Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2005-2006
Licence de Mathématiques L3
C. Basdevant - A. Abdesselam - L. Molinet

**Examen d'Analyse Numérique**
**du mardi 12 septembre 2006**
Durée : 2h - Notes personnelles de cours autorisées

**Exercice 1.** Soit $u$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On veut montrer qu'il existe une droite ou un plan vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par $u$.

1. Montrer que si $u$ admet une valeur propre réelle alors il existe au moins une droite vectorielle de $\mathbb{R}^n$ stable par $u$.
2. En déduire que si $n$ est impair alors il existe au moins une droite vectorielle de $\mathbb{R}^n$ stable par $u$.

On suppose désormais qu'il n'existe pas de droite vectorielle de $\mathbb{R}^n$ stable par $u$.

1. Montrer que le polynôme caractéristique $Q$ de $u$ est de la forme
$$Q(X) = \prod_{i=1}^{n/2}(a_iX^2 + b_iX + c_i)$$
avec $b_i^2 < 4a_ic_i$ pour tout $i \in \{1, .., n/2\}$.
2. Déduire du théorème de Cayley-Hamilton qu'il existe un vecteur $x$ non nul de $\mathbb{R}^n$ et $i \in \{1, .., n/2\}$ tel que
$$a_iu^2(x) + b_iu(x) + c_ix = 0 \quad .$$
3. Etablir que $x$ et $u(x)$ sont linéairement indépendants et montrer que le plan vectoriel engendré par ces 2 vecteurs est stable par $u$.

**Exercice 2.** Soit $a$ un nombre réel tel que $-2 < a < 2$. On définit la matrice tridiagonale d'ordre $n$, $A_n(a)$, par

$$(A_n(a))_{i,i} = a,\ i = 1, .., n; \quad (A_n(a))_{i,i-1} = -1,\ i = 2, .., n; \quad (A_n(a))_{i,i+1} = -1, \quad i = 1, .., n-1.$$

On note $\delta_n(a)$ le déterminant de $A_n(a)$.

1. Etablir la formule de récurrence
$$\delta_n(a) = a\delta_{n-1}(a) - \delta_{n-2}(a) \quad .$$
2. On pose $a = 2\cos\varphi,\ \varphi \in ]0, \pi[$. Vérifier par récurrence que
$$\delta_n(a) = \frac{1}{2i\sin\varphi}\left[e^{i(n+1)\varphi} - e^{-i(n+1)\varphi}\right]$$
3. Calculer toutes les valeurs de $a$ pour lesquelles $\delta_n(a)$ s'annule.

4. En déduire que les valeurs propres de la matrice $A_n(2)$ sont données par

$$\lambda_{n,k} = 4\sin^2\left[\frac{k\pi}{2(n+1)}\right], \quad 1 \leq k \leq n\ .$$

5. On rappelle que le conditionnement en norme Euclidienne d'une matrice symétrique $A$ est donné par

$$cond_2 A = \frac{\text{+ grande valeur propre en module}}{\text{+ petite valeur propre en module}}$$

Calculer $cond_2 A_n(2)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} cond_2 A_n(2)$.

**Exercice 3.** Soit $A$ une matrice réelle, $n \times n$, symétrique, définie positive.
Pour résoudre le système :

$$Ax = b\ , \qquad b \text{ donné dans } \mathbb{R}^n \tag{1}$$

on considère la méthode itérative suivante pour laquelle $x_0$ est arbitraire et $\sigma$ est un paramètre réel :

$$x_{n+1} = x_n - \sigma(Ax_n - b) \tag{2}$$

1. Montrez que la méthode (2) converge vers la solution du système (1) si et seulement si :

$$0 < \sigma < \frac{2}{\rho(A)}\ ,$$

   où $\rho(A)$ désigne le rayon spectral de $A$.

2. Montrez que la vitesse de convergence de la méthode (2) est maximale pour une valeur de $\sigma$ que l'on exprimera en fonction de $\rho(A)$ et $\rho(A^{-1})$.