Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2007-2008
Licence de Mathématiques - L3
C. Basdevant - S. Layouni

Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique
du mardi 15 janvier 2008

Durée : 3h
Aucun document n'est autorisé

Problème I (question de cours)

Soit f une fonction continue et dérivable sur le segment $[a, b]$. Soient $x_1 < x_2 < x_3$ trois points de $]a, b[$.

1. Montrez qu'il existe un unique polynôme p de degré inférieur ou égal à 5 tel que :

$$f(x_i) = p(x_i), \quad f'(x_i) = p'(x_i) \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

Corrigé : Considérons l'application linéaire Φ définie sur $\mathcal{P}_5$, espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 5, et à valeurs dans $\mathbb{R}^6$ qui à un polynôme p associe $(p(x_1), p'(x_1), p(x_2), p'(x_2), p(x_3), p'(x_3))$. Le noyau de Φ est réduit au polynôme nul puisqu'un élément du noyau a x_1, x_2 et x_3 comme racines doubles et est de degré au plus 5. L'application Φ est donc bijective, ce qui démontre l'existence et l'unicité du polynôme d'interpolation d'Hermite.

2. Montrez que, si f est six fois dérivable dans $]a, b[$, pour tout $x \in]a, b[$ il existe un ξ_x dans $]a, b[$ tel que :

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{6!}(x - x_1)^2(x - x_2)^2(x - x_3)^2 f^{(6)}(\xi_x)$$

Indication : on pourra utiliser la fonction auxiliaire :

$$\phi(t) = f(t) - p(t) - \frac{\prod (t - x_i)^2}{\prod (x - x_i)^2} (f(x) - p(x))$$

Corrigé : Le cas $x = x_i$ étant trivial, supposons x différent des x_i. La fonction auxiliaire ϕ est nulle en chacun des x_i et également en x. Par le théorème de Rolle sa dérivée première admet 3 zéros distincts, un dans chacun des 3 intervalles ouverts définis par ces 4 points. Par ailleurs la dérivée première de ϕ est également nulle par construction en chacun des x_i. Cette dérivée première de ϕ a donc 6 zéros distincts. Toujours par le théorème de Rolle la dérivée seconde aura 5 zéros distincts, la dérivée troisième, 4 zéros, ..., la dérivée sixième un zéro que nous nommerons ξ_x. On vérifie alors que :

$$0 = f^{(6)}(\xi_x) - \frac{6!}{\prod (x - x_i)^2} (f(x) - p(x))$$

Problème II

Soit une formule de quadrature du type

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos(x) f(x)\, dx = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + E(f)$$

où $E(f)$ désigne l'erreur.

1. Montrez, au moyen d'un contre-exemple simple, qu'une telle formule ne peut pas être d'ordre ≥ 4.

   Corrigé : Prendre $f(x) = (x - x_1)^2 (x - x_2)^2$, alors $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos(x) f(x)\, dx > 0$ et $\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = 0$

2. Déterminez les valeurs de (λ_1, λ_2) et (x_1, x_2) pour que la formule soit d'ordre 3.

   Corrigé :

$$f(x) = 1 \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos(x)\, dx = 2 = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$f(x) = x \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos(x) x\, dx = 0 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$$

$$f(x) = x^2 \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos(x) x^2\, dx = \frac{\pi^2}{2} - 4 = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$$

$$f(x) = x^3 \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos(x) x^3\, dx = 0 = \lambda_1 x_1^3 + \lambda_2 x_2^3$$

   Des relations pour x^1 et x^3 on tire $x_1 = -x_2 = -\alpha$. Des relations pour x^0 et x^1 on tire alors $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Enfin de x^2 on obtient α, soit :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos(x) f(x)\, dx \approx f(-\alpha) + f(\alpha) \quad \text{avec} \quad \alpha = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2}$$

3. Montrez qu'alors, pour $p(x)$ un polynôme d'interpolation d'Hermite de f que l'on déterminera, on a :

$$E(f) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos(x)(f(x) - p(x))\, dx$$

   Corrigé : Soit $p(x)$ le polynôme d'Hermite de degré 3 qui interpole f et sa dérivée en α et $-\alpha$. La formule étant exacte pour les polynômes de degré 3 on a :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos(x) p(x)\, dx = p(-\alpha) + p(\alpha) = f(-\alpha) + f(\alpha)$$

   d'où le résultat demandé.

4. En déduire que pour tout $f \in C^4([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$, on a

$$E(f) = \frac{1}{4!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos(x)(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 f^{(4)}(\xi_x)\, dx$$

Corrigé : Il suffit de remplacer, dans l'équation obtenue pour $E(f)$, $f(x) - p(x)$ par la formule d'erreur de l'interpolation d'Hermite qui est :

$$\forall x \quad \exists \xi_x \quad f(x) - p(x) = \frac{1}{4!}(x - \alpha)^2 (x + \alpha)^2) f^{(4)}(\xi_x)$$

5. En déduire qu'il existe $\xi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que :

$$E(f) = \frac{40 - 4\pi^2}{4!} f^{(4)}(\xi)$$

Corrigé : En utilisant la formule de la moyenne on obtient :

$$E(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos(x)(x^2 - \alpha^2)^2\, dx$$

Avec le calcul de :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos(x) x^4\, dx = \frac{\pi^4}{8} - 6\pi^2 + 48$$

On obtient le résultat demandé.

Problème III

Dans ce problème, les matrices considérées sont des matrice réelles $n \times n$. Pour une matrice A donnée, $\rho(A)$ désigne son rayon spectral, $\sigma(A)$ son spectre c'est à dire l'ensemble de ses valeurs propres et $\|A\|_2$ sa norme matricielle associée à la norme euclidienne $\|x\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$.

Première partie

Soit C une matrice symétrique semi-définie positive et soit $\gamma \in]0, +\infty[$.

1. Montrez que $(\gamma I + C)$ est inversible et que $D = (\gamma I - C)(\gamma I + C)^{-1}$ est symétrique.

Corrigé : Les valeurs propres de C sont dans $\mathbb{R}_+$. Donc on a :

$$\sigma(\gamma I + C) = \{\gamma + \lambda \mid \lambda \in \sigma(C)\} \subset \mathbb{R}_+^*.$$

Par conséquent, $\gamma I + C$ est inversible. Pour montrer que D est symétrique, on utilise d'une part que C est symétrique, et d'autre part que $\gamma I - C$ et $\gamma I + C$ commutent et donc que $\gamma I - C$ et $(\gamma I + C)^{-1}$ commutent.

2. Montrez que $\|D\|_2 \leq 1$, puis que $\|D\|_2 = 1$ si et seulement si $1 \in \sigma(D)$.

   Corrigé : La matrice D étant symétrique, sa norme 2 est égale à son rayon spectral, soit :

   $$\|D\|_2 = \rho(D) = \max_{\lambda \in \sigma(C)} \left| \frac{\gamma - \lambda}{\gamma + \lambda} \right| \leq 1.$$

   De plus, si $\|D\|_2 = \rho(D) = 1$, ses valeurs propres étant réelles, 1 ou -1 sont valeurs propres de D. La valeur propre -1 est exclue car sinon $\gamma = 0$.

3. On suppose que $1 \in \sigma(D)$. Montrez que le sous-espace propre $E_1(D)$ de D associé à la valeur propre 1 est un sous-espace vectoriel de $\ker(C)$.

   Corrigé : Si a est vecteur propre de D associé à la valeur propre 1, $Da = a$ implique $(I - C)a = (I + C)a$ et donc a appartient à $\ker C$.

4. Montrez que si $\|a\|_2 = 1$ et $\|Da\|_2 = 1$, alors $a \in E_1(D)$. (*Indication : on décomposera a dans une base orthonormale de vecteurs propres de D.*)

   Corrigé : On suppose que $\|Da\|_2 = 1$ et $\|a\|_2 = 1$. En décomposant sur une base orthonormée de vecteurs propres (e_i) de D, on obtient $a = \sum a_i e_i$ et $Da = \sum a_i \frac{\gamma - \lambda_i}{\gamma + \lambda_i} e_i$. L'égalité des normes implique

   $$0 \leq \sum |a_i|^2 \left[1 - \left(\frac{\gamma - \lambda_i}{\gamma + \lambda_i} \right)^2 \right] = 0,$$

   ce qui implique $\forall i$ tel que $a_i \neq 0$, on a $\frac{\gamma - \lambda_i}{\gamma + \lambda_i} = 1$, et donc $Da = a$.

Deuxième partie

Soit $\gamma \in \,]0, +\infty[$ et A une matrice symétrique définie positive et soient C_1 et C_2 deux matrices symétriques semi-définies positives telles que $A = C_1 + C_2$. Pour $b \in \mathbb{R}^n$ et $a^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ donnés, on définit la suite $(a^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ par :

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad \begin{cases} (\gamma I + C_1) a^{(k+\frac{1}{2})} = (\gamma I - C_2) a^{(k)} + b \\ (\gamma I + C_2) a^{(k+1)} = (\gamma I - C_1) a^{(k+\frac{1}{2})} + b \end{cases}$$

5. Trouvez une matrice B et un vecteur c tels que l'on ait

   $$(\forall k \in \mathbb{N}) \;\; a^{(k+1)} = B a^{(k)} + c$$

   Corrigé :
   $B = (\gamma I + C_2)^{-1}(\gamma I - C_1)(\gamma I + C_1)^{-1}(\gamma I - C_2)$
   $c = (\gamma I + C_2)^{-1} b + (\gamma I + C_2)^{-1}(\gamma I - C_1)(\gamma I + C_1)^{-1} b.$

6. Montrez, en utilisant la notation de la question 1), que $\rho(B) \leq \|D_1 D_2\|_2 \leq 1$.

   Corrigé : Avec les notations de la question 1), et en remarquant que B et $D_1 D_2$ sont semblables, $\rho(B) = \rho(D_1 D_2) \leq \|D_1 D_2\|_2 \leq \|D_1\|_2 \|D_2\|_2 \leq 1$.

7. L'objet de cette question est de montrer que $\rho(B) < 1$ en raisonnant par l'absurde.

(a) On suppose que $\rho(B) = 1$. Montrez qu'il existe alors $a \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\|D_1 D_2\|_2 = \|D_2 a\|_2 = \|a\|_2 = 1$$

Corrigé : Si $\rho(B) = 1$, $\|D_1 D_2\|_2 = 1$ donc il existe a tel que $\|a\|_2 = 1$ et $\|D_1 D_2 a\|_2 = 1$. Remarquons que cela entraîne $\|D_2 a\|_2 = 1$ puisque $1 = \|D_1 D_2 a\|_2 \leq \|D_1\|_2 \|D_2 a\|_2 \leq \|D_2 a\|_2 \leq \|D_2\|_2 \|a\|_2 \leq 1$.

(b) Que peut-on alors dire de $\|D_1 a\|_2$?

Corrigé : Puisque $\|D_2 a\|_2 = \|a\|_2 = 1$ Le vecteur a est donc un vecteur propre de D_2 pour la valeur propre 1 (on utilise la question 4). Donc $\|D_1 a\|_2 = 1$ donc a est aussi vecteur propre de D_1 pour la valeur propre 1.

(c) En déduire que $a \in \ker(C_1) \cap \ker(C_2)$ et conclure à une contradiction.

Corrigé : On a donc trouvé un vecteur a de norme 1 dans l'intersection de $\ker(C_1)$ et $\ker(C_2)$ (voir question 3). C'est impossible car a appartiendrait alors au noyau de $A = C_1 + C_2$ qui est définie positive.

8. Montrez que la suite $(a^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente, et de limite égale à la solution a du système linéaire $Aa = b$.

Corrigé : La méthode converge car $\rho(B) < 1$, et vers la solution de $a = Ba + c$. On vérifie par le calcul que c'est également l'unique solution de $Aa = b$.