcal{V} = 0 \quad (76)$$

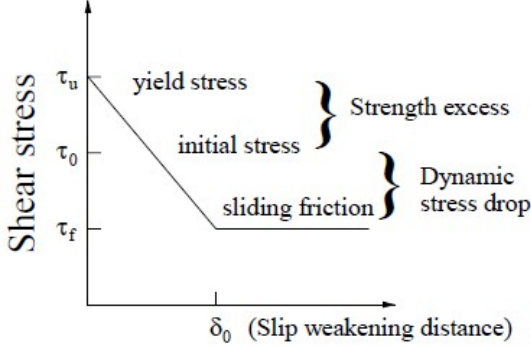


FIGURE 3 – loi d'affaiblissement par frottement

La condition aux limites(8) est en fait restrictive, dans le sens où elle ne s'applique que pour des points ayant une vitesse tangentielle non nulle. Une façon plus générale pour écrire les conditions aux limites sur la faille peut être donnée en terme d'inégalité au lieu de l'égalité mentionnée précédemment. Ainsi, nous écrivons plus généralement la condition aux limites sur la faille comme suit :

$$||\vec{T}_T|| \leq g \quad \text{sur} \quad \Sigma_f \quad (77)$$

où $\Sigma_f = \lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma(t)$ désigne l'étendue maximale de la faille. Examinons maintenant les deux cas de figure induits par cette inégalité.

i) $||\vec{T}_T|| < g$ sur Σ_f

Dans le cas où l'inégalité est stricte, les tractions tangentielles appliquées à la surface de la faille sont strictement inférieures aux forces de frottement. La discontinuité des composantes tangentielles de la vitesse à travers la surface de la faille sur laquelle s'appliquent ces tractions doit donc être nulle. En d'autres termes, il faut que la vitesse de glissement à travers cette surface soit nulle. Cette dernière est définie par

$$V(t, \vec{x}) := ||[\vec{v}_T(t, \vec{x})]|| = ||\vec{v}_T^+(t, \vec{x}) - \vec{v}_T^-(t, \vec{x})|| \quad (78)$$

avec

$$\vec{v}_T^\pm = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \vec{v}_T(t, \vec{x} \pm \epsilon \vec{n}(\vec{x})) \quad (79)$$

et

$$\vec{v}_T = \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{n} \quad (80)$$

Ainsi, dans le cas où $||\vec{T}_T|| < g$ sur Σ_f , l'égalité suivante doit être vérifiée

$$[\vec{v}_T(t, \vec{x})] = \vec{0} \quad (81)$$

Ce cas de figure peut se produire lorsque la rupture dynamique n'a pas encore atteint le point considéré, ou bien lors de la phase d'arrêt, lorsque la faille atteint une longueur maximale au-delà de laquelle elle ne peut plus progresser (c'est à dire Σ_f).

(ii) $\|\vec{T}_T\| = g$ sur Σ_f

Lorsque les tractions en un point donné de la surface de la faille atteignent la résistance maximale du matériau, ce dernier cède permettant à la rupture de progresser. La manière selon laquelle les tractions évoluent au point considéré est déterminée par la fonction g . Dans notre cas, nous avons choisi la "loi d'affaiblissement" donnée par :

$$g(U) = \max[\tau_u - (\tau_u - \tau_f) \frac{U}{\Delta_c}, \tau_f] \quad (82)$$

où U désigne la fonction glissement, définie par :

$$U(t, \vec{x}) := \int_0^t V(s, \vec{x}) ds \quad (83)$$

$$= \int_0^t \|[\vec{v}_T(s, \vec{x})]\| ds \quad (84)$$

Le glissement et la vitesse de glissement dans ce cas sont donc non nuls.

6.8 Cas des volumes finis

Afin de déterminer la fonction \vec{T}_T vérifiant les critères cités ci dessus, et pour mieux comprendre la démarche que nous allons suivre, nous développons l'expression de la vitesse (24) et trouvons la forme ci-dessous :

$$v_i^{n+\frac{1}{2}} = v_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\rho_i \mathcal{A}_i} \sum_{k \in V(i)} l_{ik} \mathbb{Q}_{ik} \frac{\tau_i^n + \tau_k^n}{2} \quad (85)$$

ou encore

$$v_i^{n+\frac{1}{2}} = v_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\rho_i \mathcal{A}_i} \sum_{k \in V(i), \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_k \not\subset \Gamma} l_{ik} \mathbb{Q}_{ik} \frac{\tau_i^n + \tau_k^n}{2} + \frac{\Delta t}{\rho \mathcal{A}_i} \sum_{k \in V(i), \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_k \subset \Gamma} l_{ik} \vec{T}_{ik} \quad (86)$$

Notons \vec{R}_i^n la quantité

$$\vec{R}_i^n = \frac{\Delta t}{\rho_i \mathcal{A}_i} \sum_{k \in V(i), \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_k \not\subset \Gamma} l_{ik} \mathbb{Q}_{ik} \frac{\tau_i^n + \tau_k^n}{2} \quad (87)$$

l'équation (86) s'écrit alors :

$$v_i^{n+\frac{1}{2}} = v_i^{n-\frac{1}{2}} + \vec{R}_i^n + \frac{\Delta t}{\rho \mathcal{A}_i} l_{ik} \vec{T}_{ik}$$

avec $k \in V(i)$ tel que $\mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_k \subset \Gamma$. Rappelons qu'à ce stade, il n'est pas certain que la partie tangentielle de \vec{T}_{ik} vérifie l'inégalité (77).

Calculons maintenant la discontinuité de la composante tangentielle de la vitesse à travers $\mathcal{T}_{ik} \subset \Gamma$. Nous avons par

$$[[v_T^{n+\frac{1}{2}}]] := v_{iT}^{n+\frac{1}{2}} - v_{kT}^{n+\frac{1}{2}} \quad (88)$$

$$= [[v_T^{n-\frac{1}{2}}]] + \vec{R}_{iT}^n - \vec{R}_{kT}^n + \Delta t l_{ik} \left(\frac{1}{\rho_i \mathcal{A}_i} + \frac{1}{\rho_k \mathcal{A}_k} \right) \vec{T}_{ikT}^n \quad (89)$$

Notons \vec{T}_{ikT}^n le vecteur défini par

$$\vec{T}_{ikT}^n = \frac{(-[[v_T^{n-\frac{1}{2}}]] - \vec{R}_{iT}^n + \vec{R}_{kT}^n) \rho_i \rho_k \mathcal{A}_i \mathcal{A}_k}{\Delta t l_{ik} (\rho_i \mathcal{A}_i + \rho_k \mathcal{A}_k)} \quad (90)$$

Ce vecteur correspond en fait à la traction "fictive" nécessaire pour assurer la continuité de la vitesse tangentielle sur la faille. Or la condition aux limites(77) impose que la norme du vecteur traction soit borné par la fonction g. Nous définissons donc le vecteur traction par

$$\vec{T}_{ikT}^n = \begin{cases} \vec{T}_{ikT}^n & si \quad \|\vec{T}_{ikT}^n\| < g(U^n) \\ \frac{\vec{T}_{ikT}^n}{\|\vec{T}_{ikT}^n\|} g(U^n) & si \quad \|\vec{T}_{ikT}^n\| \geq g(U^n) \end{cases} \quad (91)$$

Ce choix respecte bien la condition aux limites(77) puisque le module des tractions tangentielles reste toujours inférieur ou égal à la valeur g, mais assure aussi la continuité des vitesses tangentielles si l'inégalité dans l'expression(77) est stricte.

remarque 6.3. L'expression de \vec{T}_{ikT}^n est complètement explicite puisque, à l'instant n, le vecteur $v_T^{n-\frac{1}{2}}$ est connu, et ainsi donc le glissement U^n peut être calculé via l'équation(89) par

$$U^n = U^{n-1} + \Delta t \|[[v_T^{n-\frac{1}{2}}]]\| \quad (92)$$

Finalement, le flux G_{ik} sur la faille est donnée par

$$G_{ik}^n = G_{ikN}^n + \vec{T}_{ikT}^n \quad (93)$$

avec

$$G_{ikN}^n = \vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t \mathbb{Q}_{ik} \frac{\tau_i^n + \tau_k^n}{2} \quad (94)$$

et \vec{T}_{ikT}^n est le vecteur donné par (91)

7 Résultats numériques

Pendant ce stage, j'ai développé un code en volumes finis qui ne peut utiliser que des maillages rectangulaires. Donc pour la suite, tous les simulations en volumes finis sont réalisés avec un maillage rectangulaire.

Nous présentons dans cette section d'abord des snapshots des résultats que nous avons obtenus avec une source cinématique. Puis nous présentons quelques tests afin de valider notre méthode. Enfin nous présentons des snapshots que nous avons obtenus avec la source dynamique.

7.1 Input

Voici les valeurs de la vitesse des ondes P v_p , de la vitesse des ondes S v_s et de la masse volumique ρ que nous avons appliquées pour tous les tests après.

v_p	3600 m/s
v_s	2100 m/s
ρ	2500 kg/m ³

Pour la comparaison entre les méthodes différences finies et les méthodes volumes finis, nous avons créé d'abord le maillage 1. Puis nous avons créé le maillage 2 qui est 2 fois plus fin que le maillage 1 et le maillage 3 qui est encore 2 fois plus fin que le maillage 2. Tous les maillages sont des maillages rectangulaires.

taille du domaine	$[-800,800] \times [-1800,0]$ m
nombre d'itérations	5000
maillage 1	
taille d'une cellule	5m
nombre de noeuds	115881
nombre d'éléments	115200
maillage 2	
pas du cellule	2.5m
nombre de noeuds	462161
nombre d'éléments	460800
maillage 3	
pas du cellule	1.25m
nombre de noeuds	1845921
nombre d'éléments	1843200

- Comme le maillage que nous utilisons est un maillage rectangulaire. Il est facile de créer le même maillage pour le code des différences finies. C'est important parce que nous avons fait aussi une comparaison du temps de calcul après. Pour faire cette comparaison, il vaut mieux que les 2 méthodes utilise les mêmes maillages.
- Vous pouvez voir que le nombre de noeuds et d'éléments du maillage sont très grands. Donc on a besoin du cluster Dogger qui est le cluster du BRGM pour faire ces tests. Le cluster du BRGM a une mémoire assez grande pour faire ce calcul. Et il met moins de

temps pour calculer.

7.2 Le pas de temps

Comme nous utilisons 3 maillages structurés, nous appliquons la condition CFL :

$$v_p \Delta t \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta z^2}} \leq 1$$

où $v_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ est la vitesse de l'onde de pression P

Donc on trouve la condition sur le pas de temps pour les 3 maillages : $\Delta t \leq 2.4552 \times 10^{-4}$ s.
Et nous avons pris $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$ s pour tous les tests qui suivent.

7.3 Source cinématique

Dans ce test, nous utilisons le maillage 2 et mettons une source cinématique au point (1.875,-1000.625)m. Tant que le temps total est inférieur ou égal à 0.0625s, on ajoute un terme au niveau du point source à v_x qui est la vitesse horizontale et v_z qui est la vitesse verticale pour chaque itération :

$$\begin{aligned} v_x &= v_x + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) * \sin(32 * \pi * time) * dt \\ v_z &= v_z + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) * \sin(32 * \pi * time) * dt \end{aligned}$$

où dt est le pas de temps, et le $time$ est le temps écoulé depuis le début.

Voici les snapshots de v_x et v_z aux 6 instants pour la simulation en volumes finis avec un maillage tel que le pas du maillage est 1.25m :

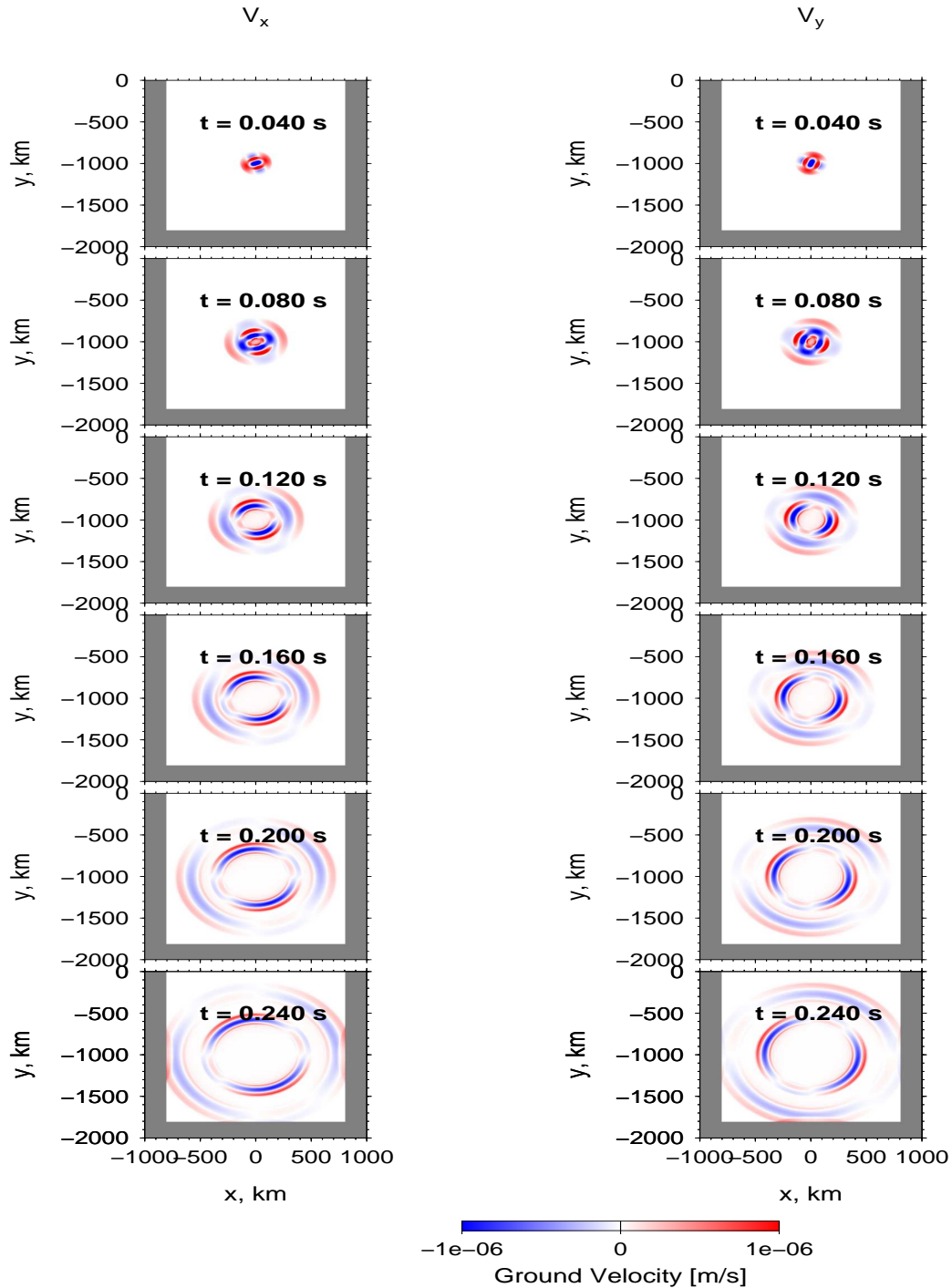


FIGURE 4 – Snapshots avec pas du maillage=1.25m

Remarque Sur la figure 4, on voit qu'il y a l'apparition de l'onde P et de l'onde S. Les ondes qui ont une magnitude plus grande et se trouvent plus proche de la source sont les ondes S. Et les ondes qui propagent plus rapidement sont les ondes P.

7.4 Comparaison avec la méthode des différences finies

Pour faire la comparaison, nous plaçons une source cinématique dans le domaine. Puis nous mettons 6 récepteurs du signal autour de la source. Enfin nous présentons la comparaison des résultats des 2 méthodes sur chaque récepteur avec différents maillages. Enfin on parlera aussi de la comparaison du temps de calcul des 2 méthodes.

La méthode des différences finies utilise un schéma d'ordre 8 en espace et 2 en temps, et la méthode des volumes finis que nous étudions utilise un schéma d'ordre 2 en espace et 2 en temps. Normalement la solution en différences finies est plus précise que celle en volumes finis dans notre test. En plus, on a fait une condition réfléchissante à la surface libre et une condition absorbante aux autres bords pour le code des différences finies, mais on a fait une condition réfléchissante sur les 4 bords pour le code des volumes finis. Donc on peut avoir une grande différence entre la solution en volumes finis et la solution en différences finies parce qu'il y a une onde réfléchie.

Pour les 3 tests, nous mettons toujours une source cinématique identique à la source qu'on a décrite dans la section précédente. Par contre, en volumes finis on ne peut que choisir un point centre d'une cellule comme point source. Et pour chaque point source, on met 3 récepteurs qui se trouvent sur le même axe horizontal et 3 récepteurs qui se trouvent sur le même axe vertical. Donc les positions des points sources et des récepteurs dans chaque test sont différentes.

Test 1 Dans ce test, nous utilisons le maillage 1 et voici les positions de la source et des récepteurs.

position de la source	(-7.5,-1002.5)m
position du récepteur1	(-7.5, -900)m
position du récepteur2	(-7.5, -800)m
position du récepteur3	(-7.5, -700)m
position du récepteur4	(100, -1002.5)m
position du récepteur5	(200, -1002.5)m
position du récepteur6	(300, -1002.5)m

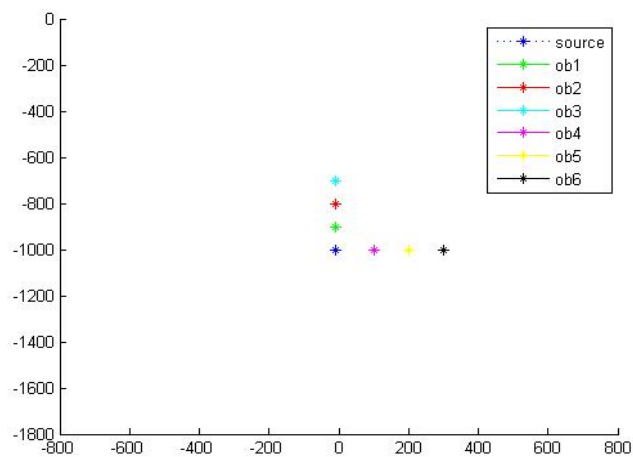
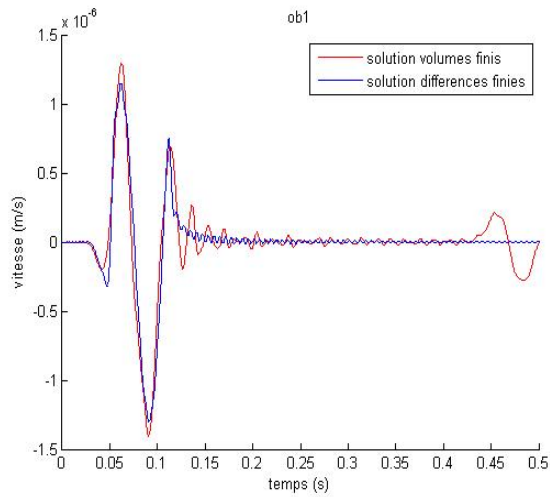
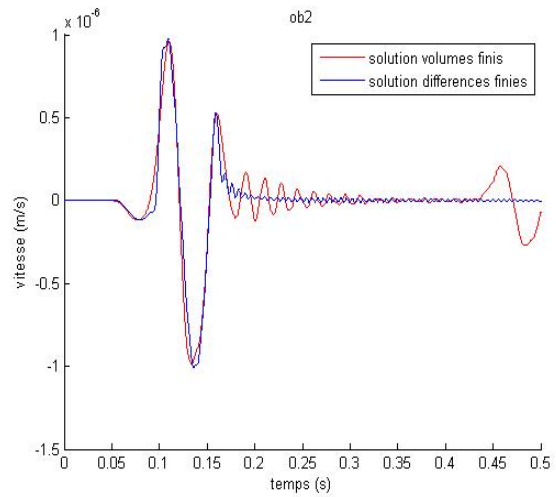


FIGURE 5 – Position des sources et récepteurs

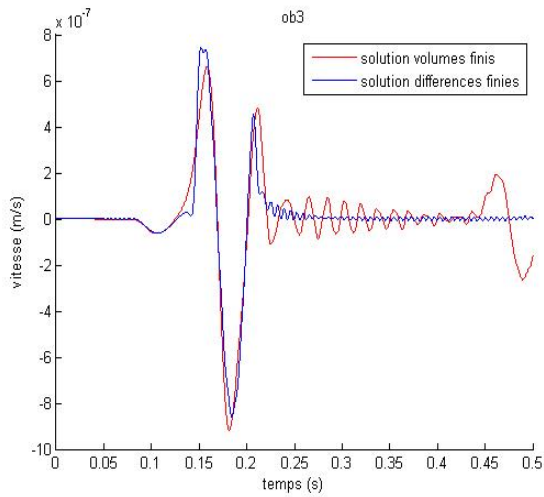
Sur la Figure 5, on peut voir la position de la source et la position des récepteurs. Dans la suite, nous présentons les sismogrammes de v_x et v_z sur les 6 récepteurs.



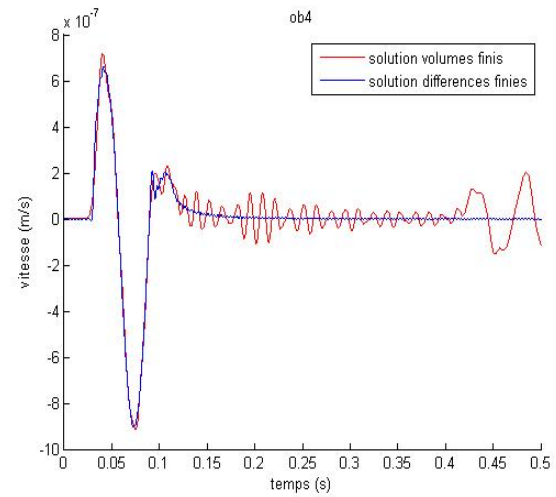
(a) ob1



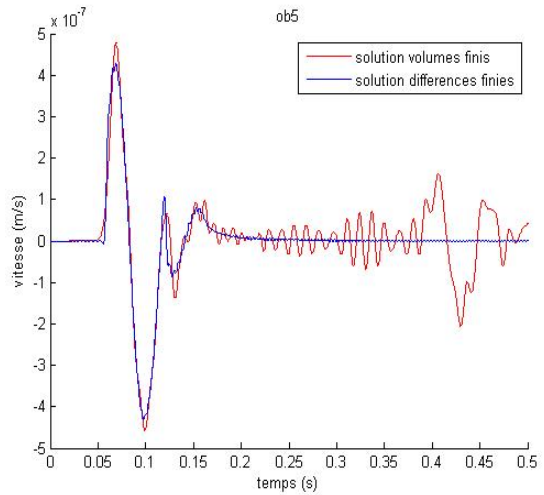
(b) ob2



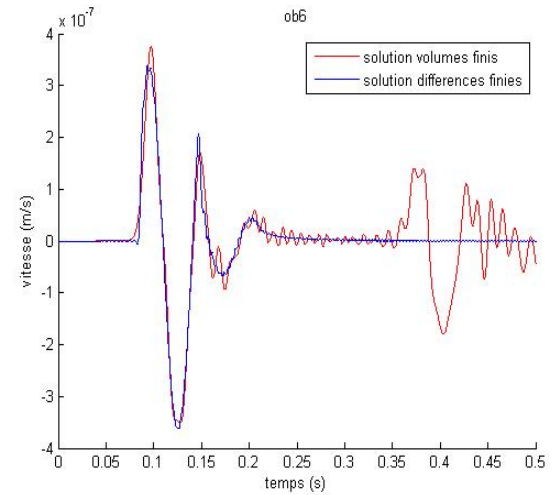
(c) ob3



(d) ob4

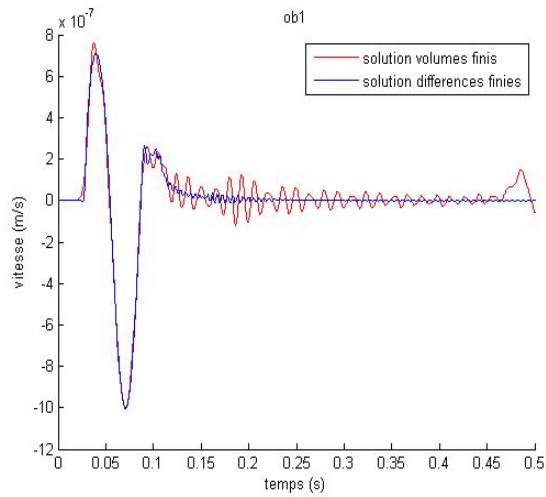


(e) ob5

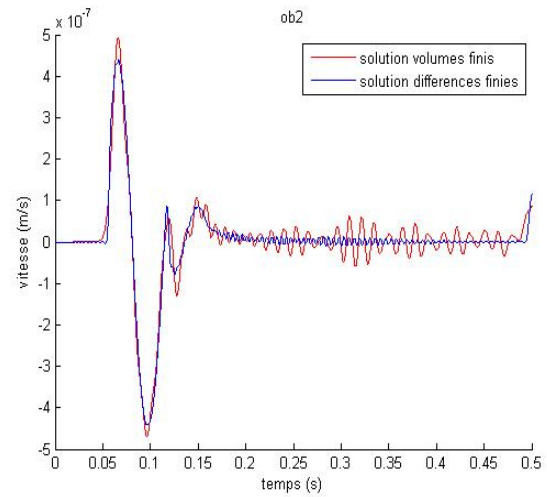


(f) ob6

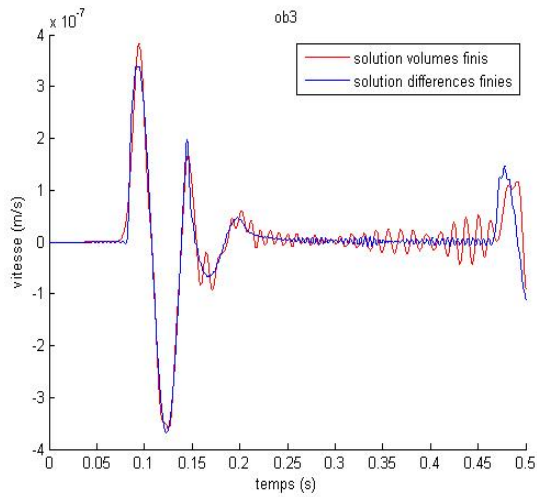
FIGURE 6 – comparaison des vitesses horizontales obtenues avec la méthode des volumes finis(rouge) et la méthode des différences finies(en bleu) avec pas du maillage = 5m



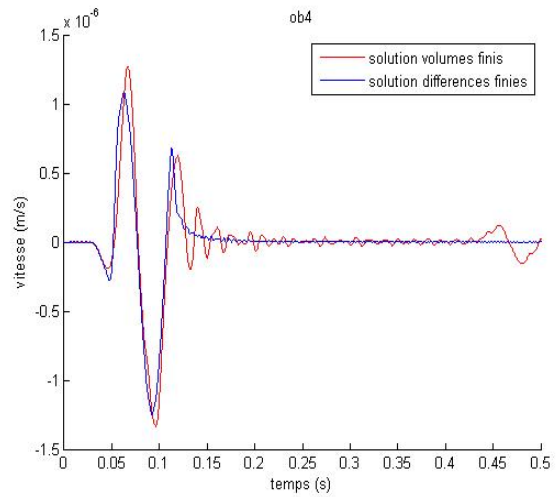
(a) ob1



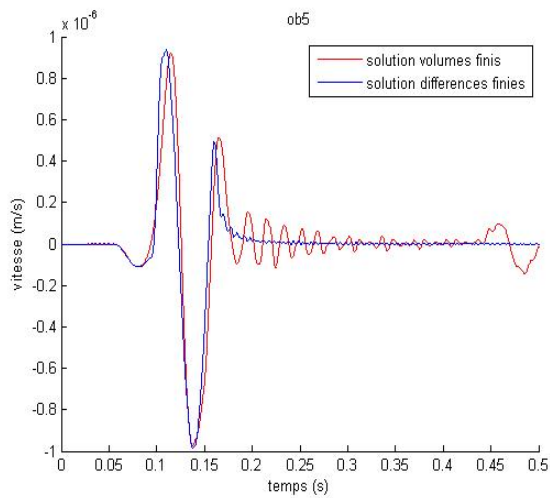
(b) ob2



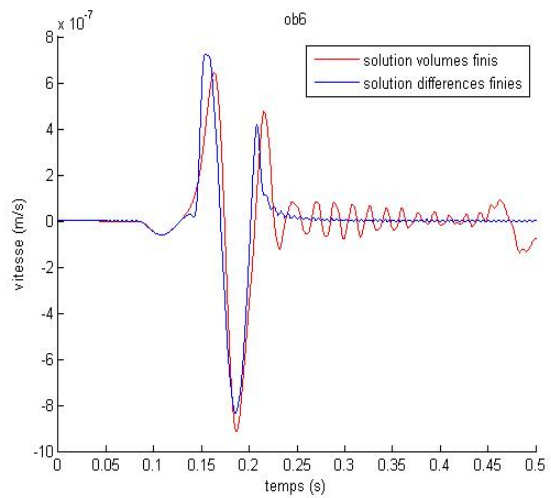
(c) ob3



(d) ob4



(e) ob5



(f) ob6

FIGURE 7 – comparaison des vitesses verticales obtenues avec la méthode des volumes finis(rouge) et la méthode des différences finies(en bleu) avec pas du maillage = 5m

Remarque

1. On voit sur chaque figure que pour la solution en volumes finis, il y a des ondes réfléchies qui reviennent sur les récepteurs.
2. On remarque qu'il y a des ondes réfléchies même pour la solution en différences finies sur les Figures 7(b) et 7(c). C'est parce que on a fait une condition réfléchissante à la surface libre pour le code des différences finies.

Test 2 Dans ce test, nous utilisons le maillage 2 et voici les positions de la source et des récepteurs.

position de la source	(1.25,-1003.75)m
position du ob1	(100, -1003.75)m
position du ob2	(200, -1003.75)m
position du ob3	(300, -1003.75)m
position du ob4	(1.25, -900)m
position du ob5	(1.25, -800)m
position du ob6	(1.25, -700)m

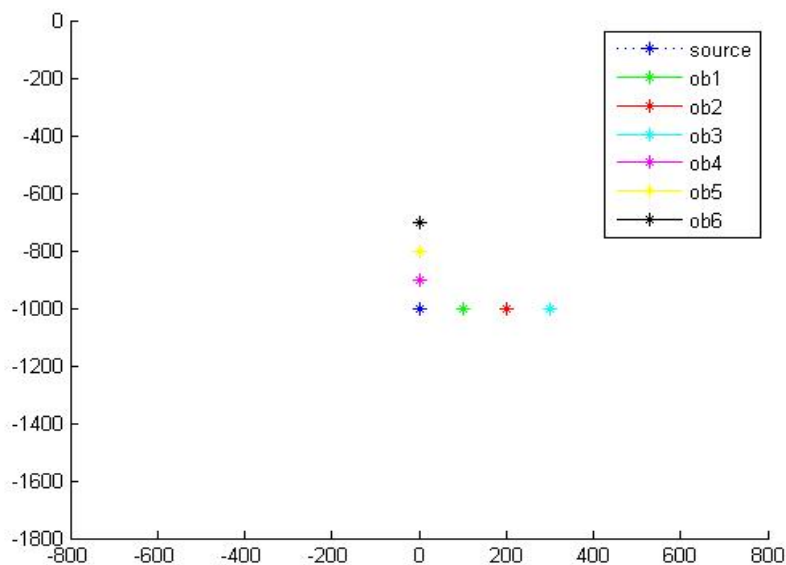
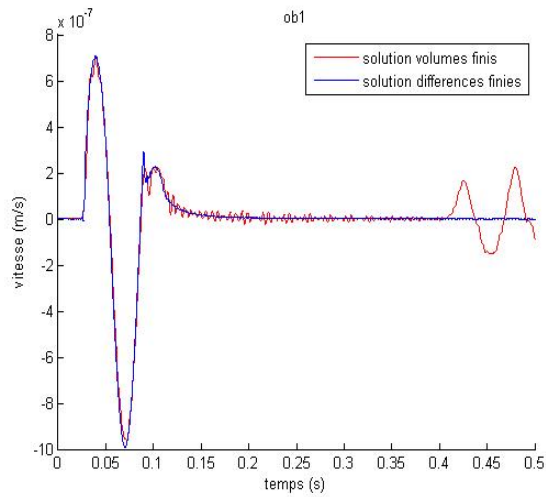
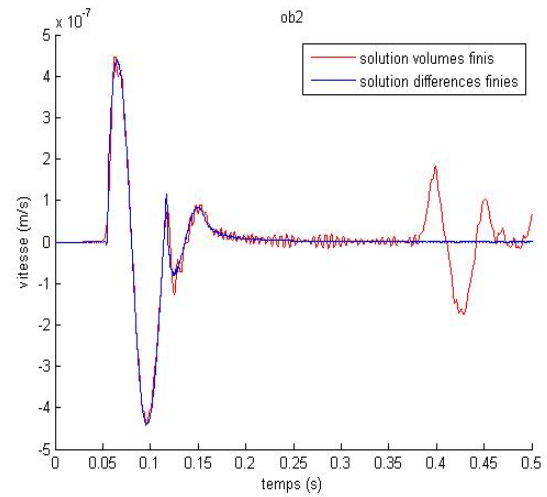


FIGURE 8 – Position des sources et récepteurs

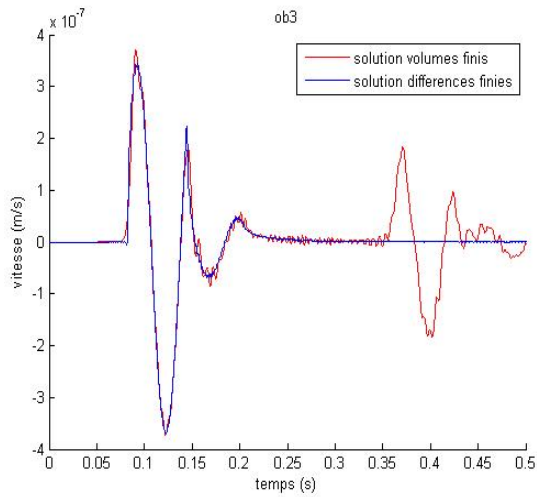
Voici les sismogrammes de v_x et v_z sur les 6 récepteurs.



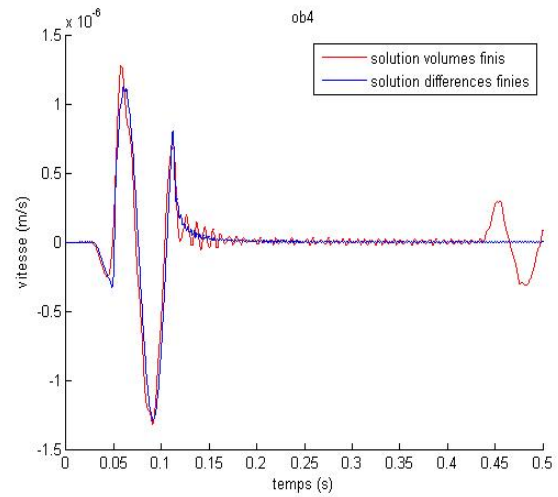
(a) ob1



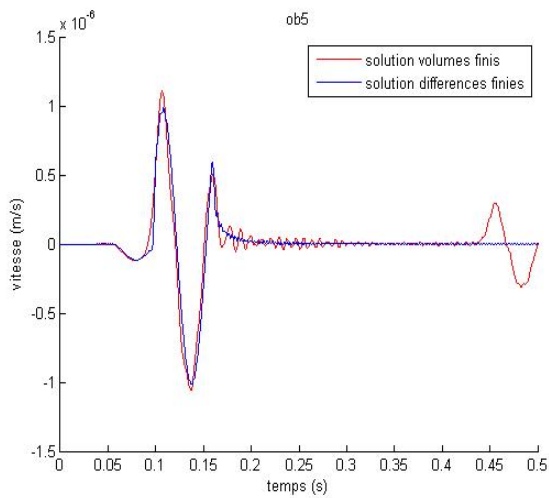
(b) ob2



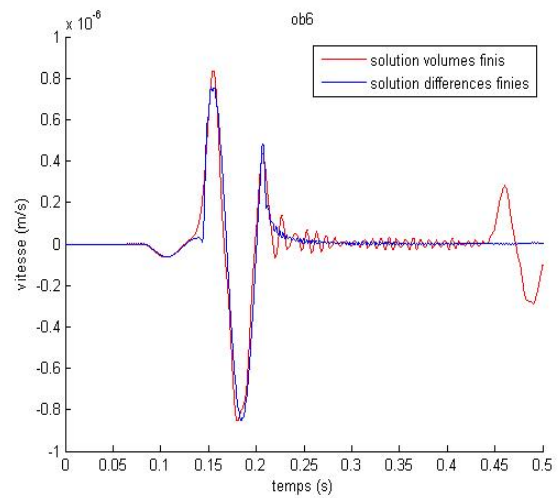
(c) ob3



(d) ob4

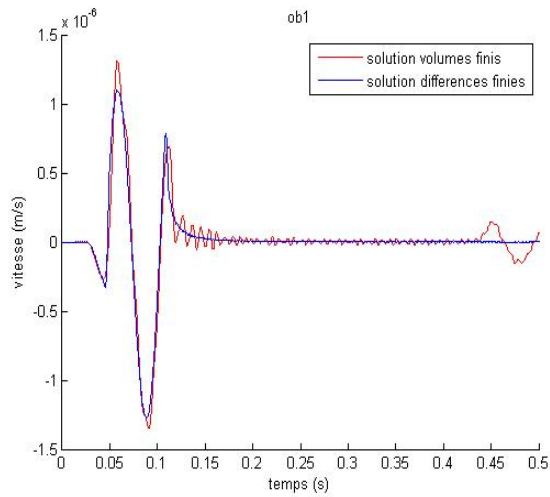


(e) ob5

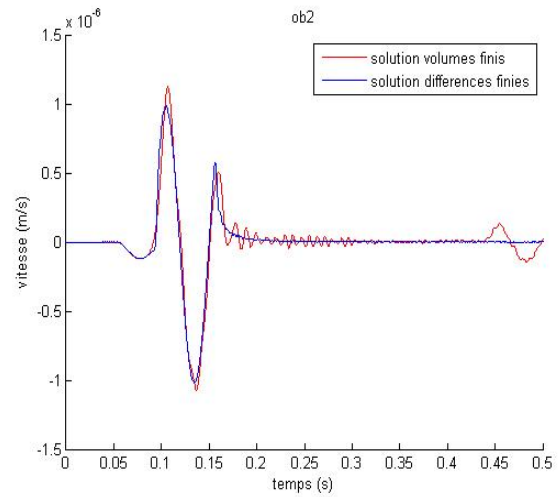


(f) ob6

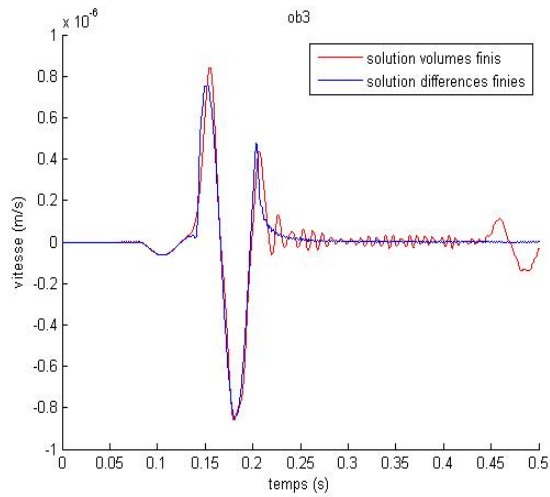
FIGURE 9 – comparaison des vitesses horizontales obtenues avec la méthode des volumes finis(rouge) et la méthode des différences finies(en bleu) avec pas du maillage = 2.5m



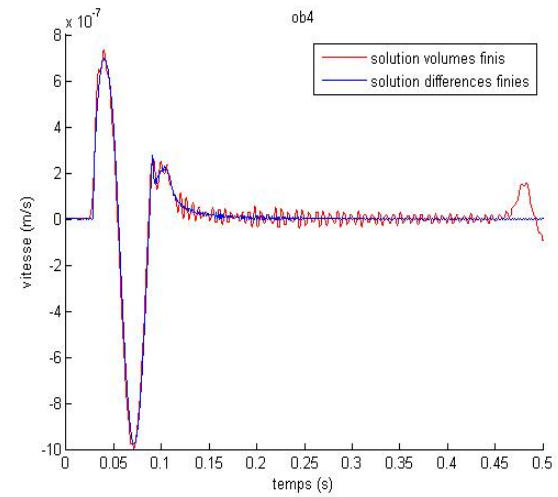
(a) ob1



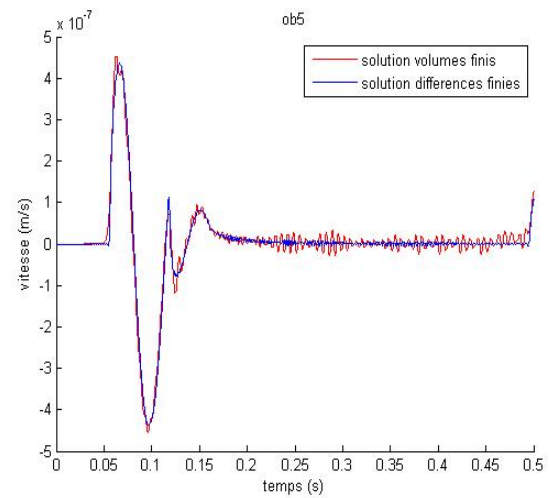
(b) ob2



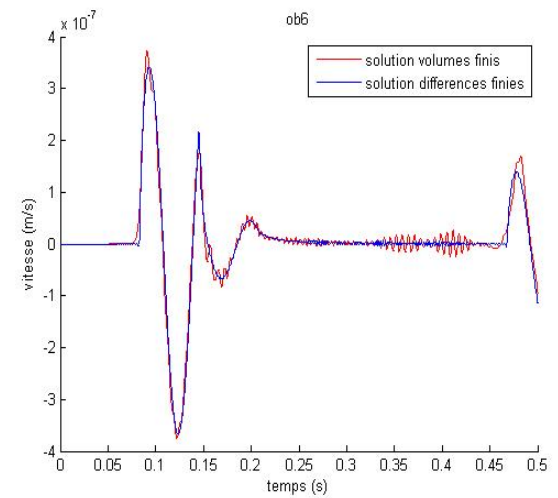
(c) ob3



(d) ob4



(e) ob5



(f) ob6

FIGURE 10 – comparaison des vitesses verticales obtenues avec la méthode des volumes finis(rouge) et la méthode des différences finies(en bleu) avec pas du maillage = 2.5m

Remarque

1. On voit que la solution en volumes finis est plus proche de celle en différences finies par rapport au test précédent, c'est parce que on a utilisé un maillage 2 fois plus fin.
2. il y a des ondes réfléchies pour la solution en volumes finis sur chaque récepteur et il y a aussi des ondes réfléchies pour la solution en différence finies sur quelques récepteurs proches de la surface libre.

Test 3 Dans ce test, nous utilisons le maillage 3 et voici les positions de la source et des récepteurs.

position de la source	(1.875,-1000.625)m
position du ob1	(100, -1000.625)m
position du ob2	(200, -1000.625)m
position du ob3	(300, -1000.625)m
position du ob4	(1.875, -900)m
position du ob5	(1.875, -800)m
position du ob6	(1.875, -700)m

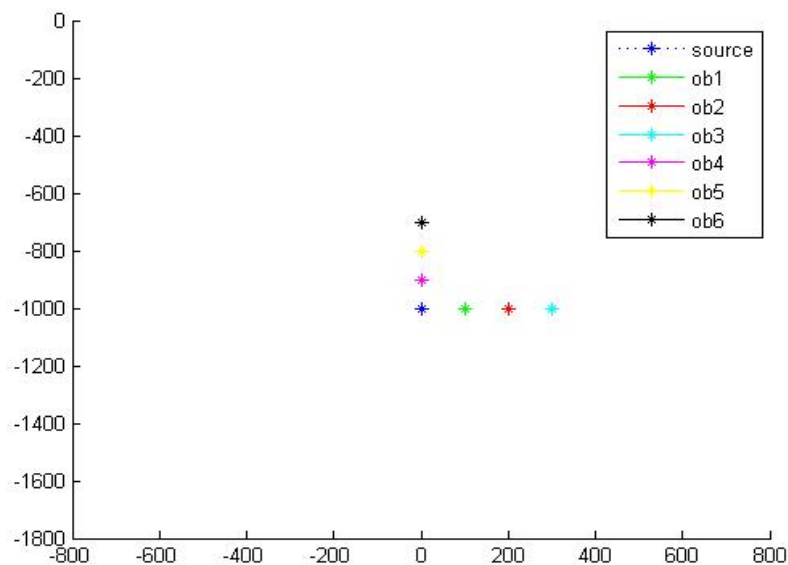
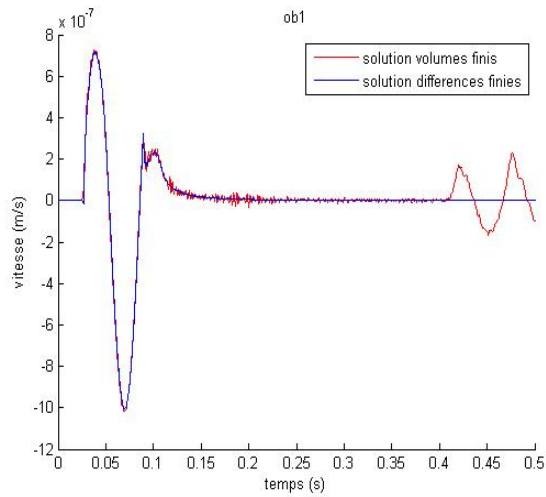
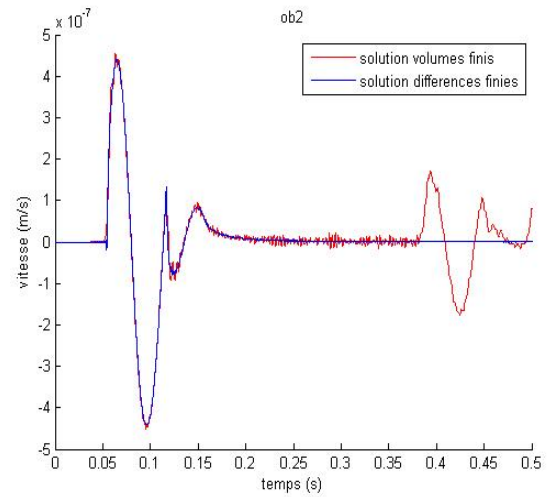


FIGURE 11 – Position des sources et récepteurs

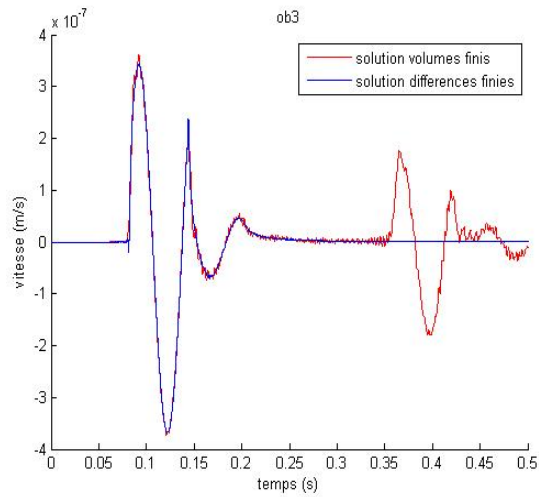
Voici les sismogrammes de v_x et v_z sur les 6 récepteurs.



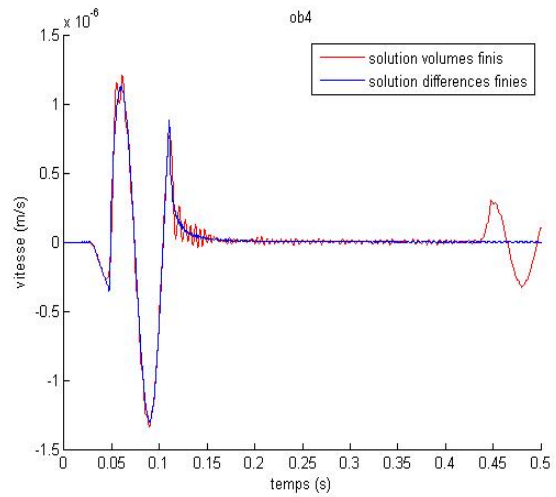
(a) ob1



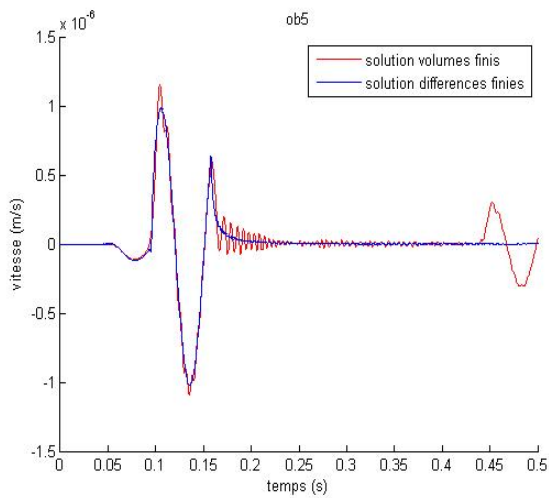
(b) ob2



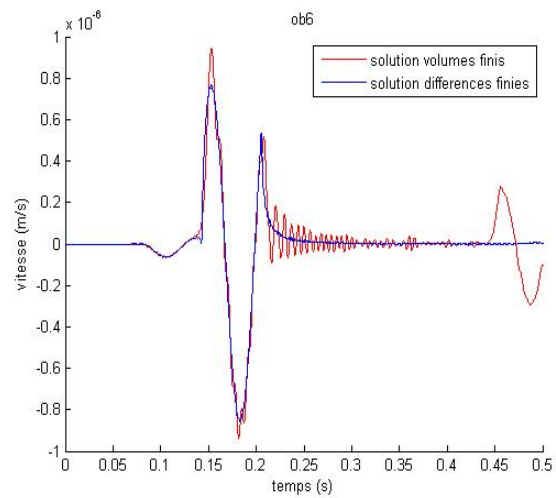
(c) ob3



(d) ob4

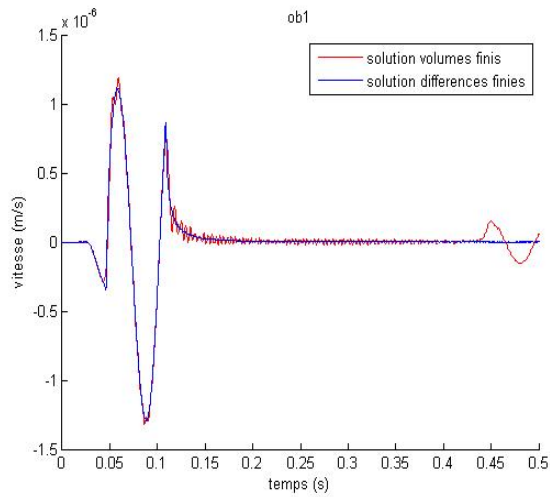


(e) ob5

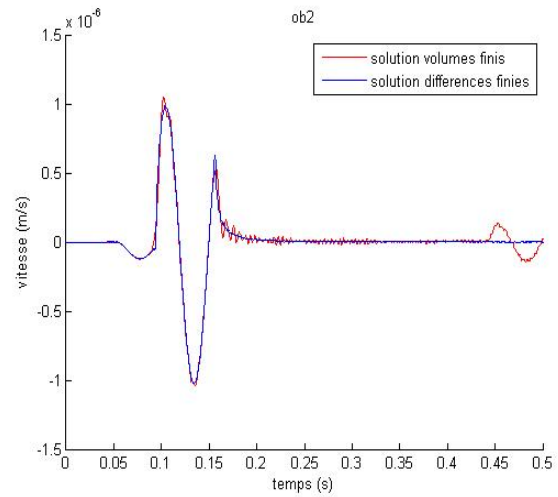


(f) ob6

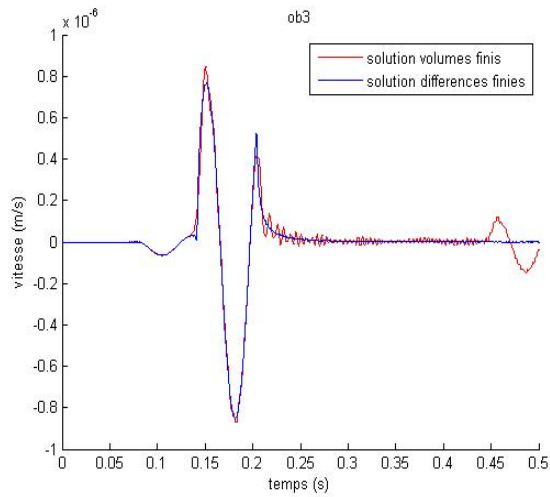
FIGURE 12 – comparaison des vitesses horizontales obtenues avec la méthode des volumes finis(rouge) et la méthode des différences finies(en bleu) avec pas du maillage = 1.25m



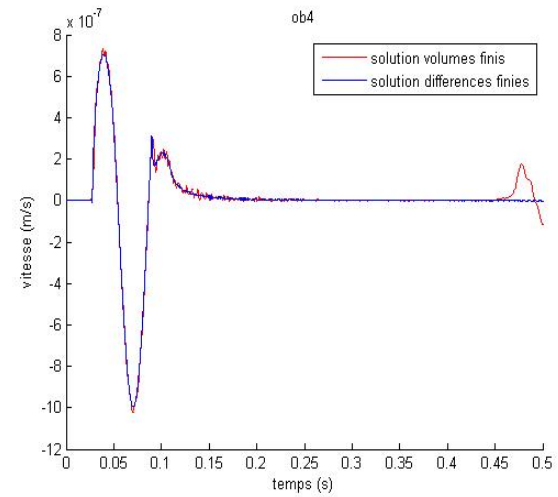
(a) ob1



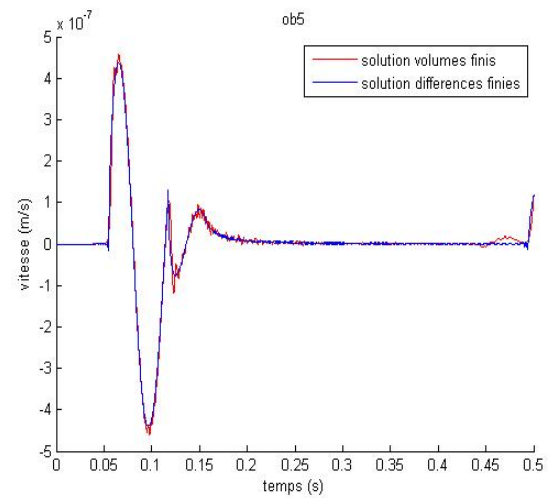
(b) ob2



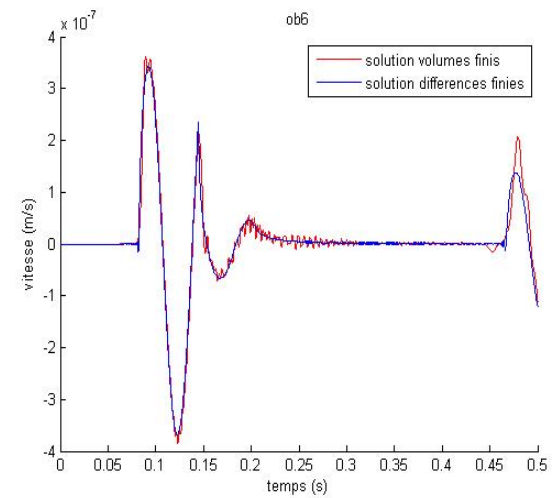
(c) ob3



(d) ob4



(e) ob5



(f) ob6

FIGURE 13 – comparaison des vitesses verticales obtenues avec la méthode des volumes finis(rouge) et la méthode des différences finies(en bleu) avec pas du maillage = 1.25m

1. Quand on raffine le maillage, la solution en volumes finis est de plus en plus proche de celle en différences finies. Et pour les récepteurs qui sont proches de la surface libre, la solution en volumes finis et la solution en différences finies sont presque identiques.
2. L'ordre de précision du code des différences finies est plus élevé que l'ordre de précision du code des volumes finis. L'oscillation de la solution en volumes finis est donc plus forte que celle en différences finies.

7.4.1 Fonction readmesh

Pour pouvoir utiliser le code des volumes finis, on a utilisé le logiciel GID pour générer le fichier d'extension .msh qui nous donne les coordonnées de chaque noeud et le numéro des noeuds pour chaque élément. Mais, on a encore besoin d'information sur l'aire de chaque élément. On a aussi besoin d'information sur les numéros des éléments qui sont autour de chaque élément et les numéros des éléments qui sont autour de chaque noeud. Pour cet objectif, on a écrit une fonction readmesh pour trouver ces informations.

Listing 1 – readmesh1.c

```
fonction readmesh(fichier noeud, fichier element)

    for (i = 0; i < nombre d'elements; i++){
        for (j = 0; j < 4; j++){
            j_tmp1 = j % 4;
            j_tmp2 = (j + 1) % 4;
            indice_tmp1 = idM->me[j_tmp1][i];
            indice_tmp2 = idM->me[j_tmp2][i];
            compteur = 0;
            for (k = 0; k < nombre d'elements; k++){
                if (k != i){
                    if (((idM->me[0][k] == indice_tmp1) ||
(idM->me[1][k] == indice_tmp1) || (idM->me[2][k] == indice_tmp1)
|| (idM->me[3][k] == indice_tmp1))
&&((idM->me[0][k] == indice_tmp2) ||
(idM->me[1][k] == indice_tmp2) || (idM->me[2][k] == indice_tmp2) ||
(idM->me[3][k] == indice_tmp2))) {
                        idM->ne[j][i] = k;
                        compteur = 1;
                        break;
                    }
                }
            }
            if (compteur == 0) idM->ne[j][i] = -1;
        }
    }

    for (i = 0; i < nombre de noeuds; i++){
        compteur = 0;
```

```

    for (j = 0; j < nombre d'elements; j++){
        for (k = 0; k < 4; k++){
            if (idM->me[k][j] == i){
                idM->pe[compteur][i] = j;
                compteur += 1;
            }
        }
    }
    if(compteur < 4){
        for (k = compteur; k < 4; k++){
            idM->pe[k][i] = -1;
        }
    }
}
}

```

1. Les inputs de cette fonction sont les fichiers qui contiennent les coordonnées de chaque noeud et le numéro des noeud de chaque élément.
2. idM->me : le tableau qui contient les numéros des noeuds de chaque élément.
3. idM->ne : le tableau qui contient les numéros des éléments qui sont autour de chaque élément.
4. idM->pe : le tableau qui contient les numéros d'éléments qui sont autour de chaque noeud.

La complexité de cette fonction est en $O(N^2)$.

7.4.2 Résultat de temps de calcul

méthode	pas(m)	Nb éléments	géo(s)	tps itération(s)	Nb itérations	tps total(s)
volumes finis	5	115200	309.92	0.11	5000	869.54
volumes finis	2.5	460800	5095.57	0.46	5000	7407.42
volumes finis	1.25	1843200	140185.21	2.05	5000	150476.325

méthode	pas(m)	géo(s)	tps itération(s)	Nb itérations	tps total(s)
différences finies	5	0	0.08	5000	411.34
différences finies	2.5	0	0.34	5000	1713.52
différences finies	1.25	0	1.54	5000	7721.64

1. géo représente le temps qu'on a utilisé pour la fonction readmesh.
2. tps itération représente le temps pour chaque itération
3. Nb itérations représente le nombre d'itérations
4. tps total représente le temps total qu'on a utilisé.

On remarque que le temps de calcul pour le code en volumes finis est fortement pénalisé par la fonction readmesh. Mais le temps pour une itération utilisé par le code en volumes finis est comparable au temps en différences finies.

Pour réduire le temps utilisé par la fonction readmesh, nous avons réécrit cette fonction en utilisant un nouvel algorithme.

Listing 2 – readmesh2.c

```
fonction readmesh(fichier noeud, fichier element)

for(i=0;i<nombre de noeuds;i++)
{
    idM->pe[0][i] = -1;
    idM->pe[1][i] = -1;
    idM->pe[2][i] = -1;
    idM->pe[3][i] = -1;
}
for(i=0;i<nombre d'elements;i++)
{
    for(j=0;j<4;j++)
    {
        z=idM->me[j][i];
        k=0;
        while(k<4)
        {
            if(idM->pe[k][z]==-1)
            {
                idM->pe[k][z]=i;
                break;
            }
            k=k+1;
        }
    }
}

for(i=0;i<nombre d'elements;i++)
{
    for(j=0;j<4;j++)
    {
        j_tmp1 = j % 4;
        j_tmp2 = (j + 1) % 4;
        indice_tmp1 = idM->me[j_tmp1][i];
        indice_tmp2 = idM->me[j_tmp2][i];
        compteur = 0;
```

```

    for (k=0;k<4;k++)
    {
        if ((idM->pe[k][indice_tmp1]==idM->pe[0][indice_tmp2]) ||
(idM->pe[k][indice_tmp1]==idM->pe[1][indice_tmp2]) ||
(idM->pe[k][indice_tmp1]==idM->pe[2][indice_tmp2]) ||
(idM->pe[k][indice_tmp1]==idM->pe[3][indice_tmp2]))
        {
            if ((idM->pe[k][indice_tmp1]!=i)&&(idM->pe[k][indice_tmp1]!=-1))
            {
                compteur=1;
                idM->ne[j][i] = idM->pe[k][indice_tmp1];
                break;
            }
        }
        if (compteur==0) idM->ne[j][i]=-1;
    }
}

```

1. Les inputs de cette fonction sont les fichiers qui contiennent les coordonnées de chaque noeuds et le numéro des noeud de chaque élément.
2. idM->me : le tableau qui contient les numéros des noeuds de chaque élément.
3. idM->ne : le tableau qui contient les numéros des éléments qui sont autour de chaque élément.
4. idM->pe : le tableau qui contient les numéros des éléments qui sont autour de chaque noeud.

La complexité est en $O(N)$.

méthode	pas(m)	Nb éléments	géo(s)	tps itération(s)	Nb itérations	tps total(s)
volumes finis	5	115200	0.26	0.10026	5000	502.3
volumes finis	2.5	460800	1.18	0.534623	5000	2677.575
volumes finis	1.25	1843200	5.84	1.794445	5000	8990.775

Cette fois, on remarque que le temps utilisé par la fonction readmesh est déjà négligeable par rapport au temps total. Enfin, nous avons un code en volumes finis tel que son temps de calcul est comparable au temps de calcul du code en différences finies.

7.5 Source dynamique

Dans ce test, nous utilisons le maillage 2. Nous définissons une zone de faille ainsi qu'une zone de nucléation.

zone de la faille	$[-300,300]\text{m} \times [-900,-900]\text{m}$
zone de la nucleation	$[-60,60]\text{m} \times [-900,-900]\text{m}$

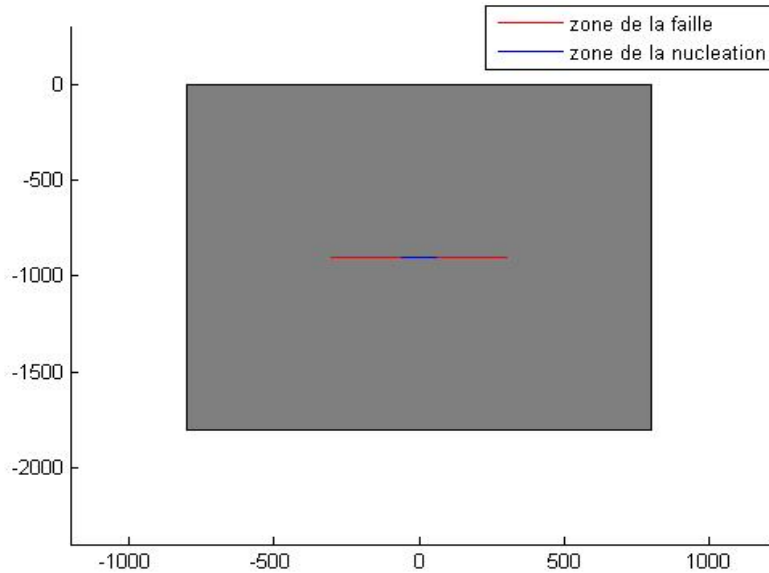


FIGURE 14 – description géométrique

Pour les paramètres de lois d'affaiblissement par frottement, on applique :

$$\tau_f = 6.7 \text{ Mpa}$$

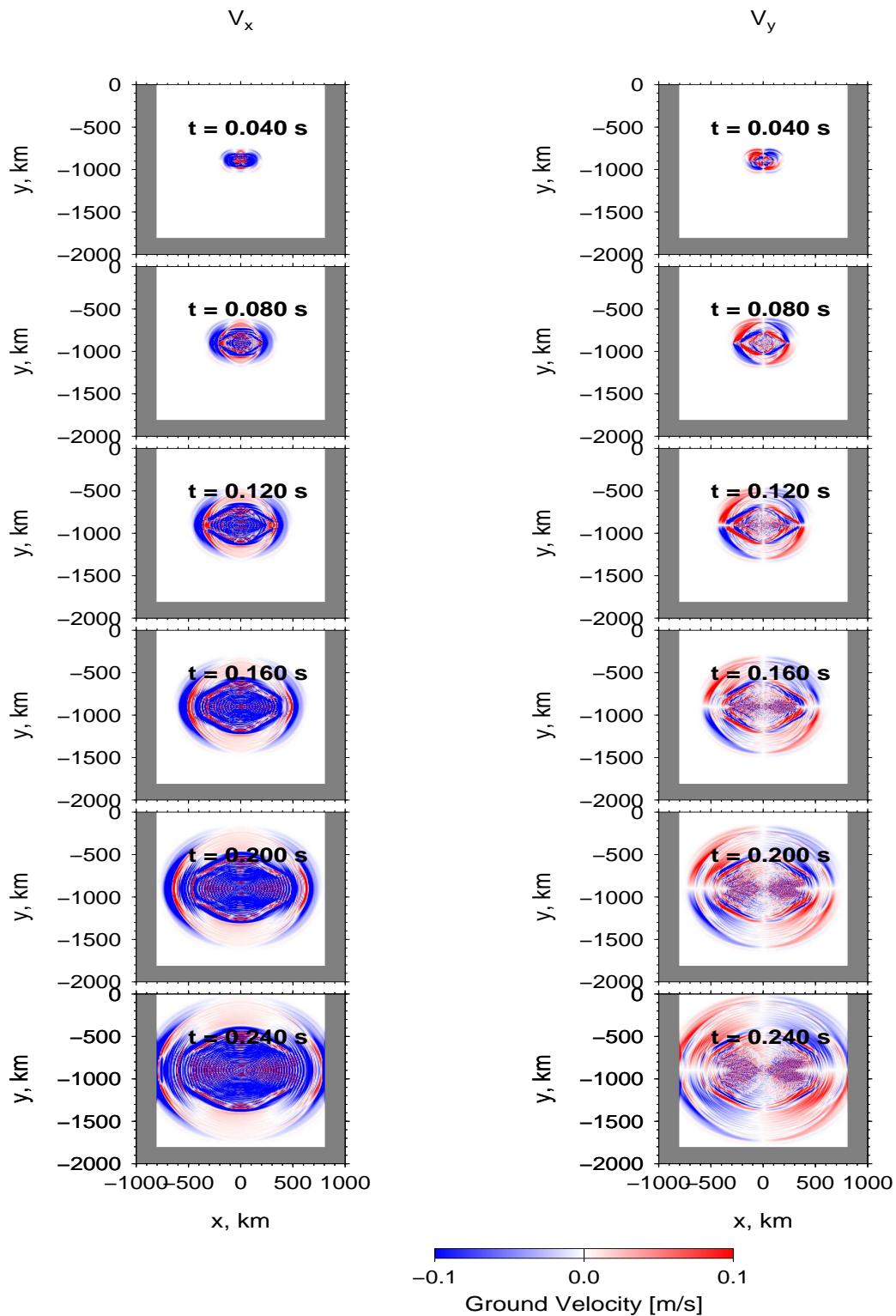
$$\tau_u = 11.3 \text{ Mpa}$$

$$\delta = 0.4$$

Nous mettons une condition initiale sur la zone de nucléation :

$$\sigma_{xz} = 10 \text{ Mpa}$$

Voici les snapshots de vx et vz aux 6 instants qui sont réalisés :



Malheureusement, les snapshots obtenus ne semblent pas corrects. En effet, on devrait observer une propagation des ondes P et des ondes S en direction des bords du domaine sans aucune propagation d'ondes au centre du domaine. Ces erreurs sont peut-être dus au fait que

je n'ai pas bien implémenté le flux sur la faille dans mon code en volumes finis ou au fait que j'ai fait des fautes dans les parties formulation et discrétisation.

8 Conclusion et perspectives

1. Ce stage m'a donné des connaissances basiques sur la génération et la propagation d'ondes sismiques et aussi une expérience de travail en système d'exploitation linux. J'ai aussi eu la possibilité d'utiliser les logiciels GID et GMT et d'apprendre à écrire des fichiers vtk pour visualiser avec paraview.
2. Les méthodes différences finies ne sont pas très efficaces dès qu'il s'agit de simuler des géométries complexes. Les méthodes volumes finis sont mieux adaptées à cette situation. En plus, c'est plus facile d'implémenter la source dynamique pour le code en volumes finis.
3. Pour l'avenir, il faudrait développer un code en volumes finis avec un maillage triangulaire parce que ce genre de maillage peut nous donner une description plus précise de la géométrie de la surface de la faille.
4. On a remarqué que l'ordre de précision de cette méthode des volumes finis n'est pas aussi élevé que l'ordre des différences finies, il faut chercher une façon pour monter en ordre (ex. méthode de Galerkin discontinu).

Références

- [1] Mondher Ben Jemaa, Nathalie Glinksy Olivier, V.M. Cruz-Atienza, Jean Virieux and Serge Piperno, *Dynamic non-planar crack rupture by a finite volume method* http://jean-virieux.obs.ujf-grenoble.fr/IMG/pdf/GJI_2007_BENJEMAA.pdf
- [2] Mondher Ben Jemaa, Serge Piperno, Nathalie Glinksy-Olivier, *Étude de stabilité d'un schéma volumes finis pour les équations de l'élasto-dynamique en maillages non structurés* <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/07/02/08/PDF/RR-5817.pdf>
- [3] Jean-Arthur Olive, *Propagation des Ondes Sismiques* <http://web.mit.edu/jaolive/www/docs/sismo.pdf>
- [4] Keiiti Aki, Paul G. Richards, *Quantitative Seismology, second edition*
- [5] Mondher BENJEMAA, Serge PIPERNO, Jean VIRIEUX, *Étude et simulation numérique de la rupture dynamique des séismes par des méthodes d'éléments finis discontinus* http://tel.archives-ouvertes.fr/view_by_stamp.php?&halsid=9p5icpg52q239mpfnvac9jpd6&label=INRIA&langue=en&action_todo=view&id=tel-00222870&version=1&view=extended_view
- [6] Wikipédia, *fr.wikipedia.org*