

**Examen partiel d'Analyse Numérique  
du mardi 30 novembre 2004**

Durée : 3h

Notes de cours autorisées

Les deux problèmes sont indépendants

**Problème I**

On considère le système linéaire de  $n > 2$  équations à  $n$  inconnues  $(x_i ; i = 1 \dots n)$  :

$$(\alpha + 2\beta)x_i - \beta(x_{i+1} + x_{i-1}) = f_i \quad 1 \leq i \leq n \quad (1)$$

avec  $\alpha \geq 0$  et  $\beta > 0$ ,  $\{f_i ; i = 1 \dots n\}$ ,  $x_0$  et  $x_{n+1}$  des données.

1. Mettre le système sous la forme  $Ax = b$  avec  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x = \{x_i ; i = 1 \dots n\}$ , où  $A$  une matrice  $n \times n$  symétrique et  $b \in \mathbb{R}^n$  sont à déterminer.
2. En calculant :

$$(Ax, x) = \sum_{i=1}^n (Ax)_i x_i$$

Montrer que la matrice  $A$  du système (1) est symétrique, définie positive (indication on pourra poser pour faciliter les calculs  $x_0 = x_{n+1} = 0$ ).

3. Indiquez une méthode directe de résolution du système (1) convergente (on citera un théorème assurant que la méthode est convergente).
4. On considère, pour  $k = 1 \dots n$ , les vecteurs  $x^k$  de  $\mathbb{R}^n$  définis par :

$$x^k = \left\{ x_i^k = \sin\left(\frac{i k \pi}{n+1}\right) ; i = 1 \dots n \right\}$$

Montrez que ces vecteurs sont orthogonaux deux à deux (pour le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^n$ ) et qu'ils constituent une base de  $\mathbb{R}^n$ . Indication : on pourra poser par prolongement  $x_0 = x_{n+1} = 0$  et utiliser le fait que  $\sum_{p=0}^{n+1} \cos(pa) = \Re(\sum_{p=0}^{n+1} \exp(ipa))$ .

5. Montrez que le vecteur  $x^k$  est vecteur propre de la matrice  $A$  pour une valeur propre  $\lambda^k$  que l'on déterminera. En déduire toutes les valeurs propres de  $A$  et retrouvez que  $A$  est définie positive.
6. Calculez le rayon spectral  $\rho(J)$  de la matrice d'itération  $J$  de la méthode de Jacobi appliquée à la résolution du système (1) (indication la matrice  $J$  à la même forme que la matrice  $A$  avec des coefficients  $\alpha'$  et  $\beta'$  à déterminer). En déduire que la méthode de Jacobi est convergente.

7. On pose dans la suite  $A = D - E - F$  avec les conventions habituelles ( $D$  diagonale de  $A$ ,  $E$  triangle inférieur,  $F$  triangle supérieur). Montrez que le polynôme caractéristique de la matrice d'itération  $\mathcal{L}_1$  de la méthode de Gauss-Seidel s'écrit pour  $\mu \neq 0$  :

$$P_{\mathcal{L}_1}(\mu) = \frac{\mu^{\frac{n}{2}}}{\det(D - E)} \det(\mu^{-\frac{1}{2}}F + \mu^{\frac{1}{2}}E - \mu^{\frac{1}{2}}D)$$

8. Vérifiez que pour toute matrice tridiagonale  $A' = D' - E' - F'$  et  $\rho \neq 0$  on a l'égalité :

$$\rho^{-1}F' + \rho E' - D' = R(F' + E' - D')R^{-1}$$

avec  $R$  la matrice diagonale de terme général  $R_{i,i} = \rho^{i-1}$  pour  $i = 1 \dots n$ . En déduire que le déterminant de  $\rho^{-1}F' + \rho E' - D'$  est indépendant de  $\rho$  pour  $\rho \neq 0$ .

9. Déduire des questions précédentes que le rayon spectral de la matrice d'itération de Gauss-Seidel est donné par :

$$\rho(\mathcal{L}_1) = \rho(J)^2$$

En déduire que la méthode de Gauss-Seidel est convergente.

10. Que peut-on dire de la vitesse de convergence des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel appliquées au système (1) quand  $n$  augmente ? Quelle méthode vaut il mieux utiliser pour résoudre (1) quand  $n$  est grand ?

## Problème II

Soit  $A$  une matrice réelle,  $n \times n$ , symétrique, définie positive. Etant donnée une découpe en blocs de la matrice  $A$ , on lui associe la décomposition

$$A = D - E - F ,$$

où la matrice  $D$  est constituée des blocs diagonaux (carrés symétriques) de  $A$ ,  $-E$  est la partie bloc-triangulaire strictement inférieure de  $A$  et  $-F$ , la partie bloc-triangulaire strictement supérieure de  $A$ , est la matrice transposée de  $-E$  ( $F = E^t$ ).

1. Démontrez que  $D$  est symétrique, définie positive.
2. Montrez qu'il existe une matrice  $S$  symétrique, définie positive, telle que

$$S^2 = D$$

Indication : on pourra écrire, en le justifiant,  $D = Q\Delta Q^t$ , avec  $\Delta$  matrice diagonale (par points) et  $Q$  matrice orthogonale.

Pour résoudre le système :

$$Ax = b , \quad b \text{ donné dans } \mathbb{R}^n \quad (2)$$

on considère la méthode itérative suivante qui, à partir de  $x_0$  arbitraire, calcule la suite des  $x_k$  :

$$\begin{cases} (D - E)x_{2k+1} = Fx_{2k} + b \\ (D - F)x_{2k+2} = Ex_{2k+1} + b \end{cases} \quad (3)$$

3. Mettre la méthode itérative (3) sous la forme

$$x_{2k+2} = Bx_{2k} + c ,$$

Calculer  $B$  et  $c$ .

4. On pose :  $L = S^{-1}ES^{-1}$  et  $U = S^{-1}FS^{-1}$ . Prouvez que  $I - L$  est inversible et que  $L$  et  $(I - L)^{-1}$  commutent.

5. En déduire que

$$B = M^{-1}N \quad \text{avec} \quad M = S(I - L)(I - U)S \quad \text{et} \quad N = SLUS.$$

6. Montrez que  $N$  est symétrique semi-définie positive.

7. Démontrez que la suite  $x_{2k}$  converge vers la solution du système (2).

8. En déduire que la méthode (3) est convergente.