Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2009-2010
Licence de Mathématiques - L3

C. Basdevant - F. Cuvelier

Corrigé de l'examen partiel d'Analyse Numérique
du mardi 10 novembre 2009

Durée : 3h
Aucun document n'est autorisé

Problème I

Soit A une matrice $n \times n$ réelle inversible.

1. Montrez que $C = A^t A$ est symétrique définie positive. En déduire que C admet une décomposition de Cholesky sous la forme $C = B^t B$, avec B triangulaire supérieure et inversible.

   Corrigé : On vérifie d'une part que $C^t = C$, c'est à dire que C est symétrique, et d'autre part, pour $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, calculons $x^t C x$:
   $$x^t C x = x^t A^t A x = \|Ax\|_2^2$$
   Cette dernière quantité est strictement positive puisque A est inversible. La matrice C est donc symétrique définie positive. D'après un résultat du cours elle admet une décomposition de Cholesky $C = B^t B$ avec B triangulaire supérieure à diagonale strictement positive.

2. Montrez que la matrice $S = AB^{-1}$ est orthogonale.

   Corrigé : $SS^t = AB^{-1}(B^{-1})^t A^t = AC^{-1}A^t = A(A^t A)^{-1} A^t = I$, S est bien une matrice orthogonale.

3. En déduire que la matrice A s'écrit sous la forme $A = QR$, où Q est orthogonale et R triangulaire supérieure à termes diagonaux strictement positifs.

   Corrigé : Comme $S = AB^{-1}$ on en déduit $A = SB$, on a bien mis la matrice A sous la forme QR avec $Q = S$ orthogonale et $R = B$ triangulaire supérieure à termes diagonaux strictement positifs.

4. Montrez que cette décomposition QR est unique.

   Corrigé : Supposons deux décompositions $Q_1 R_1 = Q_2 R_2$, alors $Q_2^{-1} Q_1 = R_2 R_1^{-1}$. Mais la matrice $M = Q_2^{-1} Q_1$ est orthogonale comme produit de matrices orthogonales (en effet $Q_2^{-1} Q_1 (Q_2^{-1} Q_1)^t = Q_2^{-1} Q_1 Q_1^t (Q_2^{-1})^t = I$) et la matrice $M = R_1^{-1} R_2$ est triangulaire supérieure à termes diagonaux strictement positifs comme produit de matrices triangulaires supérieures à termes diagonaux strictement positifs. $M^t = M^{-1}$ comme matrice orthogonale, mais M^t est triangulaire inférieure puisque M est triangulaire supérieure et M^{-1} est triangulaire supérieure comme inverse d'une triangulaire supérieure, donc M est diagonale à terme strictement positifs, mais de modules 1 puisque ce sont les valeurs propres d'une matrice orthogonale, M est donc la matrice identité, ce qui prouve que $Q_1 = Q_2$ et $R_1 = R_2$ d'où l'unicité de la décomposition QR d'une matrice inversible.

Problème II

Soit A une matrice carrée réelle $n \times n$ inversible, b et c deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et d un réel. On considère la matrice B carrée $(n+1) \times (n+1)$ écrite (par blocs) comme :

$$B = \begin{pmatrix} A & b \\ c^t & d \end{pmatrix}$$

où c^t désigne le vecteur ligne (de dimension n) transposé du vecteur colonne c.
On suppose que A et B admettent chacune une décomposition LU (L triangulaire inférieure à diagonale unité, U triangulaire supérieure), soit :

$$A = L_A U_A \quad \text{et} \quad B = L_B U_B$$

On pose alors (même découpage par blocs que pour la matrice B) :

$$L_B = \begin{pmatrix} M & 0 \\ m^t & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_B = \begin{pmatrix} V & v \\ 0 & w \end{pmatrix}$$

1. Calculez M, m, V, v, w en fonction de L_A, U_A, b, c, d.

   Corrigé : Effectuons le produit par blocs $L_B U_B$ pour identifier les blocs de la matrice B :
   $$\begin{pmatrix} A & b \\ c^t & d \end{pmatrix} = B = L_B U_B = \begin{pmatrix} M & 0 \\ m^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & v \\ 0 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} MV & Mv \\ m^t V & m^t v + w \end{pmatrix}$$
   d'où par identification des blocs :
   - $MV = A$ et comme M est triangulaire inférieure à diagonale unité et V triangulaire supérieure, par unicité de la decomposition LU : $M = L_A$ et $V = U_A$,
   - $Mv = b$ donc $v = L_A^{-1} b$,
   - $m^t V = c^t$ et donc $m^t = c^t U_A^{-1}$,
   - $m^t v + w = d$, d'où $w = d - c^t A^{-1} b$.

   D'où :
   $$L_B = \begin{pmatrix} L_A & 0 \\ c^t U_A^{-1} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_B = \begin{pmatrix} U_A & L_A^{-1} b \\ 0 & d - c^t A^{-1} b \end{pmatrix}$$

2. Montrez que $\det B = w \det A$. En déduire qu'une condition nécessaire et suffisante pour que B soit inversible est que
   $$d \neq c^t A^{-1} b$$

   Corrigé : $\det B = \det L_B \det U_B$, L_B étant triangulaire à diagonale unité son déterminant est 1, quant au déterminant de U_B par développement par blocs (ou suivant la dernière colonne) il vaut $w \det V$. De même, $\det A = \det L_A \det U_A = \det U_A$ et d'après la question précédente $U_A = V$, d'où :
   $$\det B = w \det A$$

et donc, comme A est inversible, B est inversible si et seulement si w est non nul, d'où la condition.

On supposera dans la suite que la condition $d \neq c^t A^{-1} b$ est remplie et que B est inversible

3. Démontrez la formule suivante :

$$L_B^{-1} = \begin{pmatrix} L_A^{-1} & 0 \\ -c^t A^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Corrigé : Posons $L_B \begin{pmatrix} X \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ y \end{pmatrix}$, alors en faisant les produits par blocs et en identifiant les blocs on obtient : $Y = L_A X$ et $y = m^t X + x$, d'où $X = L_A^{-1} Y$ et $x = y - m^t L_A^{-1} Y = y - c^t A^{-1} Y$. D'où la formule demandée.

4. Trouvez une formule similaire pour U_B^{-1}.

Corrigé : Posons $U_B \begin{pmatrix} X \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ y \end{pmatrix}$, alors en faisant les produits par blocs et en identifiant les blocs on obtient : $Y = U_A X + vx$ et $y = wx$, d'où $x = y/w$ et $X = U_A^{-1} Y - U_A^{-1} vy/w$. D'où la formule (avec $w = d - c^t A^{-1} b$) :

$$U_B^{-1} = \begin{pmatrix} U_A^{-1} & -\frac{1}{w} A^{-1} b \\ 0 & \frac{1}{w} \end{pmatrix}$$

5. En déduire une expression de B^{-1} en fonction de A^{-1}, b, c et d.

Corrigé : Comme $B^{-1} = U_B^{-1} L_B^{-1}$ effectuons le produit par blocs :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} U_A^{-1} & -\frac{1}{w} A^{-1} b \\ 0 & \frac{1}{w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_A^{-1} & 0 \\ -c^t A^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} + \frac{1}{w} A^{-1} b c^t A^{-1} & -\frac{1}{w} A^{-1} b \\ -\frac{1}{w} c^t A^{-1} & \frac{1}{w} \end{pmatrix}$$

avec $w = d - c^t A^{-1} b$.

6. Soit f un vecteur de dimension n et x la solution de $Ax = f$, soit g un réel, montrez que la solution y du problème

$$By = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \qquad \text{s'écrit sous la forme} \qquad y = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\beta}{w} \begin{pmatrix} A^{-1} b \\ -1 \end{pmatrix}$$

avec β un réel que l'on déterminera.

Corrigé : Utilisons la formule de B^{-1} trouvée à la question précédente :

$$y = B^{-1} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} f + \frac{1}{w} A^{-1} b c^t A^{-1} f - \frac{g}{w} A^{-1} b \\ -\frac{1}{w} c^t A^{-1} f + \frac{g}{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + (\frac{1}{w} c^t x - \frac{g}{w}) A^{-1} b \\ -(\frac{1}{w} c^t x - \frac{g}{w}) \end{pmatrix}$$

d'où la forme demandée avec $\beta = c^t x - g$ et $w = d - c^t A^{-1} b$.

7. En déduire une méthode pour résoudre un système $(n+1)\times(n+1)$ quand on sait résoudre (facilement) un système $n\times n$.

   Corrigé : La formule de la question précédente nous montre que le système de matrice B est résolu au moyen de la résolution de deux systèmes $n\times n$ de matrice A : le calcul de $A^{-1}b$ et le calcul de $x=A^{-1}f$. Pour que la méthode marche il faut bien sûr que B et A soient inversibles, le critère $w\neq 0$ permet de lier l'inversibilité de B à celle de A. Il est intéressant de remarquer que si la démonstration utilise les décomposition de Cholesky de A et B, la formule résultat reste valable même si ces matrices ne sont pas décomposables.

Problème III

On dit qu'une matrice A est *non négative* et on note $A \geq 0$ si tous ses éléments sont positifs ou nuls ($\forall i,j\ a_{i,j}\geq 0$).

Soit A une matrice carrée réelle $n\times n$ non négative. L'objet du problème est de montrer le résultat suivant :
Pour $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\rho(A)$ le rayon spectral de A

$$\alpha>\rho(A) \iff (\alpha I-A) \text{ est inversible et } (\alpha I-A)^{-1}\geq 0 \tag{1}$$

1. Soit α un réel tel que $\alpha>\rho(A)$. Montrez que $(\alpha I-A)$ est inversible et que :

$$(\alpha I-A)^{-1}=\alpha^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{A}{\alpha})^k$$

   On justifiera que la série est convergente. En déduire que la matrice $(\alpha I-A)^{-1}$ est non négative.

   Corrigé : Comme $\alpha>\rho(A)$, $\alpha>0$ ne peut être valeur propre de A et donc 0 n'est pas valeur propre de $\alpha I-A$ et cette matrice est inversible.
   D'autre part, on sait, d'après somme de la suite géométrique :

$$(1-X)^{-1}=\sum_{k=0}^{p}X^k+(1-X)^{-1}X^{p+1}$$

   que la série de terme général Xk est convergente dès que $\|X\|<1$ ce qui permet d'écrire $(1-X)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}X^k$. Ce résultat s'applique à $X=\frac{1}{\alpha}A$ puisque (voir le cours) il existe une norme matricielle telle que $\|A\|<(\rho(A)+\alpha)/2$ et donc $\|\frac{A}{\alpha}\|<1$, d'uù le résultat :

$$(\alpha I-A)^{-1}=\alpha^{-1}(I-\frac{A}{\alpha})^{-1}=\alpha^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{A}{\alpha})^k$$

   La matrice A étant non négative, toutes les A^k le sont, on en déduit que la somme et $(\alpha I-A)^{-1}$ sont non négatives.

   Pour démontrer la réciproque, on suppose maintenant que $(\alpha I-A)^{-1}$ est non négative.

2. Soit e le vecteur de dimension n dont toutes les composantes sont égales à 1. On pose :

$$d = (\alpha I - A)^{-1} e$$

Montrez que toutes les composantes de d sont strictement positives.

Corrigé : Les composantes de e et celles de $(\alpha I - A)^{-1}$ étant positives ou nulles, celles de d le sont aussi. Si une composante de d était nulle, cela voudrait dire que la somme sur une ligne des composantes de $(\alpha I - A)^{-1}$ serait nulle et donc, puisque ces composantes sont toutes a priori positives ou nulles, que toute la ligne serait nulle, ce qui n'est pas possible puisque cette matrice est inversible. Toutes les composantes de d sont donc strictement positives.

3. Soit D la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les composantes de d. Montrez que le vecteur $D^{-1}(\alpha I - A)De$ a toutes ses composantes strictement positives.

Corrigé : Par construction $De = d$ et donc $D^{-1}(\alpha I - A)De = D^{-1}(\alpha I - A)d = D^{-1}e$, c'est donc le vecteur de composantes $1/d_i$ qui sont toutes strictement positives.

4. En déduire :

$$\forall i,\ \alpha > \sum_{j=1}^{n} (D^{-1}AD)_{i,j} \quad \text{et} \quad \alpha > \|D^{-1}AD\|_\infty$$

Corrigé : Du résultat précédent $D^{-1}(\alpha I - A)De > 0$ on déduit l'inégalité entre vecteurs $\alpha e > D^{-1}ADe$, ce qui s'écrit composante par composante :

$$\forall i, \quad \alpha > \sum_{j=1}^{j=n} (D^{-1}AD)_{i,j}$$

Comme $(D^{-1}AD)_{i,j} \geq 0$ (tous les éléments de ce produit sont positifs ou nuls) et par définition $\|B\|_\infty = \max_i \sum_j |b_{i,j}|$, l'inégalité précédente s'écrit $\alpha > \|D^{-1}AD\|_\infty$

5. Conclure la démonstration de (1).

Corrigé : On a donc $\alpha > \|D^{-1}AD\|_\infty \geq \rho(D^{-1}AD) = \rho(A)$, cqfd.