



Rapport de Stage de fin d'études

AMÉLIORATION DE L'UTILISATION DE L'ALGÈBRE DE TAYLOR POUR LES APPLICATIONS SPATIALES

Etudiant : Climène Lequien
Tuteur entreprise : Pierre Mercier
Tuteur Ecole : Olivier Lafitte
Référence : RAPPORT Stage de fin d'étude
Climène Lequien
Date : 1/09/2017
Page : 1/ 58

THALES Services SAS

Bâtiment Pastel-Site de Labège
290 allée du Lac
ZAC de l'Hers
31670 Labège-France
Tél. : +33 (0)5 61 88 75 01
Fax. : +33 (0)5 62 88 76 00

Web : <http://www.thalesgroup.com>

THALES

Institut Galilée

99 avenue Jean-Baptiste Clément
93430 Villetaneuse
FRANCE

UNIVERSITÉ PARIS 13

Sup  ingénieurs
Galilée

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier vivement l'intégralité du service dynamique du vol de Thales Services qui m'a accueillie pendant ces 6 mois de stage de fin d'études.

Je remercie plus particulièrement Pierre Mercier pour m'avoir permis de travailler sur un sujet de mathématiques appliquées pour lequel je portais un intérêt particulier. Un grand merci aussi à Emmanuel Bignon, membre de l'équipe de Pierre Mercier, qui avec Pierre Mercier m'ont encadrée durant ce stage et m'ont transmis leur expérience en tant qu'ingénieurs.

Je remercie enfin l'ensemble des acteurs que j'ai côtoyés durant ce stage, y compris les autres stagiaires du service grâce auxquels nous avons pu travailler dans la bonne humeur et la convivialité.



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

Table des matières

Remerciements	2
Table des figures	5
Glossaire.....	6
1 Introduction.....	7
1.1 Présentation de l'entreprise	7
1.1.1 Le groupe Thales	7
1.1.2 Thales services.....	9
1.1.3 Le service Dynamique du Vol spatial	10
1.2 Présentation du stage.....	11
1.2.1 Sujet	11
1.2.2 Objectifs pédagogiques.....	11
1.2.3 Plan de travail et planning.....	12
2 Partie I : Montée en compétence.....	13
2.1 Contexte et Problématique.....	13
2.2 Algèbre de Taylor	14
2.2.1 Eléments théoriques	15
2.2.2 Mise en œuvre théorique	18
2.2.3 Mise en œuvre pratique	22
2.3 Applications d'évaluation de Taylor	26
2.3.1 Cas mathématiques	26
2.3.2 Logiciels.....	27
3 Partie II : Mise en place du banc d'essai.....	28
3.1 Motivation.....	28
3.2 Besoin Fonctionnel	28
3.3 Conception	29
3.3.1 Interfaces entrées / sorties.....	29
3.3.2 Diagramme UML	29
3.3.3 Choix du langage	31
4 Partie III : Amélioration de la précision de l'erreur estimée	32
4.1 Estimation par la régression exponentielle	32
4.2 Estimation basée sur les fonctions analytiques	33
4.2.1 Rappel sur les fonctions analytiques réelles	33
4.2.2 Rappel sur les fonctions holomorphes.....	34
4.2.3 Idée d'amélioration de l'estimateur de l'erreur	35
4.3 Résultats.....	36



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

4.3.1	Fonction exponentielle.....	36
4.3.2	Fonction inverse	39
4.3.3	Fonction $\exp(x * y)$	40
4.3.4	Equation différentielle $dydt = yy0 = x$	43
4.3.5	Conclusion.....	46
4.4	Piste de Recherche	46
5	Partie IV : Amélioration de la précision de l'ADS.....	47
5.1	Nouvel algorithme	47
5.1.1	Logiciel 1.....	47
5.1.2	Logiciel 2.....	49
6	Conclusion.....	53
	Bibliographie	55
	Annexes	56



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

TABLE DES FIGURES

FIGURE 1 : DOMAINES D'ACTIVITES DU GROUPE THALES	8
FIGURE 2 : ORGANISATION DU GROUP THALES	8
FIGURE 3 : ORGANIGRAMME DE THALES SERVICES	9
FIGURE 4 : L'ORGANISATION MATRICIELLE DE THALES SERVICES.....	10
FIGURE 5 : METHODE DE MONTE-CARLO	13
FIGURE 6 : ORDRE DE GRANDEUR DES TEMPS DE CALCUL DES ETAPES DE MONTE-CARLO SUR LOGICIEL 2.....	14
FIGURE 7 : DIFFEOMORPHISME D'ALGEBRE ENTRE C^∞ ET nDv	18
FIGURE 8 : RELATION ENTRE LES ALGEBRES C^∞ ET nDv ET LES METHODES DE MONTE-CARLO.....	19
FIGURE 9 : DECROISSANCE EXPONENTIELLE (ECHELLE DES ORDONNEES LOGARITHMIQUES)	23
FIGURE 10 : GRAPHES ILLUSTRANT L'APPORT EN PRECISION DE L'ADS	25
FIGURE 11 : ILLUSTRATION DE L'APPORT DE L'ADS DANS LA DETECTION DE ZONES A FORTE DYNAMIQUE	26
FIGURE 12 : SCHEMA FONCTIONNEL.....	28
FIGURE 13 : SYNOPTIQUE DES CALCULS	30
FIGURE 14: FONCTION $fx = \exp(x)$ ET SES POLYNOMES DE TAYLOR A L'ORDRE 2,4 ET 6	36
FIGURE 15 : VALEUR ABSOLUE DE LA DIFFERENCE ENTRE LA FONCTION $fx = \exp(x)$ ET SES POLYNOMES DE TAYLOR A L'ORDRE 2,4 ET 6.....	37
FIGURE 16 : L'ERREUR ABSOLUE MAXIMALE ET LES ERREURS ESTIMEES ENTRE LA FONCTION $fx = \exp(x)$ ET SES POLYNOMES DE TAYLOR A L'ORDRE 2,4 ET 6.....	38
FIGURE 17: LA FONCTION $fx = 1x$ ET SES POLYNOMES DE TAYLOR A L'ORDRE 2,4 ET 6	39
FIGURE 18 : LA VALEUR ABSOLUE DE LA DIFFERENCE ENTRE LA FONCTION $fx = 1x$ ET SES POLYNOMES DE TAYLOR A L'ORDRE 2,4 ET 6.....	40
FIGURE 19 : L'ERREUR ABSOLUE MAXIMALE ET LES ERREURS ESTIMEES ENTRE LA FONCTION $fx = 1x$ ET SES POLYNOMES DE TAYLOR A L'ORDRE 2,4 ET 6.....	40
FIGURE 20 : LE MAXIMUM SUR y DE LA VALEUR ABSOLUE DE LA DIFFERENCE ENTRE LA FONCTION $fx, y = \exp(x \times y)$	41
FIGURE 21 : L'ERREUR ABSOLUE MAXIMALE ET LES ERREURS ESTIMEES ENTRE LA FONCTION $fx, y = \exp(x \times y)$..	42
FIGURE 22: LA SOLUTION A L'EQUATION DIFFERENTIELLE $dydt = yy0 = x$ ET SES POLYNOMES DE TAYLOR A L'ORDRE 2,4 ET 6 A $t = 0.5$	43
FIGURE 23 : L'ERREUR ABSOLUE MAXIMALE ET LES ERREURS ESTIMEES ENTRE : LA SOLUTION A L'EQUATION DIFFERENTIELLE $dydt = yy0 = x$	44
FIGURE 24 : L'ERREUR ABSOLUE MAXIMALE ET LES ERREURS ESTIMEES ENTRE : LA SOLUTION A L'EQUATION DIFFERENTIELLE $dydt = yy0 = x$	45



Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

GLOSSAIRE

a : demi-grand axe, il correspond au « rayon » de l'orbite, et est égal à la moitié de la longueur du grand axe.

ADS : Automatic Domain Splitting

ADSP : Automatic Domain Splitting a posteriori

ASE : Aerospace and Science Engineering

CCR : Centre de Compétences Régional

CCL : Centre de Compétences Local

Coordonnée Képlérienne : coordonnée représentant une orbite cf. [Annexes](#)

e : excentricité de l'orbite (entre 0 et 1). Elle exprime l'écart de forme entre l'orbite et le cercle parfait dont l'excentricité est nulle.

FD: Flight Dynamics

GEO : orbite géostationnaire (Geostationary Earth Orbit)

GOM : (grand oméga) Ω est la longitude du nœud ascendant: il s'agit de l'angle entre la direction du point vernal (position du soleil lors de l'équinoxe de printemps) et la ligne des nœuds, c'est-à-dire de l'intersection entre le plan de l'orbite considéré et du plan de référence, le nœud ascendant étant le point où le corps céleste passe au nord du plan de référence.

GTO : orbite de transfert géostationnaire (Geostationary Transfer Orbit)

I : inclinaison (entre 0 et 180 degrés) est l'angle que fait le plan orbital avec un *plan de référence*, qui pour les orbites planétaires dans le système solaire est en général le plan de l'écliptique, c'est-à-dire le plan de l'orbite terrestre

IHM : interaction homme-machine

LEO : orbite basse (Low Earth Orbit)

LOM : Logiciel Orienté Machine

LOS : Loi sur les Opérations Spatiales

M : l'anomalie moyenne, notée M , il s'agit d'un paramètre dynamique, directement lié à l'aire balayée par le rayon vecteur reliant l'astre au foyer de l'orbite.

POM : (petit oméga) ω est l'argument du périastre, il s'agit de l'angle formé par la ligne des nœuds et la direction du périastre, dans le plan orbital.

SSO : orbite héliosynchrone (Sun Synchronous Orbit)



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

1 Introduction

1.1 Présentation de l'entreprise

1.1.1 Le groupe Thales

Partout où des décisions critiques doivent être prises, Thales est présent. Sur les marchés que le Groupe sert (aéronautique, espace, transport terrestre, sécurité, défense), ses équipements et systèmes aident ses clients à choisir la meilleure option et à agir en conséquence.

L'expertise de ses 64 000 collaborateurs et sa présence opérationnelle dans 56 pays en font ainsi un acteur clé de la sécurité des citoyens, des infrastructures et des États.

Le Groupe est en particulier reconnu pour sa longue expérience du développement en synergie des technologies duales civiles et militaires impliquant un réseau mondial de chercheurs et ingénieurs de haut niveau

Le Groupe constitue un ensemble cohérent, irrigué par une expertise technologique transverse qui lui permet d'opérer sur l'ensemble de la chaîne de valeur en fonction des besoins de ses clients civils et militaires : maîtrise d'œuvre, intégration de systèmes, fourniture d'équipements à haute valeur ajoutée, activités de services. La diversité des champs d'interventions est présentée dans la Figure 1.



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES

Référence : RAPPORT Stage de fin d'étude Climène Lequien



Figure 1 : Domaines d'activités du groupe Thales

Voici l'équipe dirigeante du groupe Thales :



Figure 2 : Organisation du group Thales

Référence : RAPPORT Stage de fin d'étude Climène Lequien

1.1.2 Thales services

Au sein de l'entreprise Thales, dans la division « système d'information et de communication sécurisés », se trouve l'entreprise Thales services dans laquelle s'est déroulé mon stage. L'organigramme de la société est le suivant :

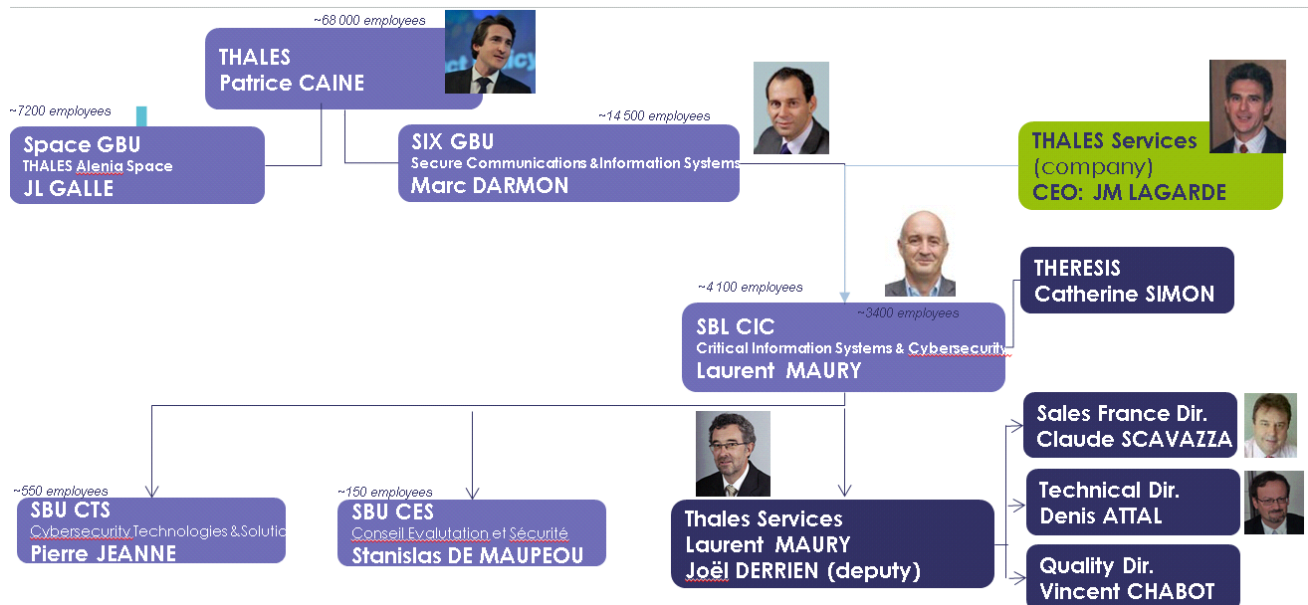


Figure 3 : Organigramme de Thales services

L'organisation de Thales Services est une organisation matricielle constituée de :

- **Pôles** -> Affaires (finance, etc.)
- **Centres de compétences (CCR)** -> Ingénierie (technique)

Les pôles et les centres de compétences sont gérés de manière indépendante.

Référence : RAPPORT Stage de fin d'étude Climène Lequien

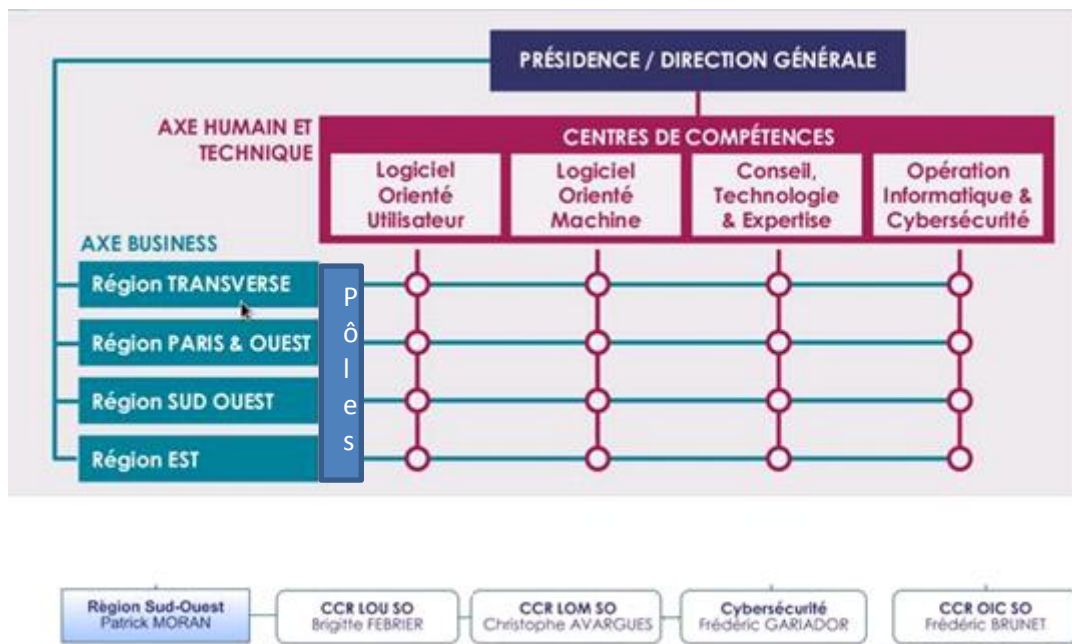


Figure 4 : L'organisation matricielle de Thales services

1.1.3 Le service Dynamique du Vol spatial

Mon stage s'est déroulé au sein du service dynamique du vol spatial de Thales services. Ce service est constitué d'une trentaine de personnes ; il fait partie du CCR LOM.

Les activités de ce service se scindent en deux catégories :

- assistance technique chez le client :
 - o analyse de mission,
 - o étude technique,
 - o opérations de mise à postes
 - o assistance à maîtrise d'ouvrage/d'œuvre
- développement de projets sur le site Thales :
 - o Centre Mécanique Spatiale,
 - o orbitographie fine,
 - o librairies de guidage en attitude
 - o logiciels de gestion de fin de vie de satellite,
 - o librairie de Mécanique Spatiale.
 - o Détermination d'altitude
 - o Surveillance de l'espace

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

1.2 Présentation du stage

1.2.1 Sujet

Le sujet du stage porte l'intitulé suivant :

« Amélioration de l'utilisation de l'algèbre de Taylor pour les applications spatiales »

Depuis plusieurs années Thales services mène des travaux visant à améliorer les performances de logiciels scientifiques complexes utilisant des simulations Monte-Carlo par l'utilisation de nouvelles méthodes mathématiques liées à l'algèbre de Taylor. Ceci est particulièrement pertinent dans le cadre des propagations de systèmes dynamiques non linéaires et avec des incertitudes sur les mesures des conditions initiales.

Dans plusieurs stages et deux R&T [2][3], il est apparu des problèmes de précision lors de l'application de l'algèbre de Taylor. L'objectif du présent stage est donc de résoudre (au moins partiellement) ces problèmes d'imprécision en améliorant :

- L'estimation de l'erreur commise au cours du calcul
- Le mécanisme de gestion de la précision basé sur cette erreur estimée (Automatic Domain Splitting (ADS)).

Ces améliorations seront conçues, implémentées puis validées d'abord sur des cas mathématiques simples puis à terme sur des cas physiques plus complexes (logiciels).

1.2.2 Objectifs pédagogiques

Après 2 années et demi d'études scientifiques à l'école d'ingénieur Sup Galilée, ce stage de fin d'études est l'occasion pour moi de mettre en application mes compétences acquises en troisième cycle dans un projet réel en entreprise touchant à des domaines variés : mathématiques appliquées, mécanique spatiale, programmation Java...

Le stage de fin d'étude étant le premier pas vers la vie active et le travail d'ingénieur, les objectifs d'apprentissages sont les suivants :

Sur le plan technique :

- Mettre en œuvre les connaissances techniques apprises au cours de mon parcours scolaire, notamment dans le langage JAVA,
- Prolonger mes connaissances en me familiarisant notamment avec l'algèbre de Taylor ainsi que la méthode de l'ADS,
- Remplir les objectifs du stage et arriver à des résultats satisfaisants et utiles à l'entreprise.



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

Sur le plan organisationnel :

- Gérer l'organisation temporelle des activités afin de fournir les informations ou dossiers utiles à l'entreprise en temps et en heure,
- Mener une recherche bibliographique efficace via Internet et les livres disponibles dans l'entreprise,
- Comprendre rapidement les lignes directrices des logiciels déjà présents (mis sous forme de polynômes de Taylor),
- Utiliser les ressources de l'entreprise,
- Rédiger des rapports scientifiques.

Sur le plan humain :

- Découvrir et assimiler la façon de travailler des ingénieurs Thales et la philosophie de l'entreprise,
- Apporter ma contribution au fonctionnement de l'entreprise en présentant des résultats à la fin du stage,
- Assumer et être capable de discuter ces résultats et les choix opérés pendant le stage.

1.2.3 Plan de travail et planning

Ce stage sera réalisé en 4 étapes séquentielles :

Partie I : Montée en compétence sur les méthodes et logiciel liés à l'algèbre de Taylor, et prise de connaissance des logiciels qui serviront de cas d'évaluation. (6 semaines)

Partie II : Mise en place du banc d'essai. (4 semaines)

Partie III : Amélioration de la précision de l'erreur estimée. (6 semaines)

Partie VI : Amélioration de la précision de l'Automatic Domain Splitting. (9 semaines)

Le rapport de stage sera rédigé au cours du stage.



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES

Référence : RAPPORT Stage de fin d'étude Climène Lequien

2 Partie I : Montée en compétence

Dans un premier temps, il faut comprendre ce qui a été fait précédemment ([2] [3]) et comprendre les bases mathématiques utilisées (Algèbre de Taylor 2.2, ADS2.2.3.5).

2.1 Contexte et Problématique

2.1.1.1 Contexte

De manière pratique, de nombreux systèmes dynamiques sont soumis à des incertitudes dans la mesure de l'état initial. De petites variations de l'état initial peuvent induire de grosses erreurs sur l'état final. Il est donc important d'étudier la manière dont ces incertitudes évoluent et comment elles peuvent être maîtrisées. Les méthodes Monte-Carlo sont souvent utilisées pour pallier ce problème.

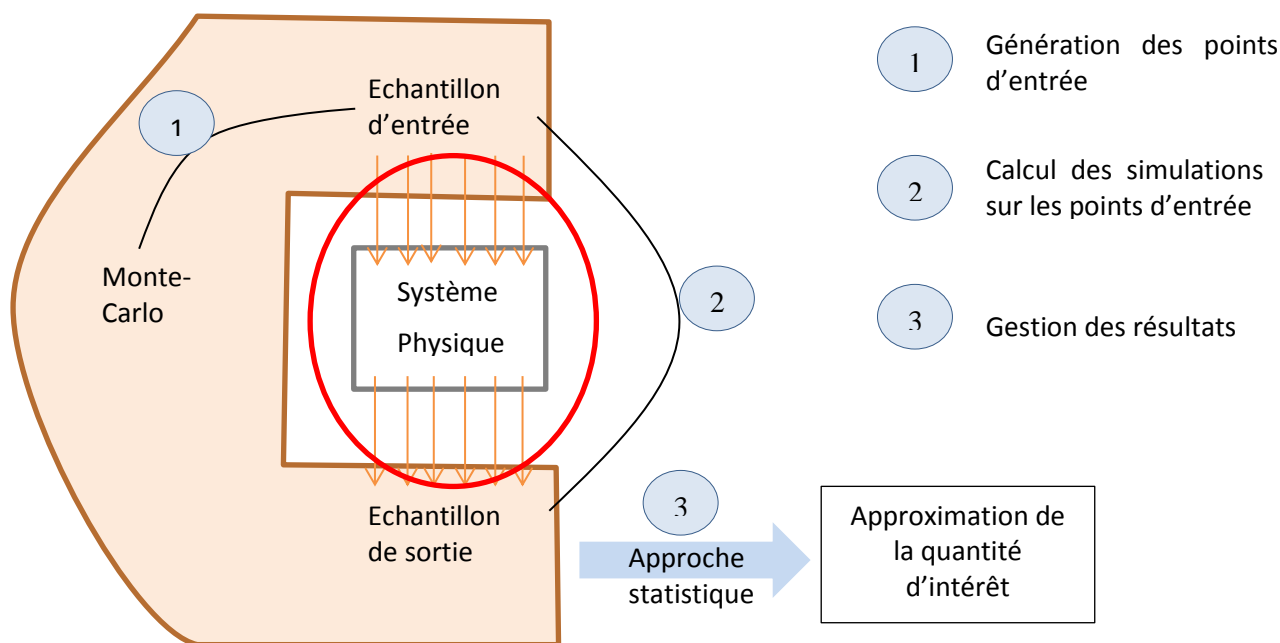


Figure 5 : Méthode de Monte-Carlo

Ces méthodes consistent à réaliser l'évaluation de très nombreuses conditions initiales (flèches orange sur la Figure 5) et à réaliser des études statistiques sur ces simulations. Le principal inconvénient est le temps de calcul très élevé, puisqu'on réalise une évaluation du système dynamique pour chacune des conditions initiales étudiées. Sur la Figure 5, l'étape 1 est toujours très rapide mais les étapes 2 et 3 peuvent être longues. L'étape 2 a souvent un temps de calcul proportionnel à la taille de l'échantillon d'entrée.

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

2.1.1.2 Problématique et objectif

Comme dit dans le paragraphe précédent le plus gros problème des méthodes Monte-Carlo est le temps de calcul. Ce temps de calcul est limitant car :

- Il contraint de paralléliser le code et de louer un supercalculateur ce qui a un coût.
- Il empêche d'avoir la précision souhaitée car le nombre de points initiaux serait trop grand.

Ce problème implique que de nombreuses recherches soient entreprise pour trouver des méthodes plus efficaces. Celles-ci ont pour but, d'être plus véloces, afin de pouvoir jouer sur deux leviers :

- amélioration du temps d'exécution,
- amélioration de la précision en utilisant le gain de temps pour avoir un plus grand nombre de points en entrée.

Pour cela Il existe deux approches :

- des variantes de Monte-Carlo : PCE, Kriging,
- l'étape 1 de Monte-Carlo suivit d'une mono-exécution polynomiale : Taylor.

2.1.1.3 Exemple

Prenons l'exemple de l'utilisation opérationnelle du logiciel 2. On effectue 20000 runs dispersant les paramètres incertains. Si on reprend les étapes de la Figure 5 :

Génération des points d'entrée : 1	Quelques secondes
Calcule des simulations sur les points d'entrée : 2	Plusieurs heures
Gestion des résultats : 3	Quelques secondes

Figure 6 : ordre de grandeur des temps de calcul des étapes de Monte-Carlo sur logiciel 2

En accélérant l'étape 2 par un facteur dix on peut soit gagner un facteur dix à iso précision, soit évaluer dix fois plus de points (200000) à iso temps de calcul.

2.2 Algèbre de Taylor

L'algèbre de Taylor est un outil mathématique dont l'application relativement récente dans les propagations de systèmes dynamiques non linéaires s'est révélée probante. Cette partie s'attachera d'une part à décrire l'aspect théorique de l'algèbre de Taylor et d'autre part à expliciter son utilisation dans le cadre de l'évaluation multiple de systèmes dynamiques complexes.



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

2.2.1 Eléments théoriques

2.2.1.1 Algèbre différentielle (définition)

Commençons par rappeler quelques définitions mathématiques. Une K-algèbre est une structure algébrique $(A, +, \cdot, \times)$ avec les propriétés suivantes :

- $(A, +, \cdot)$ est un K-espace vectoriel ;
- la loi \times est une loi de composition interne sur A ;
- la loi \times est distributive par rapport à la loi + ;
- $\forall (a, b) \in K^2, \forall (x, y) \in A^2, (a \cdot x) \times (b \cdot y) = (ab) \cdot (x \times y)$

Une algèbre différentielle est une algèbre munie d'un opérateur de dérivation.

2.2.1.2 Théorème de Taylor

L'algèbre de Taylor repose sur le célèbre théorème de Taylor énoncé ci-dessous.

Théorème de Taylor : Soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R}^v \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $(n + 1)$ fois continue et partiellement dérivable sur $[a, b]$. Soit de plus $x_0 \in [a, b]$. Alors pour tout $x \in [a, b]$ il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$f(x) = \sum_{l=0}^n \frac{1}{l!} ((x - x_0) \cdot \nabla)^l f(x_0) + \frac{1}{(n+1)!} ((x - x_0) \cdot \nabla)^{n+1} f(x_0 + (x - x_0) \times \theta)$$

où l'opérateur de différentiation partielle est défini comme :

$$(h \cdot \nabla)^k = \sum_{\substack{0 \leq \beta_1 \dots \beta_v \leq k \\ \beta_1 + \dots + \beta_v = k}} \frac{k!}{\beta_1! \dots \beta_v!} h_1^{\beta_1} \dots h_v^{\beta_v} \frac{\partial^k}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_v^{\beta_v}}$$

Ce théorème donne une expression d'une fonction suffisamment continue et dérivable au voisinage d'un point sous la forme de la somme d'un polynôme qui l'approxime et d'un reste, qui est équivalent au terme de dérivée d'ordre $n + 1$ pris en un point de $[a, b]$ existant mais la plupart du temps inconnu.

2.2.1.3 Reste de Taylor

Reprenons le théorème de

$$f(x) = \sum_{l=0}^n \frac{1}{l!} ((x - x_0) \cdot \nabla)^l f(x_0) + \mathcal{R}_n(x)$$



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

où l'opérateur de différentiation partielle est défini comme :

$$(h. \nabla)^k = \sum_{\substack{0 \leq \beta_1 \dots \beta_v \leq k \\ \beta_1 + \dots + \beta_v = k}} \frac{k!}{\beta_1! \dots \beta_v!} h_1^{\beta_1} \dots h_v^{\beta_v} \frac{\partial^k}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_v^{\beta_v}}$$

$\mathcal{R}_n(x)$ est le reste ou l'erreur du à la troncature à l'ordre n .

Il existe plusieurs formules de $\mathcal{R}_n(x)$.

- Formule de Taylor-Young : $\mathcal{R}_n(x) = o((x - x_0)^n)$
- Formule de Taylor avec reste intégral de Laplace : $\mathcal{R}_n(x) = \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt$
- Formule de Taylor-Lagrange : $\mathcal{R}_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} ((x - x_0) \nabla)^{n+1} f(x_0 + (x - x_0) \times \theta)$
- Inégalité de Taylor-Lagrange : si $\exists M$ tel que $\forall y \in [a, b] |f^{(n+1)}(y)| \leq M$
Alors $|\mathcal{R}_n(x)| \leq \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$.

2.2.1.4 Modèle de Taylor

Introduisons maintenant la notion de modèle de Taylor. Un développement de Taylor possède trois caractéristiques qui lui sont propres : son ordre n , son point de référence x_0 et son domaine de définition $[a, b]$. On peut regrouper ces trois données au sein d'un paramètre α :

$$\alpha = (n, x_0, [a, b])$$

Une fonction soumise à un développement de Taylor peut alors s'écrire comme la somme de son polynôme de Taylor à l'ordre n et de son reste :

$$f(x) = P_{\alpha, f}(x - x_0) + \varepsilon_{\alpha, f}(x - x_0)$$

On peut trouver un intervalle $I_{\alpha, f}$ tels que $\forall x \in [a, b], \varepsilon_{\alpha, f}(x - x_0) \in I_{\alpha, f}$. Le couple $T_{\alpha, f} = (P_{\alpha, f}, I_{\alpha, f})$ définit la notion de modèle de Taylor et est un élément de l'algèbre de Taylor associée.

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

2.2.1.5 Algèbre de Taylor

Une algèbre est définie par son ordre maximal n et le nombre de variables de ses polynômes v , on la note ${}_nD_v$. Le nombre maximal de coefficients d'un polynôme de cette algèbre se détermine grâce à la formule suivante

$$p = \frac{(n+v)!}{n!v!}$$

Cette algèbre est munie des opérations de base d'addition de multiplication et de composition. L'addition est définie assez simplement :

$$T_{\alpha,f} + T_{\alpha,g} = (P_{\alpha,f} + P_{\alpha,g}, I_{\alpha,f} + I_{\alpha,g}) = (P_{\alpha,f+g}, I_{\alpha,f+g}) = T_{\alpha,f+g}$$

On peut noter que cette opération est commutative et associative. La multiplication est cependant plus subtile ; on a en effet pour deux fonctions f et g :

$$f \times g = (T_f, I_f) \times (T_g, I_g) = (T_f \times T_g, \bar{T}_{f \times g} + T_f \times I_g + T_g \times I_f + I_f \times I_g)$$

$\bar{T}_{f \times g}$ désigne le reste de la multiplication de T_f par T_g (la partie tronquée). L'encadrement le plus fin de ce reste est donné par les extrema de cette fonction qui représente le reste ne pouvant être obtenu qu'en bornant T_f et T_g qui sont des polynômes de degré élevé à plusieurs variables. Le calcul de ces extrema est généralement assez lourd en temps de calcul.

Dans [1], M. Berz montre que l'on peut associer une loi de composition (notée \circ) à cette algèbre, la composition étant la composition usuelle des polynômes. Pour les polynômes à plusieurs variables, la composition requiert un vecteur de polynômes en entrée (une *Map* dans les articles de M. Berz), soit un élément de ${}_nD_v^n$. Par extension M. Berz définit facilement la composition de *Maps* (composition appliquée à chacun des éléments du vecteur).

Pour plus d'information voir la note technique d'Emmanuel Bignon [2]

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

2.2.1.6 Difféomorphisme d'algèbre entre $A(C^\infty)$ et $_nD_v$

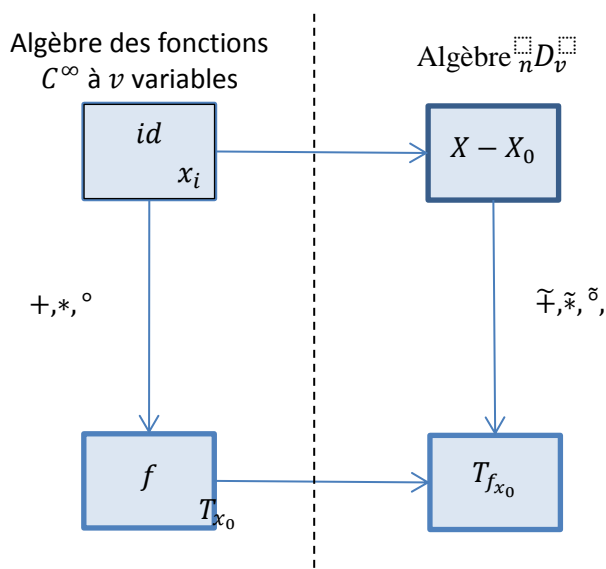


Figure 7 : Difféomorphisme d'algèbre entre C^∞ et $_nD_v$

Entre l'algèbre des fonctions C^∞ à v variables et celle $_nD_v$, il existe un isomorphisme, ce qui explique que le diagramme soit commutatif. Pour plus d'informations voir [9]

2.2.2 Mise en œuvre théorique

2.2.2.1 Principe

Dans le cas où le système est modélisable sous la forme d'une suite d'opérations, l'utilisation de l'algèbre de Taylor permet d'éviter de réaliser une évaluation coûteuse pour chaque condition initiale. En effet, cette méthode permet d'évaluer un voisinage complet de l'état autour de x_0 plutôt que de faire une évaluation simple de x_0 .

L'ensemble de la méthode est fondée sur la commutativité du diagramme de la

Figure 7

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

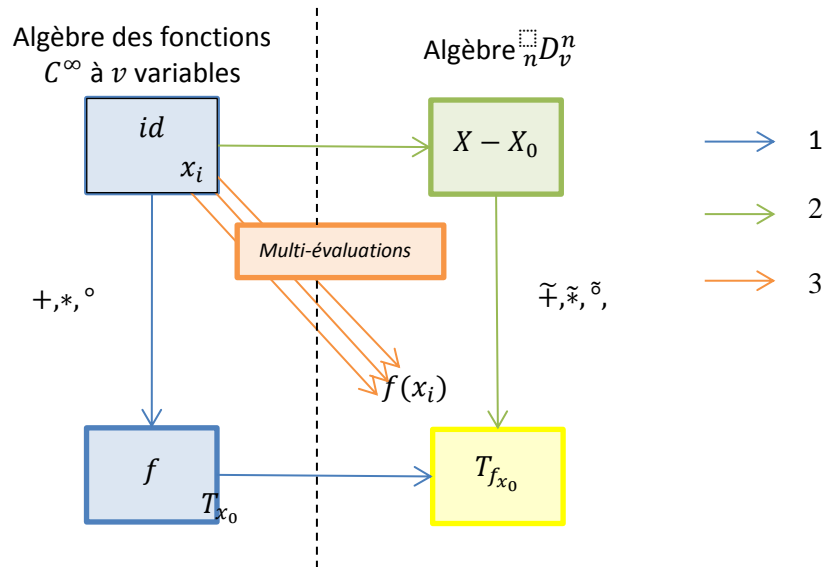


Figure 8 : Relation entre les algèbres C^∞ et ${}_nD_v^n$ et les méthodes de Monte-Carlo

1. Chemin exact
Si la fonction f est simple et calculable facilement.
2. Chemin Taylor tronqué à l'ordre n .
On taylorise les v variables puis on exécute les polynômes d'ordre n de Taylor associés à la fonction f
3. Méthode Monte-Carlo (voir 2.1.1.1 et Figure 5 : Méthode de Monte-Carlo)

Pour décrire brièvement la méthode, considérons l'application suivante :

Soient $x \in \mathbb{R}^v, t \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^p$

$$y = f(t, x)$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^v$ le centre de l'algèbre et V_{x_0} un voisinage de x_0 .

Notre objectif est de calculer $f(t, V_{x_0})$. Pour cela on remplace x_0 par un polynôme simple qui paramètre son voisinage.

$$P_{x_0}(\xi) = x_0 + \xi$$

A l'aide des opérateurs classiques, des polynômes de Taylor des fonctions usuelles et/ou des intégrateurs, on obtient alors une approximation de f sous la forme d'une série de Taylor tronquée, à l'ordre n , $P_{t, x_0}(\xi)$. Une simple évaluation de ce polynôme permet d'obtenir une approximation «contrôlée» de l'image du voisinage de x_0 par f . Cette méthode permet de réduire considérablement

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

le temps de calcul des simulations Monte-Carlo, puisque la propagation d'orbite se réduit alors à l'évaluation d'un polynôme

2.2.2.2 Exemples

2.2.2.2.1 Exemple 1

Soit $a, b \in \mathbb{R}^2$ et $f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \times b \\ b \end{pmatrix}$

Dans l'algèbre des nombres réels :

$$X_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} a \times b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \times b \\ b \end{pmatrix}$$

Dans l'algèbre de Taylor

$$X_0 = \begin{pmatrix} a_0 + (x - a_0) \\ b_0 + (y - b_0) \end{pmatrix} \xrightarrow{F\left(\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} P_1 \times P_2 \\ P_2 \end{pmatrix}} P(X_0) = \begin{pmatrix} a_0 b_0 + b_0(x - a_0) + a_0(y - b_0) + (x - a_0)(y - b_0) \\ b_0 + (y - b_0) \end{pmatrix}$$

2.2.2.2.2 Exemple 2

Maintenant considérons la chute libre d'un point matériel M de masse m soumis à une attraction g, avec une vitesse $v_0 = 1$ m/s et une position $x_0 = 0$ m à l'instant t_0 (l'axe vertical étant descendant et ayant pour origine le point initial de chute). L'équation différentielle qui régit le mouvement du point M de position x, de vitesse v et d'accélération a se réduit à $a = g$. On peut alors écrire le système sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}_{t+dt} = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} v \\ a \end{pmatrix} \cdot dt$$

Utilisons ici la méthode d'intégration d'Euler entre l'instant initial $t_0 = 0$ s et l'instant final $t_f = 3$ s avec un pas d'intégration $dt = 1$ s. On notera Y le vecteur d'état du système muni de l'indice temporel correspondant à l'étape d'intégration. On a ainsi par intégration numérique classique :

$$Y_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ g \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} a + b \\ b + g \end{pmatrix}$$



Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

$$Y_2 = \binom{a+b}{b+g} + \binom{b+g}{g} dt = \binom{a+2b+g}{b+2g}$$

$$Y_3 = \binom{a+2b+g}{b+2g} + \binom{b+2g}{g} dt = \binom{a+3b+3g}{b+3g}$$

L'intégration numérique dans l'algèbre de Taylor consiste donc à remplacer notre condition initiale par un polynôme, et à obtenir un état final sous forme de vecteur de polynômes :

$$Y_0 = \binom{a_0 + (X - a_0)}{b_0 + (Y - b_0)}$$

$$Y_1 = \binom{a_0 + (X - a_0)}{b_0 + (Y - b_0)} + \binom{b_0 + (Y - b_0)}{g} dt = \binom{b_0 + a_0 + (X - a_0) + (Y - b_0)}{b_0 + g + (Y - b_0)}$$

$$\begin{aligned} Y_2 &= \binom{b_0 + a_0 + (X - a_0) + (Y - b_0)}{b_0 + g + (Y - b_0)} + \binom{b_0 + g + (Y - b_0)}{g} dt \\ &= \binom{2b_0 + a_0 + g + (X - a_0) + 2(Y - b_0)}{b_0 + 2g + (Y - b_0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_3 &= \binom{2b_0 + a_0 + g + (X - a_0) + 2(Y - b_0)}{b_0 + 2g + (Y - b_0)} + \binom{b_0 + 2g + (Y - b_0)}{g} dt \\ &= \binom{3b_0 + a_0 + 3g + (X - a_0) + 3(Y - b_0)}{b_0 + 3g + (Y - b_0)} \end{aligned}$$

Ainsi en évaluant en $x = a$ et $v = b$ on retrouve bien le résultat trouvé par intégration classique.

Dans ces exemples, l'algèbre de Taylor ne présente pas grand intérêt, car il y a une solution simple. Mais il permet de comprendre le fonctionnement de la méthode, et son apport se trouve dans des systèmes dynamiques plus complexes pour lesquels il y a une incertitude sur la valeur initiale. La méthode classique nécessite de refaire l'intégration pour chaque condition initiale, alors que la méthode de Taylor réduit ce calcul à une simple évaluation du polynôme final.

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

2.2.3 Mise en œuvre pratique

2.2.3.1 Etat de l'art

L'algèbre de Taylor est un outil mathématique qui a été étudié et développé par Martin Berz [1] puis Roberto Armellin [8] au cours de ces 20 dernières années. En plus de l'étude théorique poussée de cet outil, ces deux chercheurs ont appliqué la méthode à des problèmes scientifiques concrets. Martin Berz [1] l'a utilisée dans le cadre de la physique des particules tandis que Roberto Armellin [8] s'est penché sur ses applications en mécanique spatiale, cas qui nous intéressent.

Plusieurs applications de mécanique spatiale se trouvent dans les articles de Roberto Armellin [8]. La détermination d'orbite préliminaire est un exemple qu'il a mis en pratique pour étudier la trajectoire de l'astéroïde Apophis qui passera à proximité de la Terre en 2029. Il a également utilisé cet outil pour faire du transfert d'orbite interplanétaire ou de l'étude de taches de dispersion pour la rentrée atmosphérique.

La mécanique spatiale représente, après la physique des particules, le deuxième champ principal actuel d'application de l'algèbre de Taylor. En effet, ce domaine implique des équations très complexes fortement non-linéaires et consommatrices de temps de calcul. Il s'agit de plus, d'un domaine utilisant des simulations Monte-Carlo à cause des incertitudes sur les mesures physiques dans l'espace. La propagation d'objets dans le système solaire fut l'un des premiers sujets d'étude en mécanique spatiale.

2.2.3.2 PACE

Thales dispose de son package PACE qui réunit toutes les fonctionnalités relatives à l'algèbre de Taylor et à l'intégration des systèmes dynamiques taylorisés. PACE contient le moteur algébrique de Taylor et ne contient aucune référence thématique. Il permet toutes les opérations simples, les fonctions usuelles ainsi que plusieurs intégrateurs (RK4, Euler, Lie). Les objets correspondants à l'algèbre et aux polynômes de Taylor sont créés et gérés dans PACE (Pour plus d'informations voir [2]).

2.2.3.3 Gestion des fonctions non C^∞

Dans la pratique toutes les fonctions ne sont pas C^∞ même des fonctions simples ne le sont pas comme par exemple valeur absolu ou modulo. Les deux exemples précédents sont gérés dans PACE, pour les autres discontinuités elles sont gérées la plupart au cas par cas. Il ne faut pas oublier que comme nous travaillons sur ordinateur les fonctions dérivables presque partout et/ou prolongeables par continuité ne sont pas un problème tant que les points de discontinuité ne sont pas le centre de l'algèbre. (Pour plus d'informations voir [2])



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

2.2.3.4 Estimation de l'erreur de troncature

Dans le cas multi-variables, la détermination de l'estimation du reste (de l'erreur) n'est pas forcément triviale.

Pour la détermination de l'erreur, l'algorithme de régression exponentielle est utilisé en prenant comme mesure la somme des valeurs absolues pour tous les coefficients d'ordre exact $n + 1$.

Thales utilise cette méthode car dans le seul article publié qui analyse le reste, A. Wittig et P. Di Lizia [7] montrent de manière quantitative que leurs coefficients suivent une régression exponentielle. L'article fournit un exemple avec la fonction $f(x) = \sqrt{1+x}$ à l'ordre 9 :

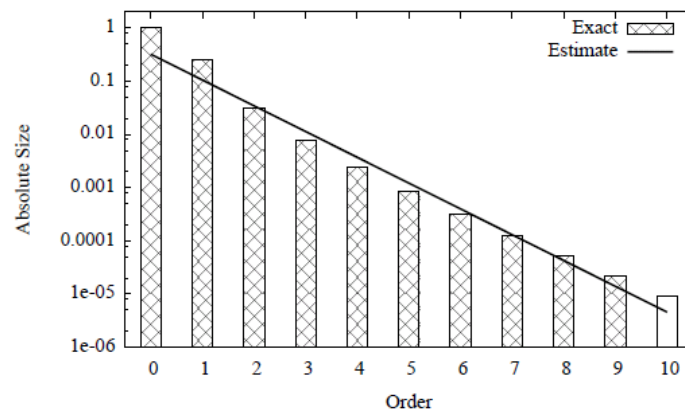


Figure 9 : Décroissance exponentielle (échelle des ordonnées logarithmiques)

Cette méthode a déjà été testée.

2.2.3.5 Gestion de la précision

Pour gérer la précision lors d'un stage précédant l'Automatic Domain Splitting (ADS) a été mis en place. Le principe général de l'Automatic Domain Splitting (ADS) repose sur la propagation de plusieurs polynômes différents correspondant au découpage des différents domaines d'intégration (découpage fait au cours de la propagation). La réduction de ces domaines doit diminuer l'erreur. En effet, l'erreur d'approximation entre une fonction f de classe C^{n+1} et son polynôme de Taylor P_f d'ordre n est déductible du théorème de Taylor :

$$|f(\delta x) - P_f(\delta x)| \leq C \cdot \delta x^{n+1}$$

où C désigne une constante strictement positive. Considérons l'erreur maximale ϵ_r de P_f sur le domaine B_r de rayon $r > 0$ autour du point d'expansion. L'équation précédente implique :

$$|f(\delta x) - P_f(\delta x)| \leq C \cdot r^{n+1} = \epsilon_r$$

Si le domaine de P_f est réduit de la boule B_r à la boule $B_{\frac{r}{2}}$ de rayon $\frac{r}{2}$ on a l'inégalité suivante :



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

$$|f(\delta x) - P_f(\delta x)| \leq C \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^{n+1} = \frac{\varepsilon_r}{2^{n+1}}$$

On constate qu'en réduisant la taille du domaine par 2 on réduit aussi le majorant de l'erreur d'un facteur 2^{n+1} . Une solution à la non-convergence de l'expansion de Taylor d'une fonction se trouve donc dans la subdivision du domaine de propagation initial en plusieurs sous-domaines sur lesquels le polynôme sera propagé indépendamment du reste. Ainsi, l'erreur maximale sur chacun des nouveaux domaines sera bien inférieure à l'erreur obtenue en conservant un seul domaine initial, c'est le principe de l'ADS.

La méthode utilise un algorithme qui découpe automatiquement un domaine lorsque la dynamique du système n'est plus représentée avec une précision suffisante, selon certaines conditions qui seront détaillées ultérieurement. Le découpage d'un domaine s'effectue selon l'une des variables d'expansion, dans notre cas celui ayant la plus grande erreur estimée ; et le domaine se trouve alors découpé en deux parties égales. Plus précisément, soit $P(x)$ la représentation polynômiale du flux $\phi(t_i, x)$ à un instant donné t_i , où $x \in [-1; 1]^k$, les intervalles de départ des différentes variables étant normalisés. Le découpage de P en deux polynômes P_1 et P_2 selon la composante x_j s'effectue ainsi :

$$P_1(x) = P(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, \frac{1}{2}x_j - \frac{1}{2}, x_{j+1}, \dots, x_k)$$

$$P_2(x) = P(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, \frac{1}{2}x_j + \frac{1}{2}, x_{j+1}, \dots, x_k)$$

P_1 couvre alors la partie gauche du domaine ($x_j \in [-1; 0]$) et P_2 couvre la partie droite ($x_j \in [0; 1]$). Comme P_1 et P_2 sont de même degré que P , l'opération de découpage peut s'effectuer dans l'algèbre de Taylor sans induire d'erreur de troncature supplémentaire. Les polynômes P_1 et P_2 ont exactement la même forme que P , c'est simplement leur point d'expansion qui diffère, et leur coefficient d'ordre n en x_j qui sera plus petit d'un facteur 2^n que le terme correspondant dans P . Après un tel découpage, l'intégration peut continuer sur P_1 et P_2 de la même manière qu'elle se déroulait sur P . Le résultat final est alors une liste de polynômes, chaque polynôme étant associé à un domaine de conditions initiales.

Les graphes suivants illustrent le gain en précision apporté par un découpage du domaine initial, en propageant la dynamique du système à partir de deux points qui représentent les centres des deux nouveaux domaines.

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

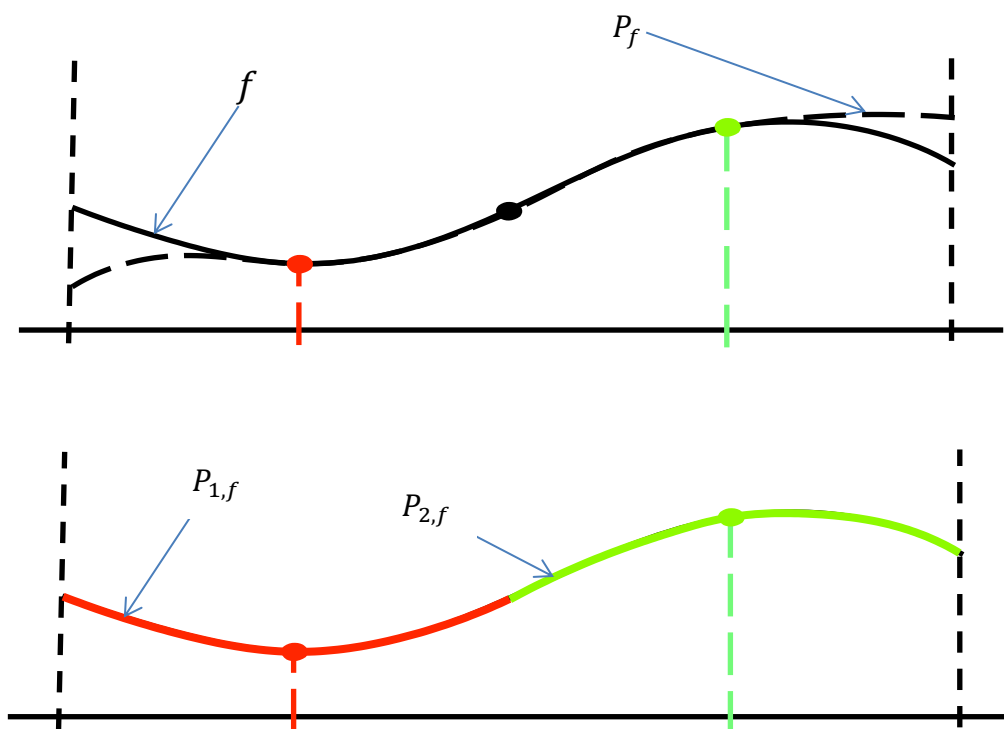


Figure 10 : Graphes illustrant l'apport en précision de l'ADS

Une question reste en suspens : quand doit-on diviser un domaine ? Une méthode de la littérature existante de A. Wittig [8] consiste à estimer l'amplitude du terme d'ordre $n + 1$ d'un des polynômes représentant la dynamique du système, et de la comparer à une valeur seuil au dessus de laquelle un split devient nécessaire. Lorsqu'il s'agit d'un cas multi-variables, cette méthode permet aussi de déterminer la direction du split, qui s'effectuera selon la variable dont le terme estimé d'ordre $n + 1$ dépasse la valeur seuil. Cette amplitude est déterminée par régression exponentielle sur les amplitudes des n premiers coefficients du polynôme.

L'ADS permet donc un gain en précision par la réduction de la taille des domaines sur lesquels on propage les variables taylorisées. Cette méthode permet aussi de repérer les zones à forte dynamique en réalisant un mappage des découpages réalisés et en observant les concentrations de découpes, comme on le voit sur la figure 6.

Référence : RAPPORT Stage de fin d'étude Climène Lequien

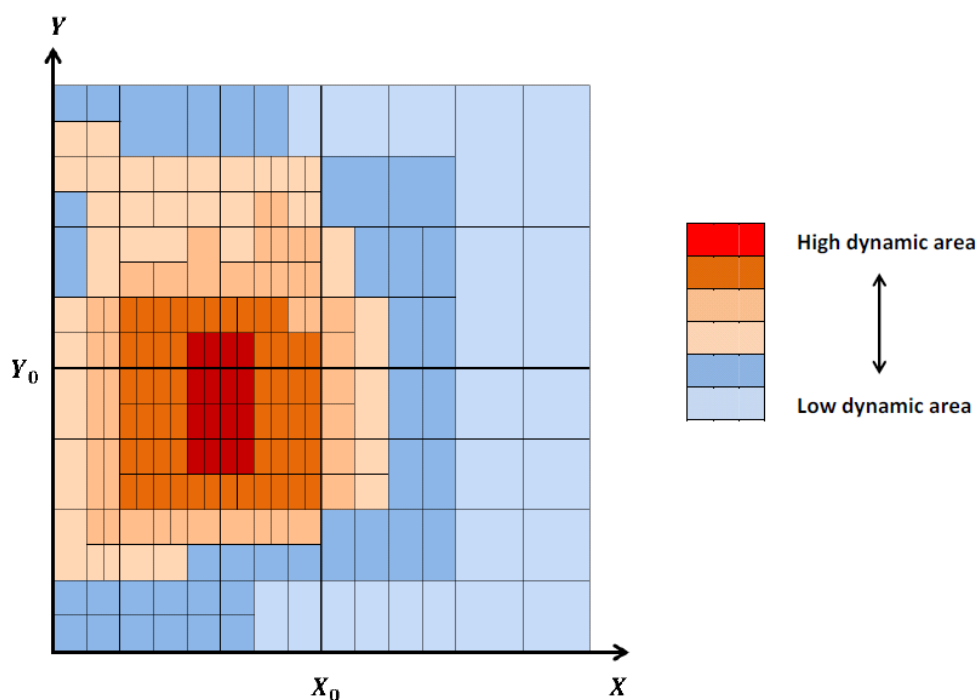


Figure 11 : Illustration de l'apport de l'ADS dans la détection de zones à forte dynamique

Une version de l'ADS a été implémentée par Thales en amont du stage dans PACE. Mon rôle dans ce stage a été de caractériser du mieux possible l'erreur pour améliorer l'algorithme de splitting mis en place avant mon arrivée et de développer un autre algorithme de splitting basé sur le même principe.

L'ADS a montré des faiblesses pour conserver une erreur en dessous d'un seuil fixé comme l'a prouvé le stage de Paul Mory et les tests d'Emanuel Bignon. En effet lorsque l'erreur atteint le seuil fixé avant la fin de la propagation aucun découpage ne peut se faire sans aucune erreur et donc l'erreur dépasse le seuil fixé. Pour pallier ces inconvénients le nouvel algorithme peut être une solution.

2.3 Applications d'évaluation de Taylor

2.3.1 Cas mathématiques

Les cas mathématiques qui nous intéressent ici sont :

- les fonctions de bases comme les fonctions exponentielles ou inverses



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

- les équations différentielles comme le système dynamique différentiel de Lorenz ou le problème à deux corps, celles-ci étant à la base de la mécanique spatiale.

Les exemples cités ci-dessus ne sont pas exhaustifs mais les résultats que nous devons obtenir sont connus. Pour valider la méthode de calcul, nous la testerons d'abord sur ces cas mathématiques simples dont la complexité est croissante. Si le calcul donne un résultat convenable par rapport aux résultats connus, alors le cas suivant est abordé.

2.3.2 Logiciels

Dans un deuxième temps, nous testerons sur deux logiciels confidentielles.



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

3 Partie II : Mise en place du banc d'essai

Dans cette deuxième partie, on veut normaliser les choses pour pouvoir comparer les résultats. Comparer les résultats est essentiel pour valider un modèle par rapport à un autre. Pour ce faire, un banc d'essai a été mis au point permettant de faire les dites comparaisons.

3.1 Motivation

Lors des stages ou R&T précédents, seuls des bancs d'essais de validation avaient été mis en place. Aucune comparaison n'était possible. Il a donc été nécessaire de mettre en place un banc d'essai avec les trois qualités essentielles suivantes :

- Efficacité
- Etre modulable
- Automaticité.

Ces qualités sont indispensables pour que ce banc d'essai reste valable dans le futur.

3.2 Besoin Fonctionnel

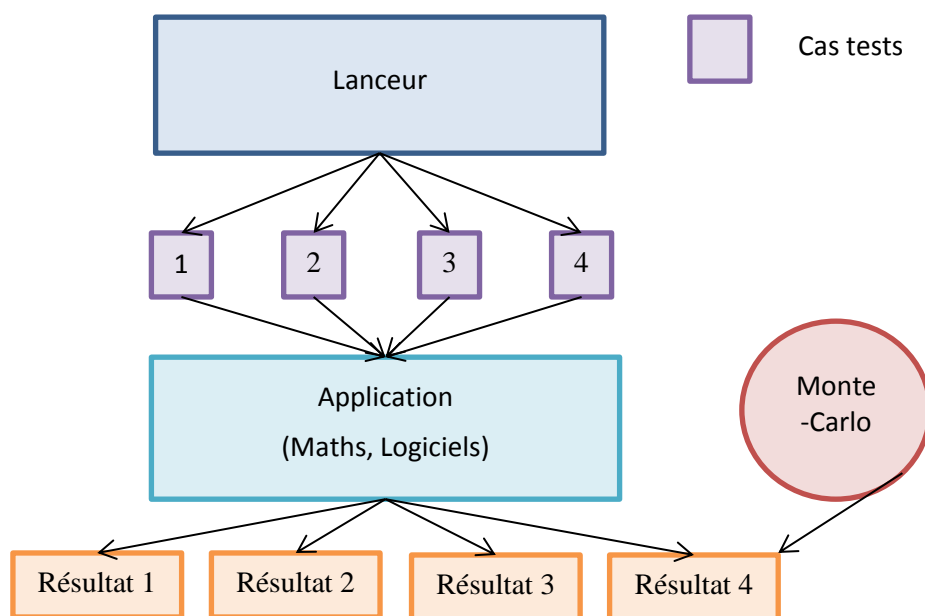


Figure 12 : Schéma fonctionnel

Pour valider l'efficacité de la méthode de Taylor, nous avons besoin :

- de déterminer l'approximation que donne le polynôme de Taylor à différents ordres et le comparer à la fonction exacte (approchée par la méthode Monte-Carlo)
- de connaître la différence entre ces polynômes et la fonction (pour chaque polynôme $\Delta = |p_{k,j}(x) - f(x)|$)

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

- de déterminer les écarts entre les estimations générées par les estimateurs de l'erreur et l'erreur absolue réelle ($\Delta = |p_{k,j}(x) - f(x)|$)
- de vérifier que l'erreur réelle est toujours inférieure à l'erreur maximale admise pour l'estimateur choisi.

3.3 Conception

3.3.1 Interfaces entrées / sorties

3.3.1.1 Les entrées

Pour chaque fonction ou propagation, il existe deux types d'entrées :

- les points du domaine de départ
- la fonction ou propagation évaluée ou les résultats de celle-ci obtenus par Monte-Carlo ou autres.

Les points sont toujours créés directement par un programme. La fonction est soit déjà calculée et donc sous forme de fichier, soit un programme qui prend en entrée les points.

3.3.1.2 Les sorties

En sortie on génère des fichiers textes de $P(x)$, $\Delta = |p_{k,j}(x) - f(x)|$, $\max \Delta$... De plus, des graphiques sont créés : un histogramme des erreurs estimées et l'erreur maximale, deux graphiques de points de $P(x)$, $f(x)$ en fonction de $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_v - x_0$, et Δ en fonction de $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_v - x_0, \dots$

3.3.2 Diagramme UML

Pour pouvoir répondre aux besoins précédents il faut :

- créer un maillage de points sur le domaine de départ x_i
- calculer les éphémérides de la fonction sur l'ensemble du maillage $(t_k, f(x_i)) \forall k, i$
- calculer les éphémérides des polynômes $(t_k, P_{k,j}) \forall k, j$
- calculer les éphémérides des polynômes sur l'ensemble du maillage $(t_k, P_{k,j}(x_i)) \forall k, j, i$
- calculer l'ensemble des différences Δ
- calculer l'erreur maximale et les erreurs estimées sur le domaine

Avec ces éléments, le synoptique de calculs a été construit et est présenté Figure 13.



Référence : RAPPORT Stage de fin d'étude Climène Lequien

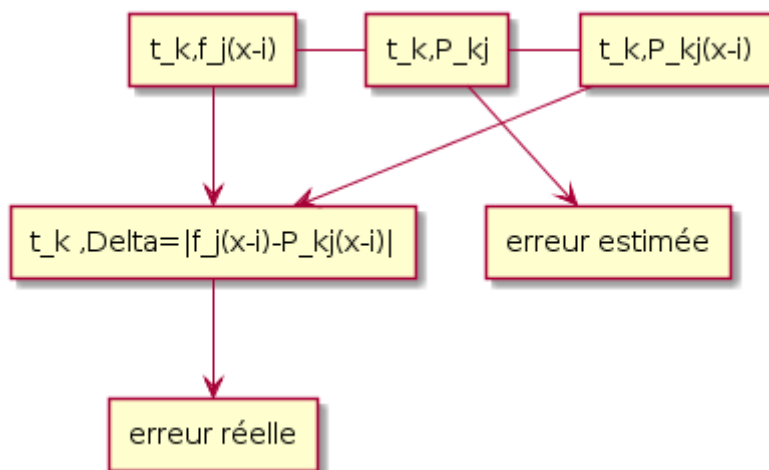


Figure 13 : Synoptique des calculs

Besoins	Solution choisie
Avoir un unique benchmark pour n'importe quel problème	Créer l'interface ltestCase : tous les tests sont implémentés chacun dans une classe différente, (ces classes sont « regroupées » dans quatre classes abstraites)
Générer différentes erreurs	La classe CalculationError est évolutive. On peut implémenter autant d'erreurs que nécessaire car la sortie est une liste.
Générer les Δ et $ x - x_0 $	La classe Distance permet ces calculs.
Faire un nouvelle algorithme	Les classes sont présentes dans le dossier du même nom
Estimer l'erreur de différentes manières	L'interface IEstimatorError permet d'implémenter toutes les méthodes souhaitées.
Comparer l'erreur réelle et les erreurs estimées	Pour ça deux méthodes de visualisation : un tableau et un histogramme
Voir l'évolution entre l'erreur et la distance au centre	Faire des graphiques en deux dimensions pour chaque paramètre d'entrée et de sortie, et à chaque éphéméride. Directement dans la classe TimePlot et ScatterPlot grâce à la librairie JFreeChart

Avec ce tableau et les éléments précédents Figure 13 , le diagramme UML a été constitué et est confidentiel.

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

3.3.3 Choix du langage

Deux possibilités s'offrent à nous en termes de programmation : procédurale/structurée ou orientée objet. Cette dernière possède de nombreux avantages tels que : facilité d'organisation, réutilisation, méthode plus intuitive, possibilité d'héritage, facilité de corrections d'un projet tout au long de son existence, etc. C'est ce type de programmation qui a été retenue.

D'autre part, pour des raisons de cohérence avec les programmes déjà développés et de portabilité dans différents environnements d'exécution, l'ensemble de la programmation a été développé en JAVA, y compris les graphiques grâce à la librairie JFreeChart.



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

4 Partie III : Amélioration de la précision de l'erreur estimée

Pour l'ADS, l'erreur est estimée par régression exponentielle, car c'est une régression simple est que cela donne « souvent » des résultats convenables. Cependant, on sait qu'il y a des exemples très simples qui ne suivent pas cette régression d'où l'utilité de l'améliorer.

4.1 Estimation par la régression exponentielle

Dans l'article d'A. Wittig [7], pour couper le domaine de départ lors de l'ADS, il estime l'erreur par une régression exponentielle. Malheureusement il ne démontre pas pourquoi il prend cette fonction, il reste juste factuel. Essayons malgré tout de justifier théoriquement ce choix.

Pour cela reprenons le théorème de Taylor (multidimensionnel) :

$$f(x) = \sum_{l=0}^n \frac{1}{l!} ((x - x_0) \cdot \nabla)^l f(x_0) + \frac{1}{(n+1)!} ((x - x_0) \nabla)^{n+1} f(x_0 + (x - x_0) \times \theta)$$

où l'opérateur de différentiation partielle est défini comme :

$$(h \cdot \nabla)^k = \sum_{\substack{0 \leq \beta_1 \dots \beta_v \leq k \\ \beta_1 + \dots + \beta_v = k}} \frac{k!}{\beta_1! \dots \beta_v!} h_1^{\beta_1} \dots h_v^{\beta_v} \frac{\partial^k}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_v^{\beta_v}}$$

Donc

$$\frac{1}{(n+1)!} ((x - x_0) \nabla)^{n+1} f(x_0 + (x - x_0) \times \theta) = R_n^{x_0}$$

$$R_n^{x_0} = \sum_{\substack{0 \leq \beta_1 \dots \beta_v \leq n+1 \\ |\beta| = n+1}} \frac{(x - x_0)^\beta}{\beta!} \partial^{n+1} f(x_0 + (x - x_0) \times \theta)$$

$$|R_n^{x_0}| = \left| \sum_{\substack{0 \leq \beta_1 \dots \beta_v \leq n+1 \\ |\beta| = n+1}} \frac{(x - x_0)^\beta}{\beta!} \partial^{n+1} f(x_0 + (x - x_0) \times \theta) \right|$$

$$|R_n^{x_0}| \leq \sum_{\substack{0 \leq \beta_1 \dots \beta_v \leq n+1 \\ |\beta| = n+1}} \frac{|(x - x_0)^\beta|}{\beta!} |\partial^{n+1} f(x_0 + (x - x_0) \times \theta)|$$



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

$$|R_n^{x_0}| \leq M \sum_{\substack{0 \leq \beta_1 \dots \beta_v \leq n+1 \\ |\beta| = n+1}} \frac{|x - x_0|^\beta}{\beta!}$$

où M est défini comme :

$$M = \max_{0 \leq \beta_1 \dots \beta_v \leq n+1} |\partial^{n+1} f(x_0 + (x - x_0) \times \theta)|$$

Si M ne varie pas beaucoup selon n alors $\sum_{\substack{0 \leq \beta_1 \dots \beta_v \leq n+1 \\ |\beta| = n+1}} \frac{|x - x_0|^\beta}{\beta!}$ suit une régression exponentielle (développement en série entière) et donc on peut estimer l'erreur par une régression exponentielle dans certains cas. Mais il y a des cas très simples qui ne suivent pas du tout une régression exponentielle comme par exemple $\frac{1}{(1-x)}$. Ces derniers cas nous obligent à chercher une méthode qui pallie cette limitation.

4.2 Estimation basée sur les fonctions analytiques

La véritable question restait entière : y avait-il un estimateur de l'erreur pour toutes les fonctions ? N'arrivant pas à trouver de réponse dans la littérature, sur les conseils de Pierre Mercier, je me suis restreinte à un type de fonctions, les fonctions analytiques.

4.2.1 Rappel sur les fonctions analytiques réelles

Définition :

Soit un ouvert Ω de \mathbb{R}^v et soit une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^v \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est analytique (réelle) dans Ω si, pour tout point x_0 de Ω , il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 dans Ω et une série entière $\sum_{L \in \mathbb{N}^v} a_L(x_0)z^L$ tels que l'on ait, $\forall x \in V_{x_0}$,

$$f(x) = \sum_{L \in \mathbb{N}^v} a_L(x_0)(x - x_0)^L$$

On note $\mathcal{A}(\Omega)$ l'algèbre des fonctions analytiques dans Ω .

Proposition :

Soit un ouvert Ω de \mathbb{R}^v . Une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^v \rightarrow \mathbb{R}$ est analytique si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

- i. La fonction f est de classe C^∞ dans Ω
- ii. Au voisinage de tout point x_0 de Ω , elle est somme de sa série de Taylor en x_0



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

Propriété de complexification :

Soit un ouvert Ω de \mathbb{R}^v . Une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^v \rightarrow \mathbb{R}$ est analytique réelle dans Ω si et seulement il existe un ouvert $\tilde{\Omega}$ de \mathbb{C}^v vérifiant $\Omega \subset \tilde{\Omega} \cap \mathbb{R}^v$ et une fonction holomorphe dans $\tilde{\Omega}$ telle que $F|_{\Omega} = f$.

Propriété de stabilité par composition :

Soit Ω et Ω' des ouverts respectivement de \mathbb{R}^v et de \mathbb{R}^p , soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^v \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application analytique réelle (c'est-à-dire a composante dans $\mathcal{A}(\Omega)$) vérifiant $f(\Omega) \subset \Omega'$ et soit g dans $\mathcal{A}(\Omega')$. Alors $g \circ f$ appartient à $\mathcal{A}(\Omega)$.

4.2.2 Rappel sur les fonctions holomorphes

Définition :

Soit un ouvert Ω de \mathbb{C}^v et soit une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe de classe C^1 . On dit que f est holomorphe si elle vérifie les n équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_1} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_2} = \dots = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_v} = 0$$

L'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω est noté $\mathcal{O}(\Omega)$.

Théorème (Formule intégrale de Cauchy généralisée) :

Soit un ouvert Ω de \mathbb{C}^v et $D(a, R)$ un polydisque quelconque tel que $\bar{D}(a, R) \subset \Omega$ avec $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \Omega$ et $R = (R_1, R_2, \dots, R_n) \in \mathbb{R}^v$. Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\forall z \in D(a, R)$, on a

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^v} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi_1 - z_1)(\xi_2 - z_2) \dots (\xi_n - z_n)} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n$$

où l'ensemble $\Gamma = \{\xi \in \Omega \mid |\xi - a| = R\}$ est le produit des cercles $|\xi_k - a_k| = R_k \forall k \in \llbracket 1, v \rrbracket$ où chacun est orienté dans le sens trigonométrique.

Corollaire :

Soit un ouvert Ω de \mathbb{C}^v . Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ alors f est de classe C^∞ dans Ω .

De plus, si $a \in \Omega$ et $D(a, R)$ est un polydisque tel que $\bar{D}(a, R) \subset \Omega$, alors les coefficients de son développement en série entière dans $\bar{D}(a, R) \subset \Omega$ sont précisément :

$$f(x) = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^v} \beta_\alpha (x - a)^\alpha$$



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

$$\text{avec } \beta_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_v^{\alpha_v}} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z_1 - a_1)^{\alpha_1+1} \dots (z_n - a_v)^{\alpha_v+1}} dz_1 \dots dz_v$$

4.2.3 Idée d'amélioration de l'estimateur de l'erreur

L'idée qui m'est venue en lisant ou relisant les propriétés des fonctions analytiques ou holomorphes est la suivante. Si une fonction est implémentée dans un programme, elle est forcément analytique en un point car c'est une somme de nombres qui peut être représentée par un polynôme. Donc le polynôme de Taylor est une troncature à l'ordre n . Si on prend la réflexion qui est faite dans l'article d'A. Wittig et de P. DiLizia :

$$f(a+h) = \sum_{l=0}^n \frac{1}{l!} ((h) \cdot \nabla)^l f(a) + \frac{1}{(n+1)!} ((h) \cdot \nabla)^{n+1} f(a + (h) \times \theta)$$

On pose pour le reste $R_{an}(h) = \frac{1}{(n+1)!} ((h) \cdot \nabla)^{n+1} f(a + (h) \times \theta)$

L'erreur peut être majorée par l'expression $|R_{an}(h)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \|h\|^{n+1}$. Estimer l'erreur revient à calculer le coefficient $c_{n+1} = \frac{M}{(n+1)!}$. On peut soit considérer que ce coefficient suit une régression exponentielle comme c'est le cas dans l'article, soit qu'il est proche du maximum des coefficients de l'ordre $n+1$ du polynôme de Taylor.

Si f est une fonction analytique alors d'après la propriété de complexification il existe une fonction holomorphe telle que $F|_{\Omega} = f$. Or

$$\forall x \in \Omega \quad f(x) = F|_{\Omega}(x) = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^v} \beta_\alpha (x-a)^\alpha$$

$$\text{avec } \beta_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_v^{\alpha_v}} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z_1 - a_1)^{\alpha_1+1} \dots (z_n - a_v)^{\alpha_v+1}} dz_1 \dots dz_v$$

Tous les coefficients peuvent être calculés à partir de la fonction f . Comme le polynôme de Taylor P est une approximation de f , alors l'erreur est approximée en calculant le maximum des coefficients en remplaçant f par P . Dans ce cas on peut faire comme pour la régression exponentielle, on cherche le coefficient suivant (Analytic estimator error dans les résultats 4.3).

Dans le cas où $\max_{x \in [a, a+h]} |f^{(n+1)}(x) - f^{(n+1)}(a+h)| \leq \varepsilon$ alors $R_{an}(h) \leq \varepsilon \frac{\|h\|^{n+1}}{(n+1)!}$ dans ce cas on approxime $\varepsilon \approx |f^{(n+1)}(a) - f^{(n+1)}(a+h)|$ par les fonctions analytiques (Analytic estimator error 2 dans les résultats 4.3).

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

4.3 Résultats

Les tests pour comparer les estimateurs de l'erreur ont d'abord été effectués sur des fonctions mathématiques simples dont nous ne montrerons qu'un nombre réduit dans ce paragraphe. Sur les histogrammes qui suivent, l'erreur max est l'erreur absolue maximale. De plus les graphiques sont centré en x_0 pour respecter le théorème de Taylor qui centre le polynome en x_0 .

4.3.1 Fonction exponentielle

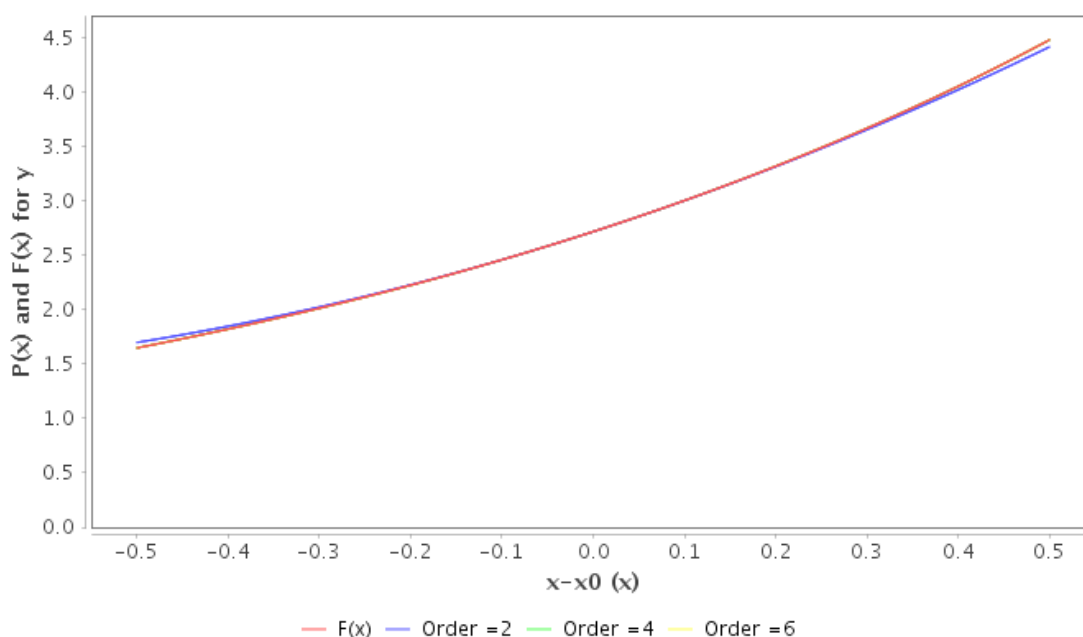


Figure 14: Fonction $f(x) = \exp(x)$ et ses polynômes de Taylor à l'ordre 2,4 et 6

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

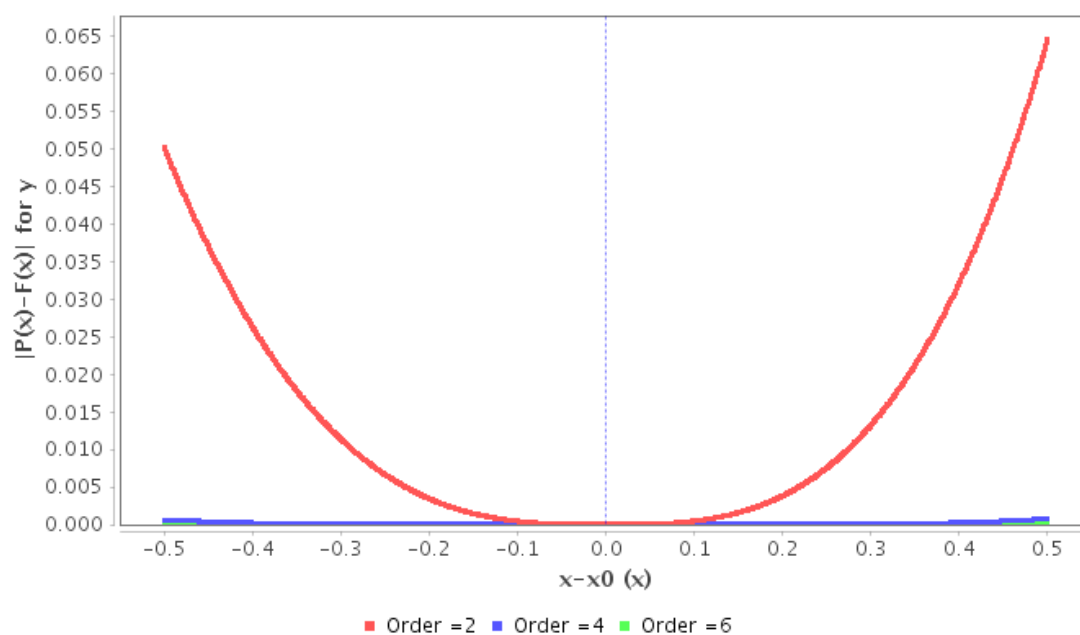


Figure 15 : Valeur absolue de la différence entre la fonction $f(x) = \exp(x)$ et ses polynômes de Taylor à l'ordre 2,4 et 6

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

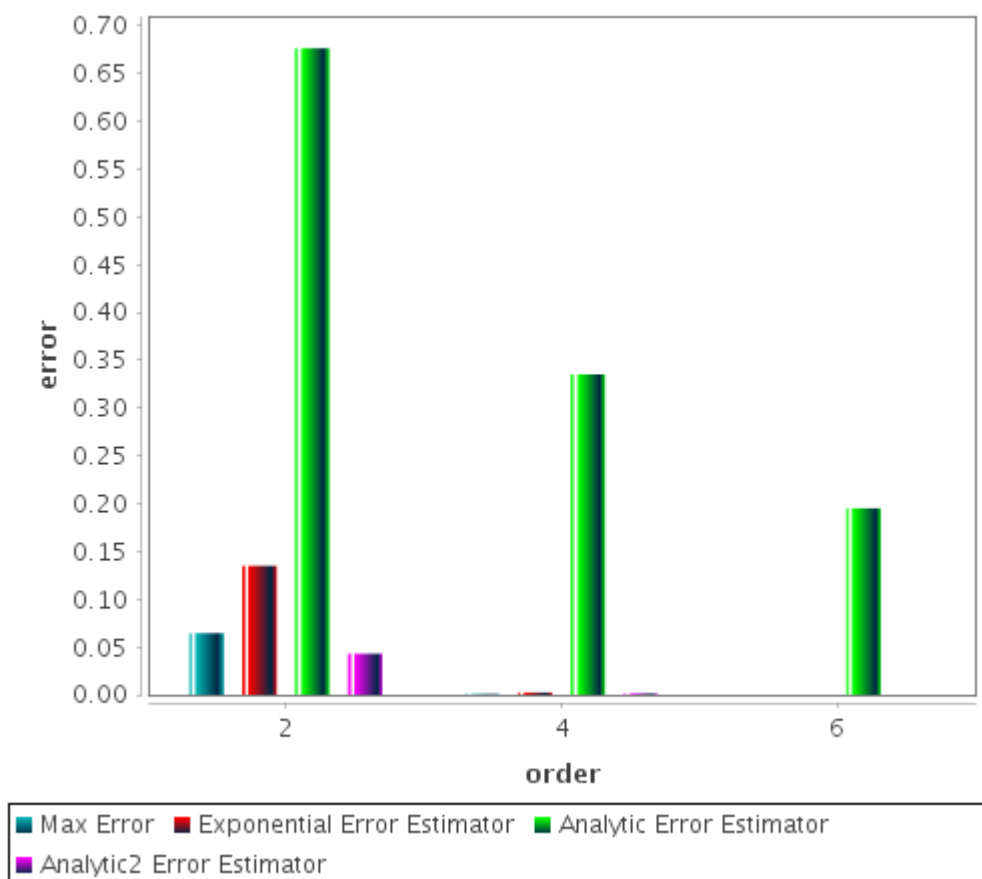


Figure 16 : l'erreur absolue maximale et les erreurs estimées entre la fonction $f(x) = \exp(x)$ et ses polynômes de Taylor à l'ordre 2,4 et 6

Pour rappel : $\exp(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0)^i}{i!} + R_n^{x_0}(x)$ est une fonction à une seule variable ; on peut utiliser toutes les formules du reste connues (cf. § 2.2.1.3).

Sur la Figure 14, la Figure 15 et la Figure 16, les calculs sont réalisés sur l'intervalle $[1,2]$. Sur les deux premières, l'erreur diminue lorsque l'ordre du polynôme de Taylor augmente, et comme vue dans [2] le temps de calcul augmente avec l'ordre.

Sur l'histogramme (Figure 16) l'erreur estimée par la première méthode basée sur les propriétés des fonctions analytiques est beaucoup plus grande que l'erreur maximale réelle et moins proche de celle-ci que l'erreur estimée par la méthode basée sur la régression exponentielle.

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

4.3.2 Fonction inverse

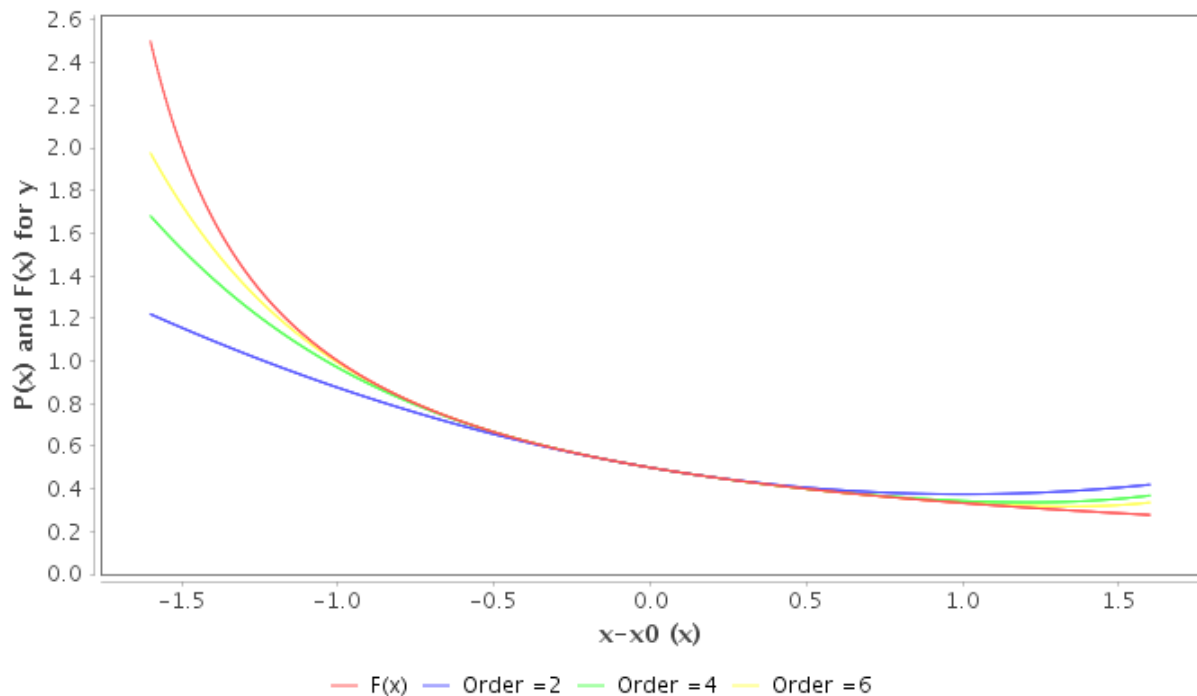
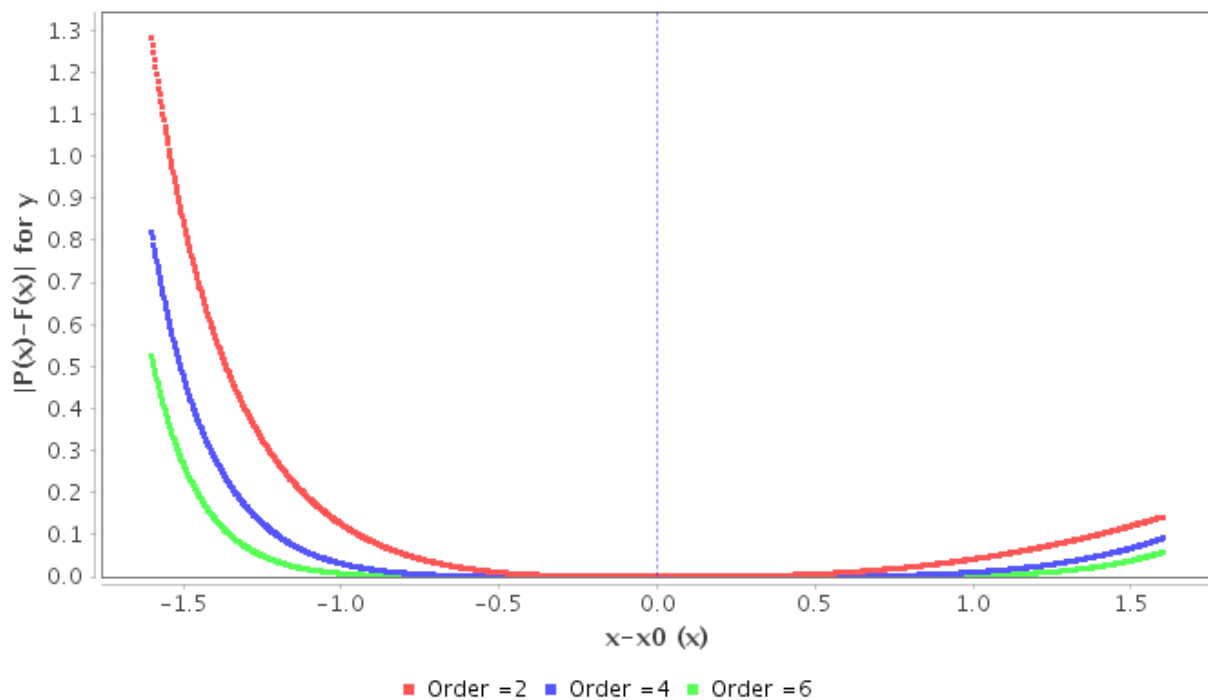


Figure 17: la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ et ses polynômes de Taylor à l'ordre 2,4 et 6



Référence : RAPPORT Stage de fin d'étude Climène Lequien

Figure 18 : La valeur absolue de la différence entre la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ et ses polynômes de Taylor à l'ordre 2,4 et 6

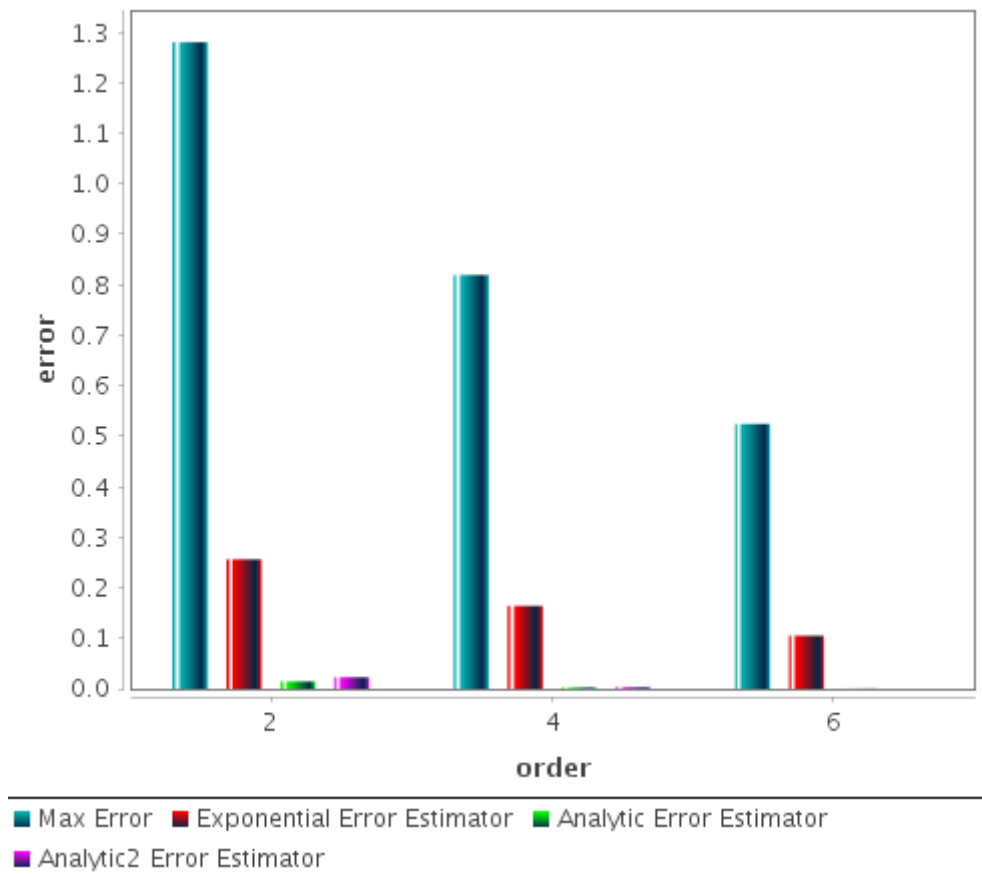


Figure 19 : L'erreur absolue maximale et les erreurs estimées entre la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ et ses polynômes de Taylor à l'ordre 2,4 et 6

La Figure 17 montre la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ taylorisée aux ordres 2, 4 et 6, sur l'intervalle $[0.4, 3.9]$.

La fonction $\frac{1}{x} = -\sum_{i=0}^n (x+1-x_0)^i + R_n^{x_0}(x)$ est une fonction à une seule variable et comme pour la fonction exponentielle, les formules du reste connues peuvent s'appliquer (cf. 2.2.1.3).

Contrairement au cas précédent, toutes les erreurs estimées par les méthodes basées sur les propriétés des fonctions analytiques sont beaucoup plus petites que l'erreur maximale réelle (Figure 19) et inférieures aux erreurs estimées par la méthode basée sur la régression exponentielle.

4.3.3 Fonction $\exp(x * y)$

Dans cette exemple, j'ai choisi de ne pas faire figurer la représentation de la fonction car elle est peu claire et peu utile pour notre comparaison.



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

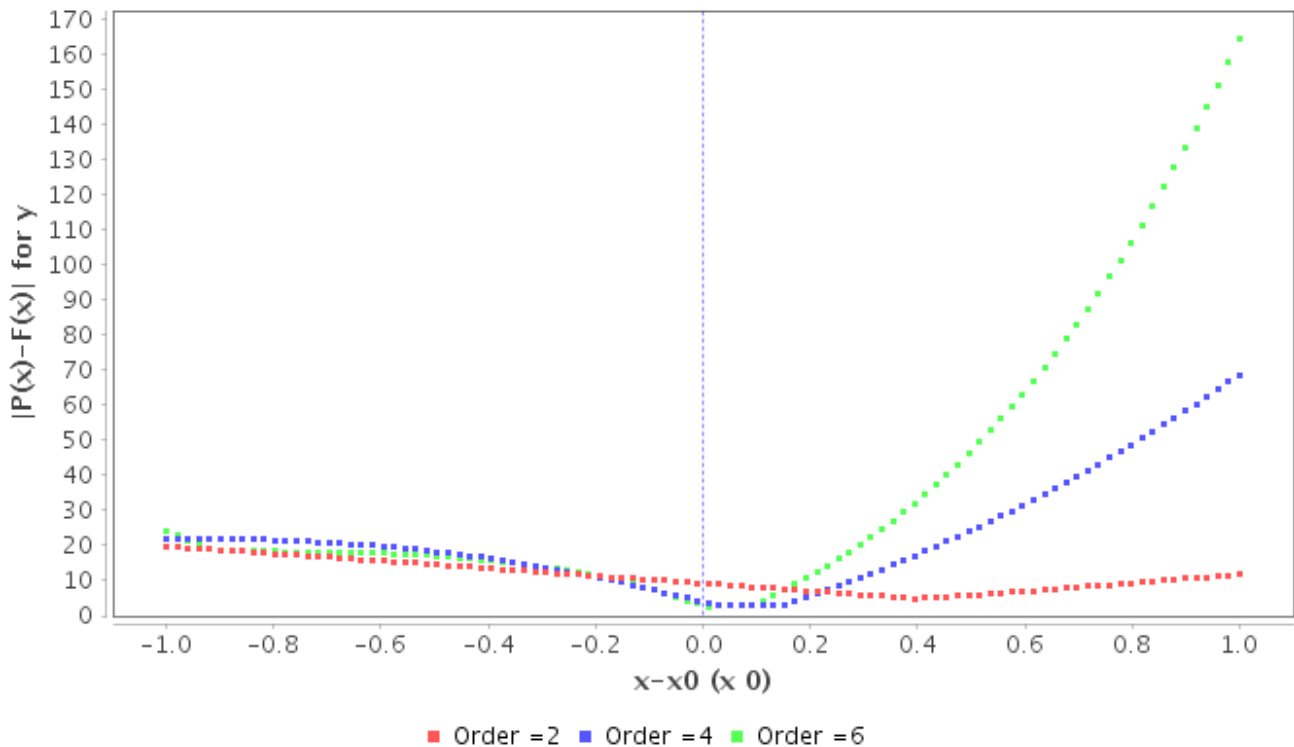


Figure 20 : Le maximum sur y de la valeur absolue de la différence entre la fonction $f(x, y) = \exp(x \times y)$ et ses polynômes de Taylor à l'ordre 2, 4 et 6

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

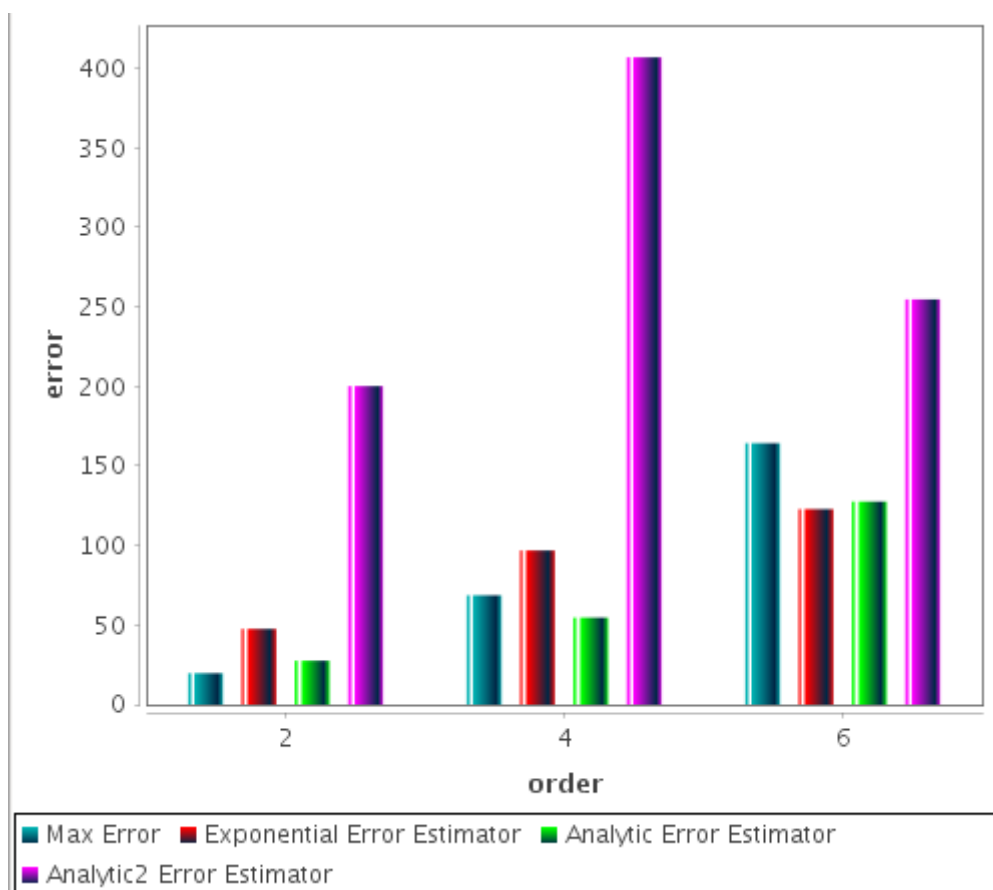


Figure 21 : L'erreur absolue maximale et les erreurs estimées entre la fonction $f(x,y) = \exp(x \times y)$ et ses polynômes de Taylor à l'ordre 2,4 et 6

La Figure 20 et la Figure 21 sont calculées sur le domaine $[1,3] \times [0,2]$.

Sur l'histogramme (Figure 21), on voit que, au contraire des cas précédents, l'erreur augmente avec l'ordre et les erreurs calculées à l'aide de la régression exponentielle majore l'erreur max admise sauf quand elle est développée à l'ordre 6.. De plus les erreurs estimées par la deuxième méthode basée sur les propriétés des fonctions analytiques sont beaucoup plus grandes que l'erreur maximale réelle. La différence entre ces deux fonctions est très supérieure à celle qu'on peut calculer entre l'erreur maximale et les autres méthodes de calcul, notamment celle basée sur la régression exponentielle.

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

4.3.4 Equation différentielle $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y \\ y_0 = x \end{cases}$

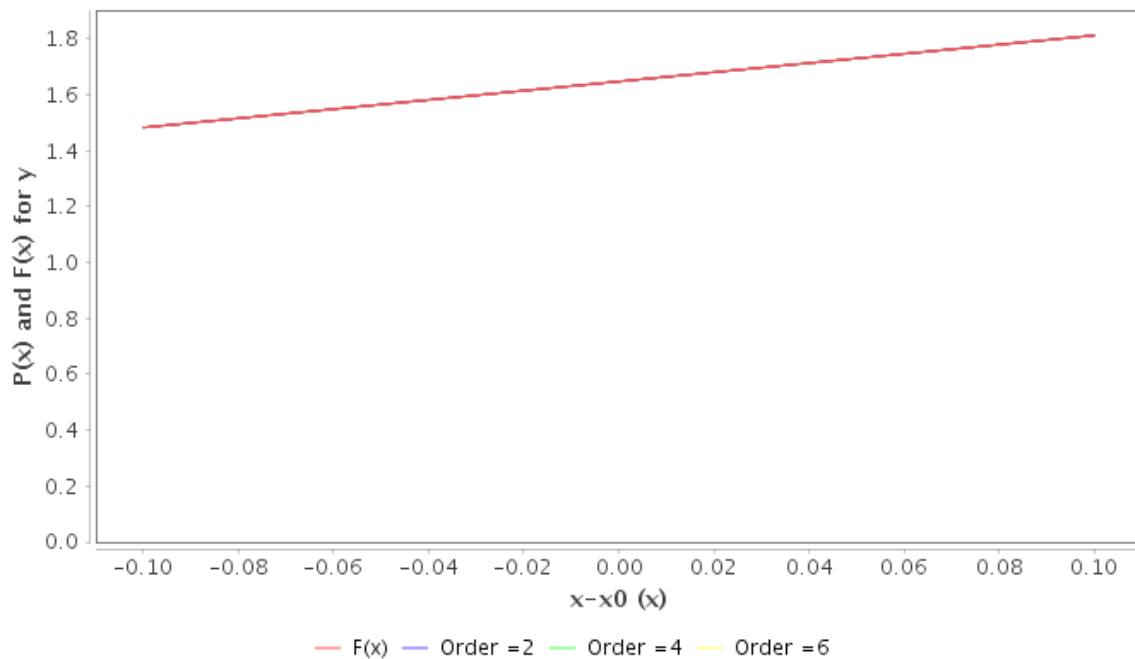


Figure 22: La solution à l'équation différentielle $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y \\ y_0 = x \end{cases}$ et ses polynômes de Taylor à l'ordre 2,4 et 6 à $t = 0.5$

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

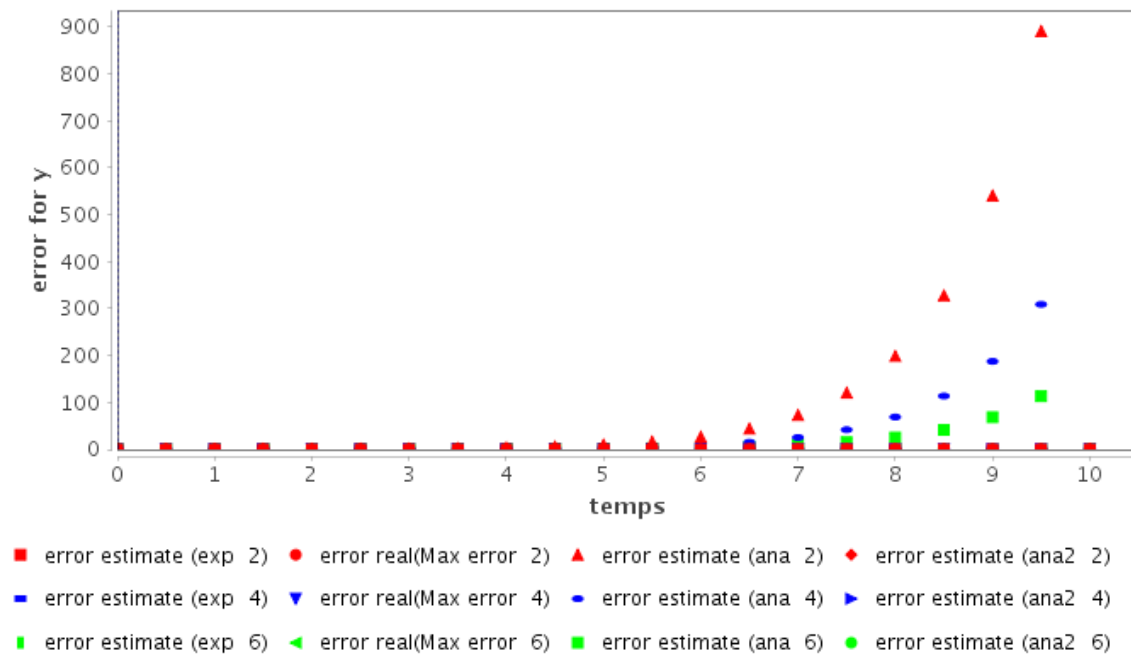


Figure 23 : L'erreur absolue maximale et les erreurs estimées entre : la solution à l'équation différentielle $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y \\ y_0 = x \end{cases}$ et ses polynômes de Taylor à l'ordre 2,4 et 6 pour $t \in [0, 10]$

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

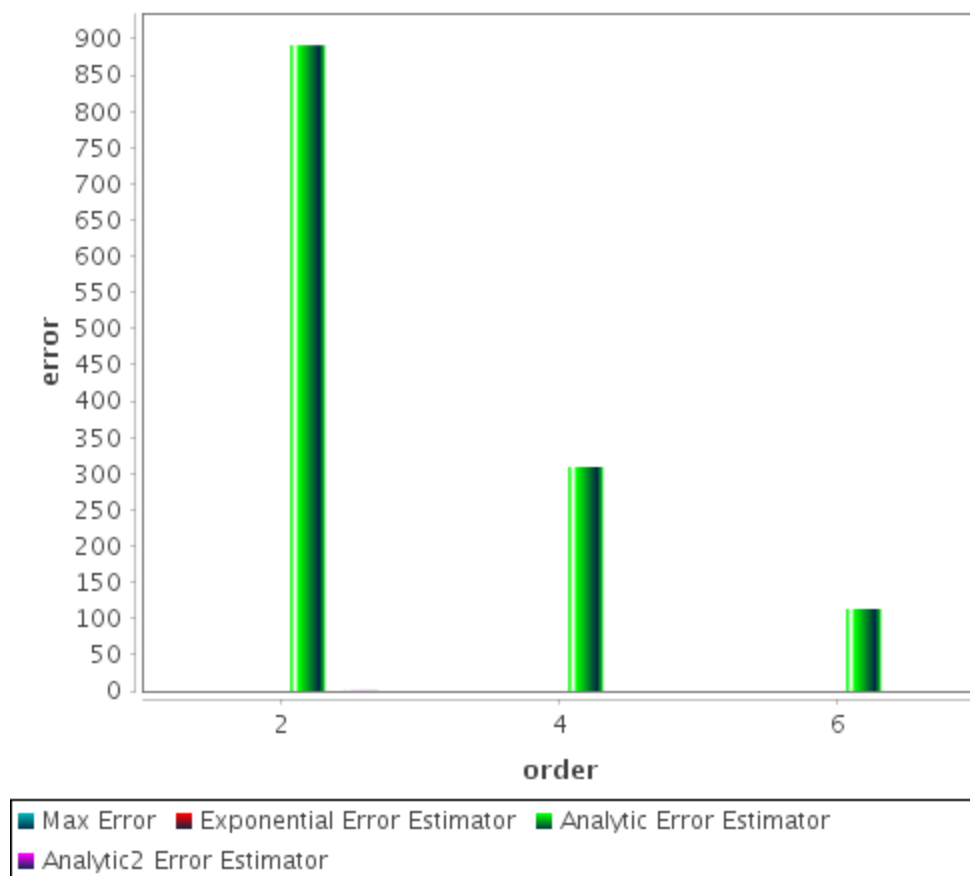


Figure 24 : L'erreur absolue maximale et les erreurs estimées entre : la solution à l'équation différentielle $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y \\ y_0 = x \end{cases}$ et ses polynômes de Taylor à l'ordre 2,4 et 6 à $t = 10$

La Figure 22 montre la solution à l'équation différentielle $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y \\ y_0 = x \end{cases}$ c'est-à-dire $f(x, t) = xe^t$ taylorisée aux ordres 2, 4 et 6 et à $t = 0.5$, sur le domaine $[-0.10, 0.10] \times [0, 10]$. Ce dernier cas est particulier car à t fixé, la solution est une droite ; l'erreur réelle maximale absolue est donc nulle et reste nulle à tout t .

Pour intégrer cette équation différentielle, nous avons utilisé la méthode de Runge-Kutta (à l'ordre 4) (cf. [10].)

Comme on peut le voir sur la Figure 23 et la Figure 24, l'erreur estimée par la première méthode basée sur les propriétés des fonctions analytiques est vraiment supérieure à zéro, et ce avant la fin de l'intégration alors que l'erreur estimée par la méthode basée sur la régression exponentielle est nulle.

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

4.3.5 Conclusion

Grâce à ces résultats on peut conclure que l'estimateur par la méthode basée sur la régression exponentielle est le meilleur à notre disposition. Grâce à ces simulations, on peut comprendre pourquoi on ne peut pas trouver un bon estimateur en n'ayant que le polynôme de Taylor tronqué à l'ordre n .

Soient un polynôme $P_a(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$ et deux fonctions $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ tel que $\exists! a \in \mathbb{R}^n$: $f(a) = g(a) \approx P_a(a)$ et $\forall x \neq a \in \mathbb{R}^n f(x) \neq g(x)$. On ne peut pas savoir si P_a est le polynôme de Taylor tronqué de f ou de g . Comme $\forall x \neq a \in \mathbb{R}^n f(x) \neq g(x)$ cela implique que $\forall x \neq a \in \mathbb{R}^n |f(x) - P_a(x)| \neq |g(x) - P_a(x)|$. Or si on a que P_a on estimera la même erreur pour $|f(x) - P_a(x)|$ et pour $|g(x) - P_a(x)|$. Mais elles sont différentes donc on ne peut pas estimer correctement l'erreur avec uniquement P_a

4.4 Piste de Recherche

Comme vu précédemment, il semble improbable de trouver une estimation de l'erreur valable pour toutes les fonctions à partir du polynôme seul. Deux hypothèses ont alors été envisagées :

- créer un polynôme de l'erreur
- calculer une erreur au cours de la taylorisation avec un domaine en entrée dès le début.

La deuxième solution me semble moins pertinente car elle empêche le changement de domaine. Hélas par manque de temps ces méthodes n'ont pas été étudiées car elles obligent à changer l'ensemble des fonctions de PACE pour calculer l'erreur au cours des opérations et ensuite de vérifier cette estimation.



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

5 Partie IV : Amélioration de la précision de l'ADS

L'ADS ayant prouvé des faiblesses pour gérer la précision, il faut l'améliorer ; pour cela on va créer ce qui suit.

5.1 Nouvel algorithme

Après avoir mis au point l'algorithme, nous avons cherché à l'appliquer à des cas concrets détaillés ci-après.

5.1.1 Logiciel 1

5.1.1.1 Cas 1

ORDRE 2	Erreur maximale acceptée	Erreur maximale estimée	Erreur maximale réelle	Nombre de domaines	Gain en temps de calcul par rapport au Monte-Carlo pour 1000 runs (fois plus rapide)	% de points dont erreur réelle < erreur maximale acceptée
Sortie 1	infini	$3,16 \cdot 10^{-4}$	1,52	1		100%
Sortie 2	infini	$1,00 \cdot 10^{-6}$	$1,78 \cdot 10^{-6}$	1		100%
Sortie 3	infini	$1,33 \cdot 10^{-9}$	$2,76 \cdot 10^{-5}$	1		100%
Sortie 4	infini	$7,99 \cdot 10^{-8}$	$1,40 \cdot 10^{-4}$	1		100%
Sortie 5	infini	$7,54 \cdot 10^{-4}$	$2,05 \cdot 10^{-3}$	1		100%
Sortie 6	infini	$3,27 \cdot 10^{-5}$	$2,06 \cdot 10^{-3}$	1		100%

Tableau 1 : Performances de Taylor à l'ordre 2 sur cas 1

5.1.1.2 Cas 2

ORDRE 2	Erreur maximale	Erreur maximale	Erreur maximale	Nombre de	Gain en temps de calcul	en de par	% de points dont erreur réelle <
---------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------	-------------------------	-----------	----------------------------------



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

	acceptée	estimée	réelle	domaines	rapport au Monte-Carlo pour 1000 runs (fois plus rapide)	erreur maximale acceptée
Sortie 1	infini	$7,79 \cdot 10^{13}$	$1,24 \cdot 10^{12}$	1		100%
Sortie 2	infini	459941,11	13988,07	1		100%
Sortie 3	infini	747,59	53,14	1		100%
Sortie 4	infini	1175102,06	3,62	1		100%
Sortie 5	infini	2810554,58	5,35	1		100%
Sortie 6	infini	$2,00 \cdot 10^9$	6,21	1		100%

Tableau 2 : Performances de Taylor à l'ordre 2 sur cas 2

5.1.1.3 Cas 3

ORDRE 2	Erreur maximale acceptée	Erreur maximale estimée	Erreur maximale réelle	Nombre de domaines	Gain en temps de calcul par rapport au Monte-Carlo pour 1000 runs (fois plus rapide)	% de points dont erreur réelle < erreur maximale acceptée
Sortie 1	infini	$7,87 \cdot 10^{-4}$	61,29	1		100%
Sortie 2	infini	$7,47 \cdot 10^{-7}$	$6,00 \cdot 10^{-6}$	1		100%
Sortie 3	infini	$3,24 \cdot 10^{-9}$	$1,00 \cdot 10^{-7}$	1		100%
Sortie 4	infini	$2,75 \cdot 10^{-5}$	$9,64 \cdot 10^{-5}$	1		100%
Sortie 5	infini	$2,66 \cdot 10^{-4}$	$3,34 \cdot 10^{-4}$	1		100%
Sortie 6	infini	$1,06 \cdot 10^{-3}$	6,27	1		100%

Tableau 3 : Performances de Taylor à l'ordre 2 sur cas 3



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

5.1.1.4 Cas 4

ORDRE 2	Erreur maximale acceptée	Erreur maximale estimée	Erreur maximale réelle	Nombre de domaines	Gain en temps de calcul par rapport au Monte-Carlo pour 1000 runs (fois plus rapide)	% de points dont erreur réelle < erreur maximale acceptée
Sortie 1	infini	$8,93 \cdot 10^{-5}$	14,43	1		100%
Sortie 2	infini	$7,66 \cdot 10^{-6}$	$1,52 \cdot 10^{-5}$	1		100%
Sortie 3	infini	$4,72 \cdot 10^{-9}$	$9,22 \cdot 10^{-8}$	1		100%
Sortie 4	infini	$2,17 \cdot 10^{-5}$	$2,25 \cdot 10^{-5}$	1		100%
Sortie 5	infini	$1,88 \cdot 10^{-2}$	$3,63 \cdot 10^{-2}$	1		100%
Sortie 6	infini	$1,39 \cdot 10^{-3}$	$5,00 \cdot 10^{-2}$	1		100%

Tableau 4 : Performances de Taylor à l'ordre 2 sur cas 4

5.1.2 Logiciel 2

5.1.2.1 Cas 1

ORDRE 2	Erreur maximale acceptée	Erreur maximale estimée	Erreur maximale réelle	Nombre de domaines	Gain en temps de calcul par rapport au Monte-Carlo pour 5000 runs (fois plus rapide)	% de points dont erreur réelle < erreur maximale acceptée
Sortie 1	infini	14,48	38,19	1	405	100%
Sortie 2	infini	79,35	90,97	1	405	100%

Tableau 5 : Performances de Taylor à l'ordre 2 sur cas 1



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

ORDRE 2	Erreur maximale acceptée	Erreur maximale estimée	Erreur maximale réelle	Nombre de domaines	Gain en temps de calcul par rapport au Monte-Carlo pour 5000 runs (fois plus rapide)	% de points dont erreur réelle < erreur maximale acceptée
Sortie 1	10	6,77	37,19	5	81	98,67%
Sortie 2	10	7,07	40,54	5	81	92,75%
Sortie 1	5	4,95	37,19	19	21	94,92%
Sortie 2	5	3,19	39,98	19	21	89,52%
Sortie 1	2,5	2,48	36,58	87	5	90,51%
Sortie 2	2,5	2,42	39,98	87	5	86,26%

Tableau 6 : Performances du nouvel algorithme Taylor à l'ordre 2 sur cas 1

ORDRE 3	Erreur maximale acceptée	Erreur maximale estimée	Erreur maximale réelle	Nombre de domaines	Gain en temps de calcul par rapport au Monte-Carlo pour 5000 runs (fois plus rapide)	% de points dont erreur réelle < erreur maximal accepté
Sortie 1	infini	2263,53	90,98	1	61	100%
Sortie 2	infini	753,67	244,47	1	61	100%

Tableau 7 : Performances de Taylor à l'ordre 3 sur cas 1

ORDRE 3	Erreur maximale acceptée	Erreur maximale estimée	Erreur maximale réelle	Nombre de domaines	Gain en temps de calcul par rapport au Monte-Carlo pour 5000 runs (fois plus rapide)	% de points dont erreur réelle < erreur maximal accepté
---------	--------------------------	-------------------------	------------------------	--------------------	--	---

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

					rapide)	
Sortie 1	10	8,63	37,12	13	4,69	98,69%
Sortie 2	10	6,34	39,87	13	4,69	94,74%
Sortie 1	5	4,71	37,19	25	2,4	94,87%
Sortie 2	5	4,81	40	25	2,4	89,54%
Sortie 1	2,5	2,46	37	111	0,5	90,40%
Sortie 2	2,5	2,38	40	111	0,5	85,98%

Tableau 8 : Performances du nouvel algorithme Taylor à l'ordre 3 sur cas 1

Dans le cas 1, on voit qu'il vaut mieux rester à l'ordre 2 car l'ordre 3 (algèbre plus lourde à créer) apporte peu mis à part augmenter la dispersion (l'erreur maximale est beaucoup plus grande sur le **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** que sur le **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**). Il faudrait donc augmenter le nombre de découpes ce qui a pour conséquence d'augmenter le temps de calcul. Les résultats, pour l'ordre 2, ne sont pas optimaux car il existe toujours des points au-dessus du seuil acceptable mais plus de 85 % des points sont toujours en dessous du seuil. Tant qu'un seuil très bas n'est pas exigé, les temps de calcul sont toujours inférieurs au Monte-Carlo.

Remarque :

- Le temps de calcul est directement proportionnel au nombre de domaines. Vous avez donc juste besoin du temps de calcul d'une propagation de Taylor sur un domaine et du nombre de domaines.
- Sur le Tableau 8, on voit que pour l'erreur maximale acceptée de 2,5 sur les sorties 1 et 2, le temps pour 5000 runs de Monte-Carlo est deux fois plus court que celui de Taylor avec le nouvel algorithme. Il faut se rappeler que lorsque le nombre de runs augmente, le temps de calcul Monte-Carlo augmente proportionnellement alors que celui de Taylor avec le nouvel algorithme ne change quasiment pas (cf : 2.1).

5.1.2.2 Cas 2

La conclusion des calculs précédents nous ont conduits à limiter les calculs à l'ordre 2.

ORDRE 2	Erreur maximale acceptée	Erreur maximale estimée	Erreur maximale réelle	Nombre de domaines	Gain en temps de calcul par rapport au Monte-Carlo pour 5000 runs (fois plus)	% de points dont erreur réelle < erreur maximale acceptée
---------	--------------------------	-------------------------	------------------------	--------------------	---	---



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

					rapide)	
Sortie 1	infini	3,03	14,83	1	342	100%
Sortie 2	infini	0,28	6,21	1	342	100%

Tableau 9 : Performances de Taylor à l'ordre 2 sur cas 2

ORDRE 2	Erreur maximale acceptée	Erreur maximale estimée	Erreur maximale réelle	Nombre de domaines	Gain en temps de calcul par rapport au Monte-Carlo pour 5000 runs (fois plus rapide)	% de points dont erreur réelle < erreur maximale acceptée
Sortie 1	10	3,03	14,83	1	342	98.30%
Sortie 2	10	0,28	6,21	1	342	100%
Sortie 1	5	3,03	14,83	1	342	75.39%
Sortie 2	5	0,28	6,21	1	342	99.75%
Sortie 1	2.5	0,89	12,31	3	114	45.70%
Sortie 2	2.5	0.067	4,37	3	114	94.24%
Sortie 1	1	0,89	12,31	3	114	19.93%
Sortie 2	1	0.067	3,99	3	114	53.95%

Tableau 10 : Performances du nouvel algorithme Taylor à l'ordre 3 sur cas 2

Dans le cas 2, on voit que l'erreur estimée est mauvaise sur le domaine de départ donc elle se répercute quand on découpe. Les résultats sont donc mauvais.

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

6 Conclusion

Ces cinq mois passés chez Thales Services à Toulouse m'ont permis de découvrir le monde de l'entreprise en France, dans la mesure où la plupart de mes stages précédents se sont réalisés en laboratoire. Ce fut en ce point une expérience très enrichissante et une approche intéressante du métier d'ingénieur.

Les incertitudes de mesure initiale des systèmes dynamiques peuvent engendrer des erreurs plus ou moins importantes sur leur évolution, et ce jusqu'à leur état final. L'évolution de ces incertitudes ainsi que leur maîtrise est un des points clé pour déterminer l'évolution d'un système.

Généralement, pour évaluer cette évolution, un grand ensemble de conditions initiales est simulé et l'étude statistique des résultats de ces simulations (méthode de Monte-Carlo) nous renseigne sur la probabilité du système final. Malheureusement, cela est extrêmement consommateur de temps de calcul.

C'est dans ce cadre que la méthode de Taylor a été mise en place dans le but d'effectuer une seule simulation sous forme de polynôme et de l'évaluer pour toutes les conditions initiales. Mais cette méthode augmente les erreurs commises.

Ce stage avait donc pour but d'améliorer la précision sans trop augmenter le temps de calcul et ainsi, bénéficier de ce gain pour éventuellement gagner sur la précision du calcul en augmentant le nombre de points ayant des conditions initiales différentes ou pour tout simplement augmenter la vitesse de calcul d'un logiciel encore plus complexe.

Pour cela, nous avons utilisé, l'outil mathématique qu'est l'algèbre de Taylor, l'ADS ainsi que la librairie PACE.

Pour améliorer la précision, nous nous sommes rapidement rendu compte que le premier point à aborder était de tenter d'améliorer l'estimation de l'erreur commise. Le théorème de Taylor dit que plus le point est proche du centre, plus l'erreur est faible. Aussi, si on veut garder l'erreur en dessous d'un certain seuil, il faut pouvoir estimer l'erreur correctement. Pour cela, nous avons mis en place deux estimateurs basés sur les fonctions analytiques et nous les avons testés. Malheureusement, ces méthodes ont échoué aux tests les plus simples.

En repartant du théorème de Taylor, deux possibilités s'offrent à nous pour faire diminuer l'erreur : il faut soit augmenter l'ordre (ce qui augmente fortement le temps de calcul), soit diminuer le domaine de départ autour du centre. C'est sur ce principe que nous avons créé et implémenté le nouvel algorithme confidentiel. Cette méthode a passé tous les cas mathématiques avec succès. Afin de valider cette méthode de calcul, nous l'avons appliquée à des cas concrets, la rentrée dans l'atmosphère de différents satellites qui se fragmentent.

Les résultats sont certes imparfaits mais une grande majorité des sorties restent en-dessous du seuil de précision voulu pour le cas 1 du logiciel 2. Toutes les autres méthodes basées sur l'algèbre



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

de Taylor donnaient des erreurs beaucoup plus grandes. Par ailleurs, si on prend en compte le fait que l'estimateur de l'erreur n'est pas toujours un majorant de l'erreur, les résultats peuvent être considérés comme convenables.

Pour améliorer l'estimateur de l'erreur, une piste d'évolution peut être entrevue en créant un polynôme de l'erreur.



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

BIBLIOGRAPHIE

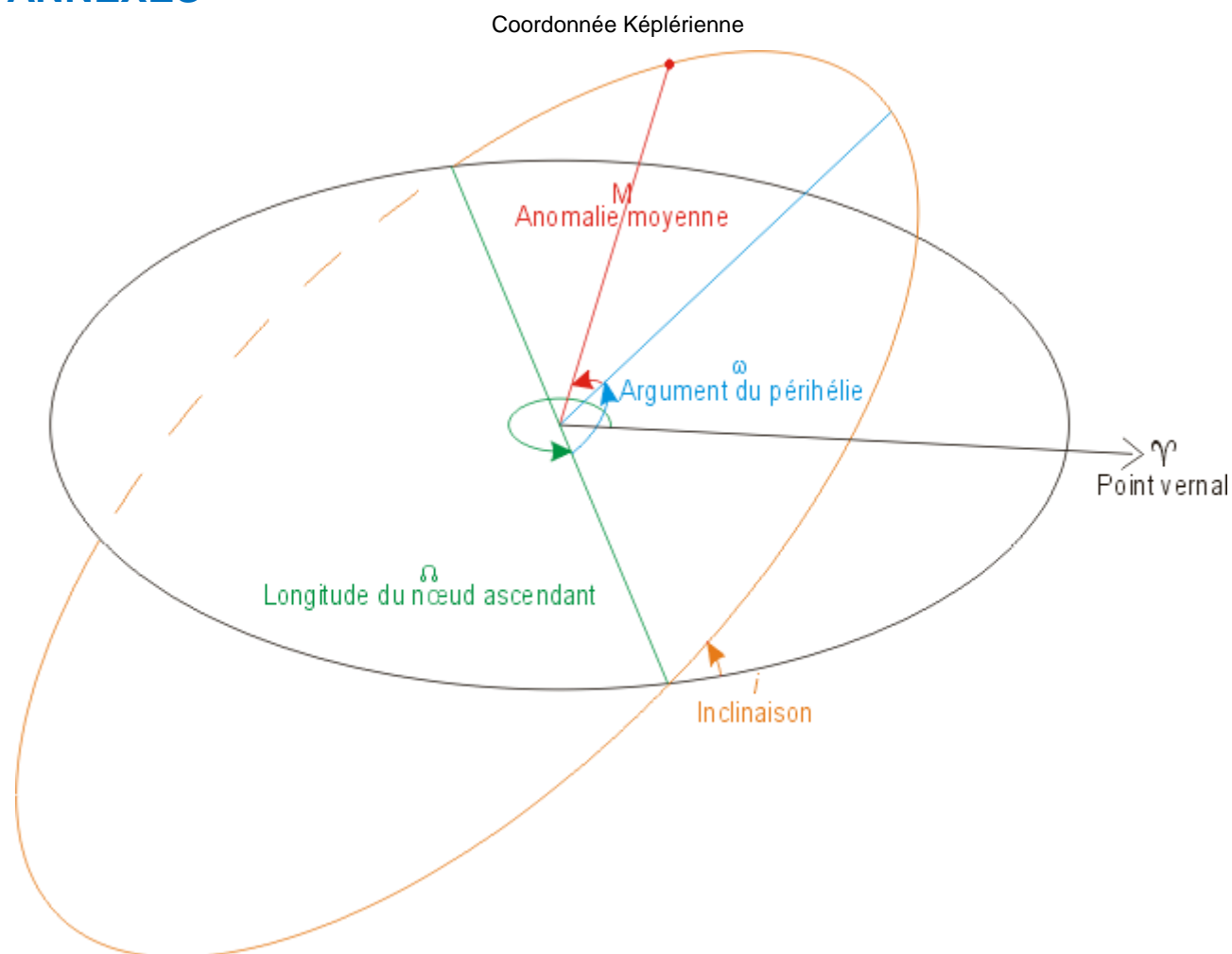
- [1] Arbitrary order description of arbitrary particle optical systems, **M. Berz**, 1990
- [2] Support à l'action de R&T sur l'algèbre de Taylor, **Bignon Emmanuel**, 19/12/2014
- [3] Support à l'action de R&T sur l'algèbre de Taylor-LOT2, **Bignon Emmanuel**, 25/01/2016
- [4] Erreur commise par la méthode de Taylor, **Bignon Emmanuel**, 2/03/2017
- [5] Master de mathématiques 2^{ème} Année, Fonction analytique réelle, **V.Thilliez**, 2004/2005
- [6] Analyse complexe à plusieurs variables, le théorème de Hartogs, **Ruben Martos Prieto**, 2012/2013 (stage)
- [7] Propagation of Large Uncertainty Sets in Orbital Dynamics by Automatic Domain Splitting, **A. Wittig**, 2015
- [8] High order algorithms for the management of uncertainties with applications in space situational awareness, **R. Armellin**
- [9] Advances in imaging and electron physics, vol.108, chapter 2, M. Berz;1990
- [10] Note de cours d'Analyse, Equations différentielles, Etude théorique et schémas numériques Ingénieurs MACS - première année C. Basdevant



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES

Référence : RAPPORT Stage de fin d'étude Climène Lequien

ANNEXES



Exemple logiciel 2

	Sortie 1	Sortie 2	Sortie 3	Sortie 4	Sortie 5	Sortie 6
Erreur estimée (globale)	10,7	12,22	8,16	4,05	14,49	79,35
Erreur réelle à 1σ (67%)	1,35	2,91	0,40	0,52	1,87	13,83
Erreur réelle à 2σ	6,50	13,34	6,76	8,96	7,10	44,05



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

(95%)						
Erreur réelle à 3σ (99%)	12,62	20,54	13,43	14,57	12,01	63,62
% de points dont erreur réelle < erreur estimée	98,4%	93,9%	96,5%	88,3%	99,4%	99,8%
Ratio erreur estimée / erreur réelle à 3σ	0,85	0,59	0,61	0,28	1,21	1,25

Autre exemple : logiciel 1

Cas 1

	Sortie 1	Sortie 2	Sortie 3	Sortie 4	Sortie 5	Sortie 6
Erreur estimée (globale)	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	3.23E-11	7.49E-11	2.55E-7
Erreur réelle à 1σ (67%)	0,00E+00	3,00E-16	1,19E-15	3,20E-12	8,63E-12	7,32E-09
Erreur réelle à 2σ (95%)	1,04E-07	5,80E-16	2,40E-15	1,77E-11	4,09E-11	6,42E-08
Erreur réelle à 3σ (99%)	1,04E-07	7,90E-16	2,90E-15	4,29E-11	7,85E-11	1,41E-07
% de points dont erreur réelle < erreur estimée	-	-	-	97,7%	98,7%	100,0%
Ratio erreur estimée / erreur réelle à 3σ	-	-	-	0,75	0,95	1,81



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES

Référence : RAPPORT Stage de
fin d'étude Climène Lequien

Cas 2

	Sortie 1	Sortie 2	Sortie 3	Sortie 4	Sortie 5	Sortie 6
Erreur estimée (globale)	1,74E-05	9,67E-07	9,29E-10	8,24E-06	1,74E-03	8,69E-04
Erreur réelle à 1σ (67%)	8,75E-02	2,16E-07	4,05E-09	2,21E-07	6,66E-04	1,51E-03
Erreur réelle à 2σ (95%)	3,35E+00	1,52E-06	1,55E-08	5,15E-06	5,28E-03	1,15E-02
Erreur réelle à 3σ (99%)	8,03E+00	3,38E-06	4,20E-08	1,24E-05	1,12E-02	2,70E-02
% de points dont erreur réelle < erreur estimée	0,5%	90,0%	17,3%	97,8%	82,5%	58,6%
Ratio erreur estimée / erreur réelle à 3σ	461682,4	3,5	45,3	1,5	6,5	31,1



Ce document est la propriété de la société THALES Services SAS. Il ne peut être ni reproduit, ni communiqué à des tiers sans autorisation écrite d'une personne mandatée à cet effet par ladite Société © THALES