

# Mécanique des fluides

MACS 2

May 20, 2020

# Fuide ou solide : pas si clair



Mer de glace (Chamonix, Alpes, France)

- ▶ Un glacier a un comportement à la fois liquide et solide
- ▶ Voir par exemple cet [article](#) (G. Jovet, Accromaths, 2013)

# Différents types de "fluides"

- ▶ **Fluides newtoniens**  
Eau, miel, huile...
  - ▶ **Fluides rhéofluidifiants**  
Lave, ketchup, peinture...
  - ▶ **Fluides rhéoépaississants**  
Maizena, Sable mouillé...
- ↪ Dans ce cours, on étudiera seulement les fluides dits newtoniens qui se caractérisent par une relation linéaire entre tenseur des contraintes et gradients de vitesse
- ↪ Analogie évidente avec l'élasticité linéaire où la relation entre tenseur des contraintes et gradient de déplacement est elle aussi linéaire

- ▶ Un fluide est dit **newtonien** si, en tout point, le tenseur des contraintes est une fonction affine d'un tenseur symétrique lié aux gradients des vitesses en ce point

$$\bar{\bar{\sigma}} = -p\mathbb{I} + \mu \frac{(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T}{2}$$

- $p$  est la pression dans le fluide
  - $\mu$  est la viscosité du fluide
- ▶ Un fluide est dit **parfait** si sa viscosité est nulle
  - ▶ La loi de comportement d'un fluide newtonien n'est complètement déterminée que quand on a relié la pression et la viscosité aux autres caractéristiques thermodynamiques du fluide (masse volumique, température...)

- ▶ Statique des fluides newtoniens
- ▶ Cinématique des fluides newtoniens
- ▶ Dynamique des fluides newtoniens
  - ▶ Equations de bilans
  - ▶ Equations de Navier-Stokes compressibles
  - ▶ Equations adimensionnées : Mach, Reynolds, Froude...
- ▶ Etudes des écoulements incompressibles
  - ▶ Equations de Stokes et Navier-Stokes
  - ▶ Exemples de solutions stationnaires
  - ▶ Introduction à la turbulence
  - ▶ Formulation variationnelle et résolution numérique
- ▶ Etudes des écoulements de fluides parfaits
  - ▶ Relations de Bernoulli
  - ▶ Acoustique
  - ▶ Ecoulements potentiels et théorie de la houle linéaire
  - ▶ Couche limite

- ▶ A l'équilibre statique, le tenseur des contraintes est diagonale puisque la vitesse est nulle.
- ▶ La seconde loi de Newton se traduit donc par

$$\nabla p = \mathbf{f}$$

avec  $\mathbf{f}$  l'ensemble des forces volumiques appliquées

- ▶ Pour un fluide incompressible de densité constante soumis au champ de gravité terrestre, on obtient la distribution de pression hydrostatique

$$p(z) = p_A + \rho g(\eta - z), \quad z \in [b, \eta]$$

avec  $p_A$  la pression atmosphérique,  $\eta$  l'altitude de la surface du liquide et  $b$  l'altitude du fond du bassin.

- ▶ A l'équilibre statique, le tenseur des contraintes est diagonale puisque la vitesse est nulle.
- ▶ La seconde loi de Newton se traduit donc par

$$\nabla p = \mathbf{f}$$

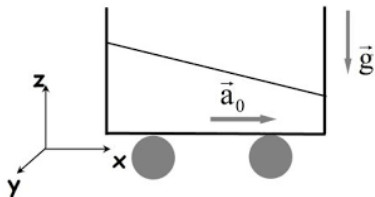
avec  $\mathbf{f}$  l'ensemble des forces volumiques appliquées

- ▶ Pour un fluide compressible isotherme, la pression est une fonction linéaire de la densité et on obtient dans le champ de gravité terrestre la distribution de pression exponentielle

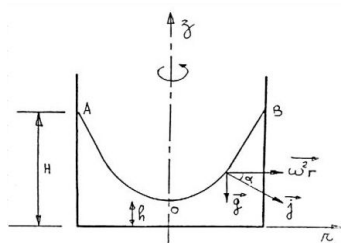
$$p(z) = p_A e^{-gz/\lambda}, \quad z \in [0, +\infty[$$

avec  $p_A$  la pression au sol et  $\lambda$  la constante de proportionnalité.

# Statique des fluides newtoniens



Fluide dans un récipient  
en translation accélérée uniforme



Fluide dans un récipient  
en rotation uniforme



## ► Description lagrangienne

(Utilisée le plus souvent en élasticité linéaire)

On suit le volume de fluide dans son mouvement :

↪ variables :  $\mathbf{x}_0$  position initiale et  $t$  temps d'observation

$$\mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0), \quad \tilde{\mathbf{v}}(t, \mathbf{x}_0) = d_t \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)$$

## ► Description eulerienne

(Utilisée le plus souvent en mécanique des fluides)

On regarde le fluide en un point fixe :

↪ variables :  $(\mathbf{x}, t)$  position et temps d'observation

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{v}}(t, \mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x}_0 \text{ t.q. } \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}$$

- ▶ Accélération en description lagrangienne

$$\tilde{\mathbf{a}}(t, \mathbf{x}_0) = d_t \tilde{\mathbf{v}}(t, \mathbf{x}_0) = d_{tt} \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)$$

- ▶ Accélération en description eulerienne

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t, \mathbf{x}) &= d_t \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \\ &= d_t \mathbf{v}(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)) \\ &= \partial_t \mathbf{v}(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)) d_t \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0) \\ &= \partial_t \mathbf{v}(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)) \mathbf{v}(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)) \\ &= \partial_t \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \\ &= \partial_t \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

## ▶ Trajectoires

La trajectoire d'un point matériel est l'ensemble des positions occupées par ce point au cours du temps

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0), t \in \mathbb{R}_+\}$$

## ▶ Lignes de courant

On se place à un instant  $t^*$  donné. Une ligne de courant est en tout point  $\mathbf{x}$  tangente au champ de vitesses  $\mathbf{v}(t^*, \mathbf{x})$ . Dans  $\mathbb{R}^2$ , ce sont des courbes d'équations

$$\frac{dx}{v_x(t^*, x, y)} = \frac{dy}{v_y(t^*, x, y)}$$

- ▶ **Proposition** : Dans un écoulement permanent, i.e. où le champ de vitesses ne dépend pas du temps, trajectoires et lignes de courant se confondent.

## ► Principe de conservation

En l'absence de réactions chimiques dans un volume fixé, la variation de masse dans ce volume est égale à ce qui est sorti de ou entré dans ce volume.

$$\begin{aligned}d_t \int_{\Omega} \rho(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} &= - \int_{\partial\Omega} \rho(t, \mathbf{y}) \mathbf{v}(t, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_{\Omega}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} (\rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) d\mathbf{x}\end{aligned}$$

## ↪ Equation locale

$$\partial_t \rho(t, \mathbf{x}) + \operatorname{div} (\rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) = 0$$

## ► Seconde loi de Newton

La variation de quantité de mouvement dans un volume fixé est due à deux effets : flux de quantité de mouvement à travers la surface et effet des forces appliquées à ce volume, surfaciques ou volumiques.

$$\int_{\Omega} \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\partial\Omega} \rho(t, \mathbf{y}) \mathbf{v}(t, \mathbf{y}) (\mathbf{v}(t, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_{\Omega}(\mathbf{y})) d\mathbf{y} + \int_{\partial\Omega} \bar{\bar{\sigma}}(t, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_{\Omega}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\Omega} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

## ↪ Equation locale

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) + \operatorname{div} (\rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \otimes \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) + \nabla p(t, \mathbf{x}) \\ = \operatorname{div} \bar{\bar{\sigma}}_v(t, \mathbf{x}) + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

## ► Seconde loi de Newton

L'accélération d'un volume matériel est égale à la somme des forces appliquées à ce volume.

$$\int_{\Omega_m} \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{a}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_m} \bar{\bar{\sigma}}(t, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_\Omega(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\Omega_m} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

## ↪ Equation locale

$$\begin{aligned} \rho(t, \mathbf{x}) (\partial_t \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) + \nabla p(t, \mathbf{x}) \\ = \operatorname{div} \bar{\bar{\sigma}}_v(t, \mathbf{x}) + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

## ► Premier principe de la thermodynamique

La variation d'énergie d'un volume fixé est égale à la quantité d'énergie échangée avec l'extérieur : flux d'énergie à travers la frontière du volume, travail des forces appliquées sur le volume et transfert de chaleur.

## ↪ Equation locale

$$\partial_t (\rho E) + \operatorname{div} ((\rho E + p)\mathbf{v}) = \operatorname{div} (\overline{\sigma}_v \mathbf{v}) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \operatorname{div} \mathbf{q} + r$$

avec

$$E = e + k, \quad k = \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2, \quad \mathbf{q} = -\lambda \nabla T$$

## ► Equations

$$\partial_t \rho(t, \mathbf{x}) + \operatorname{div} (\rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) = 0$$

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) + \operatorname{div} (\rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \otimes \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) + \nabla p(t, \mathbf{x}) \\ = \operatorname{div} \bar{\bar{\sigma}}_v(t, \mathbf{x}) + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho E) + \operatorname{div} ((\rho E + p) \mathbf{v}) \\ = \operatorname{div} (\bar{\bar{\sigma}}_v \mathbf{v}) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \operatorname{div} (\lambda \nabla T) + r \end{aligned}$$

## ► Lois d'état

$$p = p(\rho, T), \quad e = e(\rho, T), \quad E = e + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2$$



# Equations adimensionnées

## ▶ Grandeurs caractéristiques

### ▶ Géométriques

$$l_0, t_0$$

### ▶ Physiques

$$\rho_0, v_0, p_0, \mu_0, T_0$$

## ▶ Equations adimensionnées

$$St \partial_t \rho(t, \mathbf{x}) + \operatorname{div} (\rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) = 0$$

$$St \partial_t (\rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) + \operatorname{div} (\rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \otimes \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) \\ + \frac{1}{Ma^2} \nabla p(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{Re} \operatorname{div} \bar{\sigma}_v(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{f}_g(t, \mathbf{x})$$

avec

$$St = \frac{l_0/t_0}{v_0}, \quad Ma = \frac{v_0}{\sqrt{p_0/\rho_0}}, \quad Re = \frac{l_0 v_0}{\mu_0}, \quad Fr = \frac{v_0}{\sqrt{g l_0}}$$

## ▶ Nombre de Mach

Compare la vitesse d'un point matériel  $v_0$  et la vitesse du son dans le fluide  $\sqrt{p_0/\rho_0}$ . Permet de négliger les effets de compressibilité quand il est petit.

## ▶ Nombre de Reynolds

Compare la vitesse d'un point matériel  $v_0$  et la vitesse de propagation par contraintes visqueuses  $\mu_0/l_0$ . Permet de négliger les effets d'advection non linéaire quand il est petit.

- ▶ **Nombre de Strouhal**

Compare la vitesse d'un point matériel  $v_0$  et la vitesse  $l_0/t_0$  nécessaire pour traverser le domaine de calcul durant le temps de calcul. Devient très petit si on s'intéresse au comportement en temps long (solutions stationnaires).

- ▶ **Nombre de Froude**

Compare la vitesse d'un point matériel  $v_0$  et la vitesse des ondes gravitationnelles  $\sqrt{g l_0}$ . Ce nombre intervient quand le poids est le moteur principal de l'écoulement. Il caractérise l'équilibre pression-gravité qui intervient dans la relation de pression hydrostatique.

# Equations de Navier-Stokes incompressibles

## ► Faible nombre de Mach

Vitesse du fluide  $\ll$  Vitesse du son dans le fluide

↪ Pression constante au premier ordre  
(équation quantité de mouvement)

↪ Densité constante au premier ordre  
(loi d'état)

↪ Vitesse à divergence nulle  
(équation de la masse)

## ► Equations

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) &= 0 \\ \rho (\partial_t \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) + (\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla) \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) \\ &+ \nabla p(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{f}_g(t, \mathbf{x})\end{aligned}$$

# Equations de Navier-Stokes incompressibles

- ▶ Equations (sans forçage)

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = 0$$

$$\rho (\partial_t \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) + (\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla) \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) + \nabla p(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

- ▶ Expression de la pression en fonction de la vitesse

$$-\Delta p = \operatorname{div} (\rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v})$$

- ▶ Décroissance de l'énergie cinétique

$$\partial_t \mathcal{K} = -\frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v} \leq 0, \quad \mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho |\mathbf{v}|^2$$

- ▶ Equation de la vorticité ou du tourbillon (en bleu en 2d)

$$\partial_t \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega - \omega \cdot \nabla \mathbf{u} - \Delta \omega = 0, \quad \omega = \nabla \times \mathbf{u}$$

- ▶ Faible nombre de Mach

Vitesse du fluide  $\ll$  Vitesse du son dans le fluide

- ▶ Faible nombre de Reynolds

Vitesse du fluide  $\ll$  Vitesse de propagation visqueuse

- ↪ Advection négligée

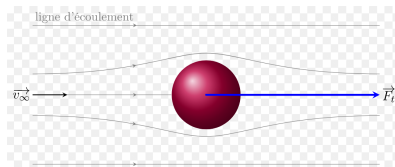
(équation quantité de mouvement)

- ↪ Ecoulement permanent

(solutions stationnaires)

- ▶ Equations

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= 0 \\ -\frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \nabla p(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}\end{aligned}$$



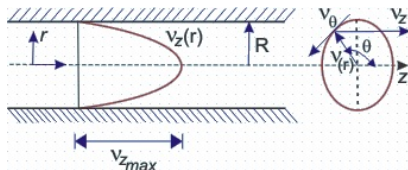
- ▶ Force exercée par le fluide sur la sphère

$$\mathbf{f}_s = 6\pi\nu R \mathbf{v}_\infty$$

- ▶ Vitesse de chute d'une sphère dans un champ de pesanteur  
(Force de Stokes / Poussée d'Archimède / Poids de la sphère)

$$v_c = \frac{2gR^2}{9\mu}(\rho_s - \rho_f)$$

# Ecoulement de Poiseuille en tuyère



- ▶ Equilibre gradient de pression / Contraintes visqueuses
- ▶ Profil de vitesse

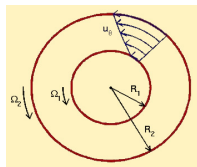
$$\mathbf{v}(r) = v_M \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \mathbf{e}_z$$

- ▶ Relation débit-pression

$$D = \frac{\pi R^4}{8\nu} \frac{\Delta p}{\Delta z}, \quad D = \int_S v(r) dr d\theta$$



# Ecoulement de Couette cylindrique



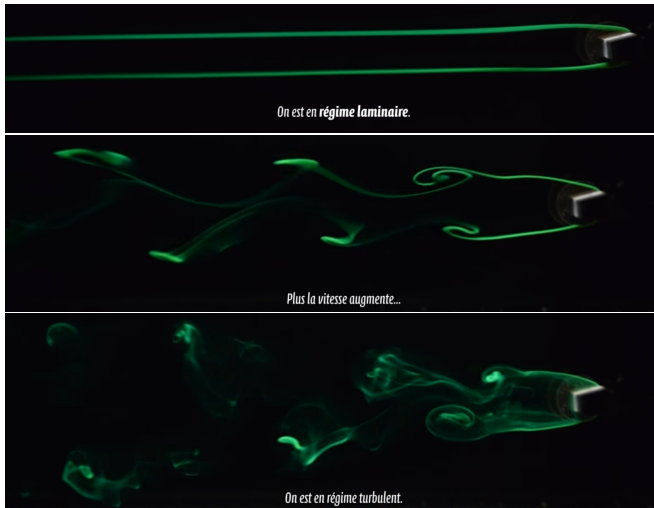
- ▶ Equilibre Déplacement imposé / Contraintes visqueuses
- ▶ Profil de vitesse

$$\mathbf{u}(r) = \left[ \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r - \frac{(\Omega_2 - \Omega_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r} \right] \mathbf{e}_\theta$$

- ▶ Contrainte tangentielle sur le cylindre extérieur

$$\sigma_{r\theta}(R_2) = 2\mu \frac{(\Omega_2 - \Omega_1) R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

# Stabilité Poiseuille et Turbulence



<https://www.youtube.com/watch?v=eD7LdS6bfOQ>



## ► Ecoulement perturbé

$$\mathbf{v}(t, x, z) = \mathbf{v}_0(z) + \tilde{\mathbf{v}}(t, x, z), \quad \mathbf{v}_0(z) = v_0(z)\mathbf{e}_x$$

## ► Equations sur la perturbation

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} = 0$$

$$\rho(\partial_t \tilde{\mathbf{v}} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0) + \nabla \tilde{p} = \nu \Delta \tilde{\mathbf{v}} + O(|\tilde{\mathbf{v}}|^2)$$

- ▶ Ecoulement perturbé

$$\mathbf{v}(t, x, z) = \mathbf{v}_0(z) + \tilde{\mathbf{v}}(t, x, z), \quad \mathbf{v}_0(z) = v_0(z)\mathbf{e}_x$$

- ▶ Equations sur la perturbation

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} = 0$$

$$\rho(\partial_t \tilde{\mathbf{v}} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0) + \nabla \tilde{p} = \nu \Delta \tilde{\mathbf{v}} + O(|\tilde{\mathbf{v}}|^2)$$

- ▶ Etude du système linéarisé  
Stabilité ?

# Equations de Navier-Stokes moyennées (RANS)

## ► Champ de vitesse

Champ vitesse instantané : Champ moyen + Perturbation

$$\mathbf{v}(t, x, z) = \bar{\mathbf{v}}(t, x, z) + \tilde{\mathbf{v}}(t, x, z)$$

## ► Equations sur le champ moyen

Facile sauf le terme non linéaire

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0$$

$$\rho (\partial_t \bar{\mathbf{v}} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}}) + \nabla \bar{p} = \nu \Delta \bar{\mathbf{v}} + \rho \overline{((\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}})}$$

## ► Modélisation du tenseur des perturbations moyennées

Problème complexe et pistes multiples : solution simple

$$\overline{((\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}})} \approx \nu_T \Delta \bar{\mathbf{v}}, \quad \nu_T \gg \nu$$

# Equations de Navier-Stokes moyennées (RANS)

## ► Champ de vitesse

Champ vitesse instantané : Champ moyen + Perturbation

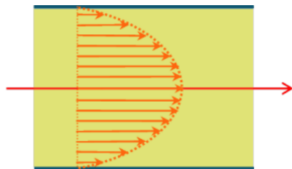
$$\mathbf{v}(t, x, z) = \bar{\mathbf{v}}(t, x, z) + \tilde{\mathbf{v}}(t, x, z)$$

## ► Equations sur le champ moyen

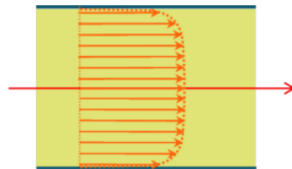
Facile sauf le terme non linéaire

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0$$

$$\rho(\partial_t \bar{\mathbf{v}} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}}) + \nabla \bar{p} = \nu \Delta \bar{\mathbf{v}} + \rho \overline{((\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}})}$$



profil d'écoulement laminaire



profil d'écoulement turbulent

## ► Formulation variationnelle des équations

Trouver  $(\mathbf{v}, p) \in H_d^1(\Omega)^d \times L^2(\Omega)$  tel que

$$\begin{aligned} \forall (\mathbf{w}, q) \in H_0^1(\Omega)^d \times L^2(\Omega) \\ \text{Re} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{w} + \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{w} &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \end{aligned}$$

## ► Problème discret

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{v}} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \tilde{\mathbf{v}} = A^{-1} \left[ I - B^T (BA^{-1}B^T)^{-1} BA^{-1} \right] \tilde{\mathbf{f}}$$

► Formulation variationnelle des équations

Trouver  $(\mathbf{v}, p) \in H_d^1(\Omega)^d \times L^2(\Omega)$  tel que

$$\forall (\mathbf{w}, q) \in H_0^1(\Omega)^d \times L^2(\Omega)$$
$$\frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{w} + \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{w} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w}$$
$$\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

► Interprétation comme problème de minimisation

$$\min_{\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} B} J(\mathbf{v}), \quad J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v}, \quad B(\mathbf{v}) = \operatorname{div} \mathbf{v}$$

↔ Dans un écoulement incompressible, la pression est le multiplicateur de Lagrange de la contrainte de divergence nulle !



## ► Equations

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\rho (\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}$$

## ► Splitting en temps

- Advection : Méthode des caractéristiques

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{X}) = \mathbf{v}^n(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{X}(\Delta t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 + \int_0^{\Delta t} \mathbf{v}(s, \mathbf{X}(s, \mathbf{x}_0)) ds$$

- Correction : Problème de Stokes modifié

$$\operatorname{div} \mathbf{v}^{n+1} = 0$$

$$\rho \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^*}{\Delta t} + \nabla p^{n+1} = \mu \Delta \mathbf{v}^{n+1} + \mathbf{f}^{n+1}$$

## ► Equations

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\rho (\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}$$

## ► Splitting en temps

- Equation d'advection diffusion (Semi-implicite)

$$\rho \frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^n}{\Delta t} + \rho (\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^* = \mu \Delta \mathbf{v}^* + \mathbf{f}^n$$

- Correction : Problème de Darcy

$$\operatorname{div} \mathbf{v}^{n+1} = 0$$

$$\rho \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^*}{\Delta t} + \nabla p^{n+1} = 0$$

## ► Equations d'Euler compressibles

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p = \cancel{\operatorname{div} \bar{\bar{\sigma}}_v} + \mathbf{f}$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho E) + \operatorname{div}((\rho E + p)\mathbf{v}) \\ = \cancel{\operatorname{div}(\bar{\bar{\sigma}}_v \mathbf{v})} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \operatorname{div}(\lambda \nabla T) + r \end{aligned}$$

## ► Lois d'état

$$p = p(\rho, T), \quad e = e(\rho, T), \quad E = e + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2$$

↪ Limite formelle des équations de Navier-Stokes à nombre de Reynolds élevé

## ► Equations d'Euler isothermes

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p = \cancel{\operatorname{div} \bar{\bar{\sigma}}_v} + \mathbf{f}$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho E) + \operatorname{div}((\rho E + p)\mathbf{v}) \\ = \cancel{\operatorname{div}(\bar{\bar{\sigma}}_v \mathbf{v})} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \cancel{\operatorname{div}(\lambda \nabla T)} + r \end{aligned}$$

## ► Lois d'état

$$p = p(\rho, e), \quad E = e + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2$$

## ► Equations d'Euler isentropiques

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p(\rho) = \cancel{\operatorname{div} \bar{\sigma}_v} + \mathbf{f}$$

$$\partial_t(\rho E) \dots$$

## ► Equations d'Euler incompressibles

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\rho(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) + \nabla p = \cancel{\operatorname{div} \bar{\sigma}_v} + \mathbf{f}$$

## ► Egalité vectorielle

$$\partial_t(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \rho(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) + \cancel{(\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}))} \mathbf{v}$$

## ► Equations d'Euler isentropiques

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p(\rho) = \cancel{\operatorname{div} \bar{\sigma}_v} + \mathbf{f}$$

$$\cancel{\partial_t(\rho E)} \dots$$

## ► Equations d'Euler incompressibles

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\rho(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) + \nabla p = \cancel{\operatorname{div} \bar{\sigma}_v} + \mathbf{f}$$

## ► Conservation de l'énergie (sol. régulières) : $\rho G''(\rho) = p'(\rho)$

$$\partial_t \left( \frac{\rho |\mathbf{u}|^2}{2} + G(\rho) \right) + \operatorname{div} \left( \left( \frac{\rho |\mathbf{u}|^2}{2} + G(\rho) + p(\rho) \right) \mathbf{u} \right) = 0$$

# Conditions limites sur une paroi

## ▶ Equations de Navier-Stokes

Frontière réelle : adhérence

$$\mathbf{v} = 0$$

Frontière modélisée : loi de paroi

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{et} \quad ((\nabla \mathbf{v})\mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} + \kappa \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} = 0$$

## ▶ Equations d'Euler

Pas de forces tangentielles

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$$

↪ Pas de création de vorticité sur la paroi...

# Relation de Bernoulli

- ▶ Relation de Bernoulli le long d'une ligne de courant

$$\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + G(\rho) + \mathcal{V} = \text{Cst}$$

- ▶ Forces dérivant d'un potentiel (poids, champ magnétique...)

$$(1/\rho) \mathbf{f} = -\nabla \mathcal{V}$$

- ▶ Egalité vectorielle

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla(|\mathbf{v}|^2/2) - \nabla \times \mathbf{v}$$

- ▶ Equations Euler (incompressibles ou isentropiques)

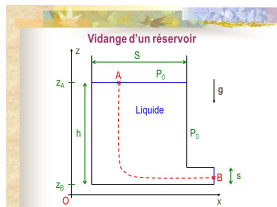
$$\partial_t \mathbf{v} + \nabla \left( (|\mathbf{v}|^2/2) + G(\rho) + \mathcal{V} \right) = \nabla \times \mathbf{v}$$

avec  $G(\rho) = p/\rho$  (incompressible)

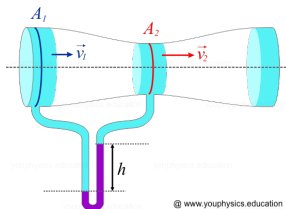
$G'(\rho) = p'(\rho)/\rho$  (isentropique)



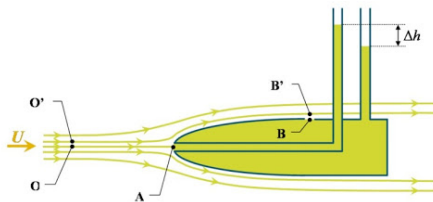
# Relation de Bernoulli



Vidange d'un réservoir



Effet Venturi



Sonde Pitot

- ▶ Equations d'Euler isentropiques (sans forçage)

$$St \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$St \partial_t(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \frac{1}{Ma^2} \nabla p(\rho) = 0$$

↪ Temps "long" et faible Mach : Euler incompressible

↪ Temps "court" et faible Mach : Système des ondes

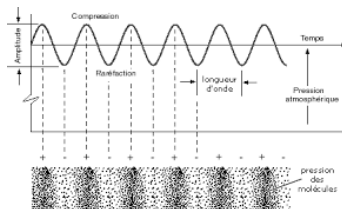
$$\partial_t p + \rho_0 p'(\rho_0) \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = 0$$

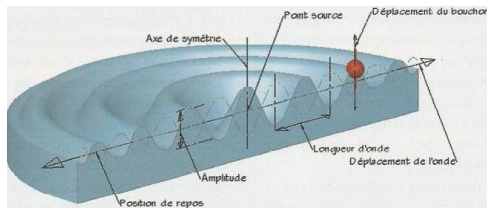
- ▶ Equation des ondes

$$\partial_{tt} p - c_0^2 \Delta p = 0, \quad c_0 = \sqrt{p'(\rho_0)}$$

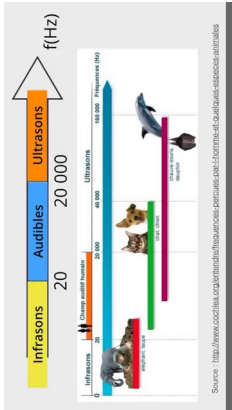
## ► Ondes planes : Energie conservée



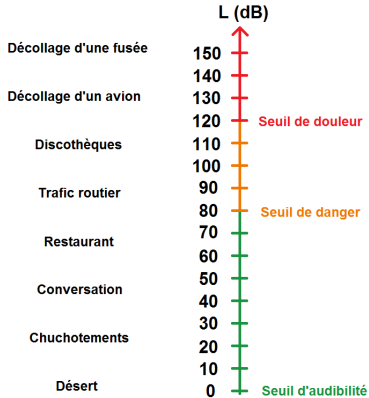
## ► Ondes sphériques : Energie conservée sur une couronne



# Acoustique : Fréquence et intensité



Fréquence



Intensité

# Acoustique : Equilibre géostrophique

## ► Equation des ondes avec force de Coriolis

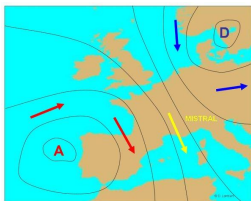
$$\partial_t p + \rho_0 p'(\rho_0) \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = C \mathbf{v}^\perp$$

## ► Solutions stationnaires

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\nabla p = -\rho_0 C \mathbf{v}^\perp$$



## ► Proposition

Un écoulement de fluide parfait initialement irrotationnel reste irrotationnel.

## ► Écoulement potentiel

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists \phi \quad \mathbf{v} = \nabla \phi$$

## ► Incompressibilité

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta \phi = 0$$

## ► Equation sur le potentiel des vitesses

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= 0 \\ \partial_t \phi + |\nabla \phi|^2/2 + p/\rho + \mathcal{V} &= f(t) \end{aligned}$$

- ▶ Equation sur le volume

$$\Delta\phi = 0 \quad (t, x, z) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times [b(x), \eta(t, x)]$$

- ▶ Condition limite au fond :  $z = b(x)$

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{n} = 0$$

- ▶ Deux inconnues

- ▶ Position de la surface libre :  $\eta(t, x)$
- ▶ Valeur du potentiel à la surface libre :  $\phi(t, x, \eta(t, x))$
- ↪ Calcul de  $\phi$  par résolution de l'équation de Laplace

- ▶ Equation sur le volume

$$\Delta\phi = 0 \quad (t, x, z) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times [b(x), \eta(t, x)]$$

- ▶ Condition limite au fond :  $z = b(x)$

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{n} = 0$$

- ▶ Conditions limites à la surface :  $z = \eta(t, x)$

$$\partial_t\eta = \nabla\phi \cdot \mathbf{n}$$

$$\partial_t\phi + |\nabla\phi|^2/2 + p_A/\rho + g\eta = 0$$



- ▶ Equation sur le volume

$$\Delta\phi = 0 \quad (t, x, z) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times [-h, 0]$$

- ▶ Condition limite au fond :  $z = -h$

$$\partial_z\phi = 0$$

- ▶ Conditions limites à la surface :  $z = 0$

$$\partial_t\eta = \partial_z\phi$$

$$\partial_t\phi + \cancel{|\nabla\phi|^2/2} + \cancel{p_A/\rho} + g\eta = 0$$

$$\rightsquigarrow \partial_{tt}\phi + g\partial_z\phi = 0$$

## ► Equations

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= 0 & (t, x, z) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times [-h, 0] \\ \partial_z\phi &= 0 & z = -h \\ \partial_{tt}\phi + g\partial_z\phi &= 0 & z = 0\end{aligned}$$

## ► Ondes planes

$$\phi(t, x, z) = e^{i(kx - \omega t)} f(z)$$

↪ Dépendance verticale

$$f(z) = \frac{\operatorname{ch}(k(z+h))}{\operatorname{ch}(kh)}$$

↪ Relation de dispersion

$$\omega^2 = gk \tanh(kh)$$

## ► Equations

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= 0 & (t, x, z) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times [-h, 0] \\ \partial_z\phi &= 0 & z = -h \\ \partial_{tt}\phi + g\partial_z\phi &= 0 & z = 0\end{aligned}$$

## ► Relation de dispersion

$$\omega^2 = gk \tanh(kh)$$

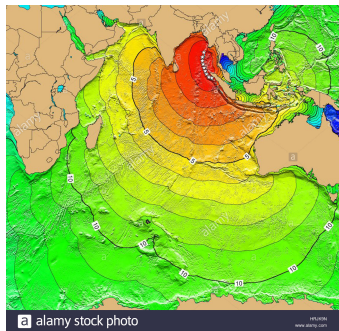
↪ Ondes longues ou "shallow water" :  $kh \ll 1$  (Tsunami)

$$c = \frac{\omega}{k} \approx \sqrt{gh}$$

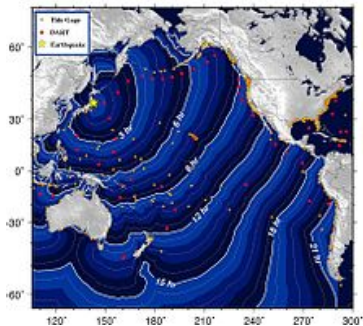
↪ Ondes courtes ou "deep water" :  $kh \gg 1$  (Houle)

$$c = \frac{\omega}{k} \approx \sqrt{\frac{g}{k}} \approx \sqrt{g\lambda}$$

# Acoustique : Tsunamis



Sumatra (2004)



Japon (2011)

# Interaction avec un solide : Couche limite

## ► Equations d'Euler

Pas d'efforts tangentiels à la paroi

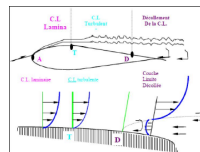
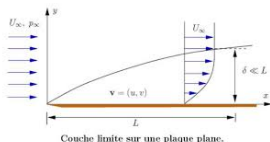
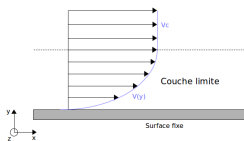
↪ Interaction solide-fluide pas satisfaisante

## ► Séparation de l'espace en deux zones

► Loin de la paroi : Ecoulement de fluide parfait (Euler)

► Proche de la paroi : Ecoulement visqueux (Navier-Stokes)

↪ Définition d'une **couche limite**



## ▶ Equations d'Euler

Pas d'efforts tangentiels à la paroi

↪ Interaction solide-fluide pas satisfaisante

## ▶ Séparation de l'espace en deux zones

▶ Loin de la paroi : Ecoulement de fluide parfait (Euler)

▶ Proche de la paroi : Ecoulement visqueux (Navier-Stokes)

↪ Définition d'une **couche limite**

## ▶ Equations de Prandtl dans la couche limite

$$\begin{aligned}\partial_x u + \partial_y v &= 0 \\ u\partial_x u + v\partial_y u + (1/\rho)\partial_x p &= \nu\partial_{yy} u \\ (1/\rho)\partial_y p &= 0\end{aligned}$$

## ▶ Equations d'Euler

Pas d'efforts tangentiels à la paroi

↪ Interaction solide-fluide pas satisfaisante

## ▶ Séparation de l'espace en deux zones

▶ Loin de la paroi : Ecoulement de fluide parfait (Euler)

▶ Proche de la paroi : Ecoulement visqueux (Navier-Stokes)

↪ Définition d'une **couche limite**

## ▶ Equations de Prandtl dans la couche limite

$$\begin{aligned}\partial_x u + \partial_y v &= 0 \\ u\partial_x u + v\partial_y u + \cancel{(1/\rho)\partial_x p} &= \nu\partial_{yy} u \\ (1/\rho)\partial_y p &= 0\end{aligned}$$

# Equations d'Euler : Numérique

## ▶ Equations incompressibles

Variante des schémas précédents

↪ Stabilité ?

## ▶ Equations compressibles

▶ Système hyperbolique non linéaire (ondes)

▶ Solutions non régulières (théorie des distributions)

▶ Méthodes numériques adaptées (volumes finis)

↪ Cours de MACS 3

