Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2006-2007
Licence de Mathématiques - L3
C. Basdevant - Th. Clémenceau

Examen d'Analyse Numérique
du mardi 26 juin 2007

Durée : 2h
Notes de cours autorisées

Exercice I

Soit s un paramètre fixé dans $]0,1]$. On considère la formule de quadrature :

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt \approx \alpha_s f(-s) + \beta_s f(0) + \gamma_s f(s)$$

1. Déterminez les poids α_s, β_s et γ_s de sorte que la formule soit exacte pour les polynômes de degré inférieur où égal à deux.
2. Vérifiez que la formule intègre alors exactement les polynômes de degré trois.
3. Quelle formule obtient-on pour $s = 1$?
4. Déterminez s dans $]0,1]$ pour que la formule soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à quatre. Vérifiez que la formule est encore exacte au degré cinq.

Exercice II

Soit A une matrice $n \times n$ non singulière, et $b \in \mathbb{R}^n$; le problème est consacré à une méthode pour résoudre le système linéaire :

$$Ax_0 = b \tag{1}$$

Pour cette méthode on se donne d'une part n vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$ linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^n$, normalisés par :

$$\|A^t u_i\|_2 = 1 \tag{2}$$

où A^t désigne la matrice transposée de A, et d'autre part n nombres $\mu_i > 0$ tels que $\sum_{i=1}^{i=n} \mu_i = 1$. On considère alors la méthode itérative :

$$\begin{aligned} &x^0 \quad \text{arbitraire} \\ &x^{k+1} = x^k + 2\sum_{i=1}^{i=n} \mu_i A^t u_i u_i^t (b - Ax^k) \end{aligned} \tag{3}$$

1. On pose $v_i = A^t u_i$
   (a) Démontrez que les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^n$.
   (b) Démontrez la propriété :
   $$\big(\forall i \quad x^t v_i = 0\big) \Rightarrow x = 0$$

2. On pose
   $$A(\mu) = \sum_{i=1}^{i=n} \mu_i v_i v_i^t = \sum_{i=1}^{i=n} \mu_i A^t u_i u_i^t A$$
   (a) Démontrez que la matrice $A(\mu)$ est symétrique définie positive.
   (b) Démontrez que les valeurs propres de $A(\mu)$ sont dans $]0\,1]$.

3. Démontrez que si la méthode (3) est convergente, elle converge vers la solution du problème (1).

4. On pose $B(\mu) = I - 2A(\mu)$. Montrez que les valeurs propres de $B(\mu)$ sont dans $[-1, 1[$.

5. On pose $S_i = I - 2v_i v_i^t$, de sorte que $B(\mu) = \sum_{i=1}^{i=n} \mu_i S_i$.
   (a) Montrez que S_i est une symétrie orthogonale dont vous déterminerez le sous-espace propre associé à la valeur propre -1.
   (b) Montrez que $\|B(\mu)x\|_2 \leq \|x\|_2$ avec égalité si et seulement si tous les vecteurs $S_i x$ sont colinéaires. En déduire que -1 n'est pas valeur propre de $B(\mu)$.
   (c) En déduire que la méthode (3) est convergente.

6. On suppose désormais que les vecteurs u_i sont choisis de telle sorte que les vecteurs v_i soient orthonormés.
   (a) Montrez que $S_i v_j = (1 - 2\delta_{i,j})v_j$, avec $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = 1$. En déduire les vecteurs propres et valeurs propres de $B(\mu)$.
   (b) Montrez que $B(\mu)$ est définie positive si et seulement si $0 < \mu_i < \frac{1}{2}$ pour tout i. Existe-t-il des cas où cette condition ne peut être satisfaite ?
   (c) Dans le cas où $B(\mu)$ est définie positive, quel est le choix optimal des nombres μ_i ? Précisez le rayon spectral de $B(\mu)$ et conclure.