Université Paris-Nord — Année 2005-2006
Institut Galilée — Licence de Mathématiques L3
Département de Mathématiques — C. Basdevant - A. Abdesselam - L. Molinet

Examen d'Analyse Numérique
du mardi 31 janvier 2006
Durée : 3h
Notes personnelles de cours autorisées

Problème I

Toutes les matrices considérées dans ce problème sont carrées d'ordre $n > 1$, à coefficients réels. Pour α et β des entiers avec $1 \leq \alpha < \beta \leq n$, on note $\Omega_{\alpha,\beta}(\theta)$ la matrice de rotation d'angle θ dans la plan (α, β), soit :

$$\Omega_{\alpha,\beta}(\theta) = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & 1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & . & 0 & \cos\theta & 0 & 0 & \sin\theta & 0 & . \\
\ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots \\
0 & . & 0 & -\sin\theta & 0 & 0 & \cos\theta & 0 & . \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Autrement dit, si on appelle $\omega_{i,j}$ les coefficients de cette matrice : $\omega_{\alpha,\alpha} = \omega_{\beta,\beta} = \cos\theta$, $\omega_{\alpha,\beta} = -\omega_{\beta,\alpha} = \sin\theta$, $\omega_{i,i} = 1$ si $i \neq \alpha$ et $i \neq \beta$, $\omega_{i,j} = 0$ pour tous les autres cas.

1. Soit $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on pose $y = \Omega_{\alpha,\beta}(\theta)x$, déterminez θ pour que $y_\beta = 0$ (i.e. pour que la composante d'indice β de y soit nulle).
2. Soit a un vecteur de $\mathbb{R}^n$, montrez qu'on peut trouver une matrice orthogonale Q de la forme :
$$Q = \Omega_{1,n}(\theta_n)\Omega_{1,n-1}(\theta_{n-1}) \cdots \Omega_{1,3}(\theta_3)\Omega_{1,2}(\theta_2)$$
telle que Qa soit colinéaire au premier vecteur de la base canonique.
3. Soit A une matrice inversible et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on veut transformer le système $Ax = b$ en une suite de n systèmes équivalents $A^{(k)}x = b^{(k)}$, $1 \leq k \leq n$, tels que : $A^{(1)} = A$, $b^{(1)} = b$ et $A^{(k)}_{i,j} = 0$ si $j < k$ et $i > j$, où $A^{(k)}_{i,j}$ désigne le coefficient en ligne i et colonne j de la matrice $A^{(k)}$.
Montrez comment on peut passer du système $A^{(k-1)}x = b^{(k-1)}$ au système $A^{(k)}x = b^{(k)}$ par une suite de rotations planes.
4. En déduire qu'on peut ramener le système $Ax = b$ à un système triangulaire supérieur par une suite de rotations planes et ceci quelle que soit la matrice inversible A.
5. Evaluez le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour résoudre le système $Ax = b$ par cette méthode.

Problème II

Première partie

Soient $w(\cdot)$ une fonction continue strictement positive sur l'intervalle borné $[\alpha, \beta]$. On note p_n le $n^{\text{ième}}$ polynôme orthogonal pour le poids $w(\cdot)$ sur $]\alpha, \beta[$ (avec $p_0(x) = 1$ et le coefficient de x^n dans p_n est 1) . On se propose de montrer que p_n possède n zéros distincts dans l'intervalle $]\alpha, \beta[$.

1. Montrer que p_n a au moins un zéro dans l'intervalle $]\alpha, \beta[$.
2. Soient $x_1, \ldots, x_k$, $1 \leq k \leq n$ les zéros distincts de p_n sur $]\alpha, \beta[$ de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_k$. On définit les entiers naturels $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k$ par $\epsilon_i = 0$ si m_i pair et $\epsilon_i = 1$ si m_i impair. On pose
$$q(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - x_i)^{\epsilon_i} \quad .$$
Montrer que $p_n q$ est de signe constant sur $]\alpha, \beta[$.
3. En déduire que
$$\int_\alpha^\beta p_n(x) q(x) w(x)\, dx \neq 0$$
4. En déduire une contradiction si le degré de q est strictement inférieur à n. Conclure.

Deuxième partie

Soit la formule de Gauss à $n+1$ noeuds ($n \geq 1$)

$$\int_\alpha^\beta w(x) f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i) + E(f) \quad .$$

1. Expliquez pour quelles valeurs des x_i la formule est exacte pour les polynômes de degré $2n+1$.

   On se propose de montrer dans la suite que le noyau de Péano k_{2n+1} associé est positif sur $]\alpha, \beta[$.
   Supposons par l'absurde qu'il existe $t_0 \in]\alpha, \beta[$ tel que $k_{2n+1}(t_0) < 0$. On note $k^-_{2n+1}(x) = \max(0, -k_{2n+1}(x))$ la partie négative de la fonction k_{2n+1}.

2. Montrer que k_{2n+1} est continu sur $[\alpha, \beta]$, en déduire que k^-_{2n+1} l'est aussi.
3. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver un polynôme ϕ tel que $\phi > 0$ sur $[\alpha, \beta]$ et
$$\left| \int_\alpha^\beta k_{2n+1}(t) \phi(t)\, dt - \int_\alpha^\beta k_{2n+1}(t) k^-_{2n+1}(t)\, dt \right| \leq 2\epsilon \int_\alpha^\beta |k_{2n+1}(t)|\, dt$$
(Indication : on approximera k^-_{2n+1} par un polynôme à l'aide du théorème de Weierstrass)
4. En déduire que pour ϵ assez petit
$$\int_\alpha^\beta k_{2n+1}(t) \phi(t)\, dt < 0$$

5. Soit Ψ un polynôme tel que $\Psi^{(2n+2)} = \phi$ (i.e. Ψ est une primitive de degré $2n+2$ de ϕ). En utilisant le théorème de Peano vérifier que

$$E(\Psi) < 0 \quad .$$

6. Montrer qu'il existe q un polynôme de degré quelconque et r un polynôme de degré inférieur ou égal à $2n+1$ tels que

$$\Psi(x) = \pi_{n+1}^2(x)q(x) + r(x) \quad .$$

avec $\pi_{n+1}(x) = \displaystyle\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

7. En déduire que

$$E(\Psi) = E(\pi_{n+1}^2\, q) = \int_\alpha^\beta \pi_{n+1}^2(x)\, q(x) w(x)\, dx \quad .$$

8. Montrer qu'il existe θ appartenant à $]\alpha, \beta[$ tel que

$$E(\Psi) = q(\theta) \int_\alpha^\beta \pi_{n+1}^2(x) w(x)\, dx$$

9. On considère le polynôme

$$g(x) = \Psi(x) - r(x) - \pi_{n+1}^2(x) q(\theta) \quad .$$

   Montrer qu'il existe $\eta \in]\alpha, \beta[$ tel que

$$g^{(2n+2)}(\eta) = 0$$

   et en déduire que $q(\theta) > 0$.

10. Conclure.