Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2009-2010
Licence de Mathématiques - L3
C. Basdevant - F. Cuvelier

**Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique**
**du mardi 19 janvier 2010**

Durée : 3h
Aucun document n'est autorisé

## Problème I
## Cas de non convergence du polynôme d'interpolation de Lagrange

Soient $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$, $n+1$ points distincts de $\mathbb{R}_+^*$, et $f$ une fonction à valeurs réelles, définie sur $\mathbb{R}$, continue et paire.

1. Montrez qu'il existe un unique polynôme $P_{2n}(x) = \sum_{0\leq k\leq n} a_k\, x^{2k}$ pair, de degré inférieur ou égal à $2n$ , qui interpole $f$ aux points $x_i$.

   **Corrigé** : Les $(n+1)$ coefficients $a_k$ sont déterminés par le système de $(n+1)$ équations à $(n+1)$ inconnues $P(x_i) = f(x_i)$ pour $0 \leq i \leq n$. Le déterminant du système étant un déterminant de Van der Monde, il y a existence et unicité de la solution du système.
   Autre démonstration : L'ensemble des polynômes pairs de degré inférieur ou égal à $2n$ est un espace vectoriel de dimension $n+1$. Considérons l'application qui à un élément $P$ de cet espace vectoriel associe dans $\mathbb{R}^{n+1}$ l'élement $(P(x_i))_{i=0..n}$. Cette application est injective car un élément de son noyau a pour racine les $x_i$ et par parité aussi les $-x_i$, soit $2n+2$ racines distinctes, c'est donc le polynôme nul. Injective entre deux espaces vectoriels de même dimension, l'application est donc bijective, d'où l'existence et l'unicité du polynôme d'interpolation.

2. En déduire que le polynôme $P_{2n}$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange de $f$ aux $2n+2$ points $x_i$ et $-x_i$.

   **Corrigé** : La fonction $f$ et le polynôme $P_{2n}$ étant tous deux pairs, $P(x_i) = f(x_i)$ implique $P(-x_i) = f(-x_i)$. Le polynôme $P_{2n}$ interpole donc bien $f$ aux $2n+2$ points, d'autre part il est de degré $2n < 2n+1$ et donc par unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange, c'est bien le polynôme en question.

   On prend dans toute la suite pour $f$ la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

3. On pose $R(x) = 1 - \frac{P_{2n}(x)}{f(x)}$. Montrez que $R$ s'écrit :

$$R(x) = \gamma \prod_{j=0}^{j=n} (x^2 - x_j^2)$$

avec $\gamma$ un réel.

**Corrigé** : $R$ est un polynôme pair de degré inférieur ou égal à $2n+2$. Comme $P_{2n}(x_j) = f(x_j)$ il s'annule en tous les points $x_j$ et $-x_j$, il est donc divisible par tous les $(x^2 - x_j^2)$, d'où le résultat.

4. En déduire que l'erreur d'interpolation s'écrit :

$$f(x) - P_{2n}(x) = f(x) \prod_{j=0}^{j=n} \frac{x_j^2 - x^2}{x_j^2 + 1}$$

Indication : on déterminera $\gamma$ en calculant $R(z_c)$ pour une valeur particulière $z_c$.

**Corrigé** : En prenant $x^2 = -1$ dans l'expression de $R$ on détermine

$$\gamma = -\frac{1}{\prod_{j=0}^{j=n}(1+x_j^2)}$$

d'où le résultat.

Soit maintenant $x$ et $a$ tels que $0 < x < a$.
Pour $h > 0$ assez petit on considère les points $x_j$ de la forme $x_j = x + (j + \frac{1}{2})h$ avec $j \in K_h$ où $K_h = \{j \in \mathbb{Z} \text{ tels que } 0 < x_j < a\}$. On appelle alors $Q_h$ le polynôme pair d'interpolation de $f$ aux points $x_j$ (cf. question 1). On va étudier dans la suite la convergence de $Q_h$ vers $f$ quand $h$ tend vers zéro, c'est à dire quand le nombre de points d'interpolation augmente.

5. Montrez que l'intégrale

$$\int_0^a \ln \left| \frac{t^2 - x^2}{t^2 + 1} \right| dt$$

existe.

**Corrigé** : La fonction à intégrer a une singularité logarithmique au voisinage de $t = x$, elle est donc intégrable.

6. Montrez que quand $h$ tend vers zéro :

$$h \ln \left( \prod_{j \in K_h} \left| \frac{x_j^2 - x^2}{x_j^2 + 1} \right| \right) \longrightarrow \int_0^a \ln \left| \frac{t^2 - x^2}{t^2 + 1} \right| dt$$

**Corrigé** : Soit $S$ l'expression de gauche. Elle s'écrit également :

$$S = h \sum_{j \in K_h} \ln \left| \frac{x_j^2 - x^2}{x_j^2 + 1} \right|$$

Elle est, à deux détails près, une somme de Riemann de l'intégrale, correspondant au découpage de l'intervalle $[0, a]$ par les points $x_j$. Les deux détails correspondent au segment $[0, x_l]$, avec $x_l$ le plus petit des $x_j$, segment qui n'est pas pris en compte dans la somme, et au segment $[a, x_r + h]$, avec $x_r$ le plus grand des $x_j$, segment qui ne devrait pas être pris en compte. Il faut pour avoir une vraie somme de Riemann rajouter à $S$ la quantité :

$$E = x_l \ln \left| \frac{0 - x^2}{0+1} \right| - (x_r + h - a) \ln \left| \frac{x_r^2 - x^2}{x_r^2 + 1} \right|$$

Comme $|E| < 2h|\ln x| + h|\ln \frac{a^2-x^2}{a^2+1}| = O(h)$ et comme la somme de Riemann tend vers l'intégrale, on en déduit le résultat.

7. Déduire des questions précédentes que :

$$\lim_{h \to 0} |f(x) - Q_h(x)| = f(x) \lim_{h \to 0} \exp \left[ \frac{1}{h} \int_0^a \ln \left| \frac{t^2 - x^2}{t^2 + 1} \right| dt \right]$$

**Corrigé** : D'après la question 4 on a

$$|f(x) - Q_h(x)| = f(x) \prod_{j \in K_h} \left| \frac{x_j^2 - x^2}{x_j^2 + 1} \right|$$

et d'après la question 6

$$h \ln \left( \prod_{j \in K_h} \left| \frac{x_j^2 - x^2}{x_j^2 + 1} \right| \right) \longrightarrow \int_0^a \ln \left| \frac{t^2 - x^2}{t^2 + 1} \right| dt$$

d'où le résultat.

8. En déduire que $Q_h(x)$ converge, quand $h$ tend vers zéro, vers $f(x)$ si et seulement si l'intégrale :

$$I = \int_0^a \ln \left| \frac{t^2 - x^2}{t^2 + 1} \right| dt$$

est négative et que dans le cas contraire $f(x) - Q_h(x)$ diverge.

**Corrigé** : D'après la question précédente la convergence de $Q_h(x)$ vers $f(x)$ est équivalente à la convergence vers zéro de $\exp \frac{I}{h}$, celle ci n'est possible que si $I < 0$.

9. Par intégration par parties et un peu de travail on montre que :

$$I = a \left[ (1 - \frac{x}{a}) \ln(1 - \frac{x}{a}) + (1 + \frac{x}{a}) \ln(1 + \frac{x}{a}) - \ln(1 + \frac{1}{a^2}) \right] - 2 \arctan a$$

Montrez que si le rapport $\frac{x}{a}$ est petit $I < 0$, et que par contre, si ce rapport est proche de 1, pour $a$ assez grand $I > 0$.

**Corrigé** : Si $\frac{x}{a}$ est proche de zéro $I \approx -a \ln(1 + \frac{1}{a^2}) - 2 \arctan a < 0$.
Fixons maintenant $t = \frac{x}{a} \in [0, 1]$, la fonction $g(t) = (1-t)\ln(1-t) + (1+t)\ln(1+t)$ est croissante avec $g(1) = 2 \ln 2 > 0$. Ayant fixé $t$ pour que $g(t) > 0$, il est clair que pour $a$ assez grand :

$$I = a \left[ g(t) - \ln(1 + \frac{1}{a^2}) \right] - 2 \arctan a > a \left[ g(t) - \ln(1 + \frac{1}{a^2}) \right] - \pi > 0$$

10. Conclure que le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction $\frac{1}{1+x^2}$ ne converge pas vers cette fonction si l'intervalle d'étude est trop grand.

    **Corrigé** : D'après la question précédente pour $\frac{x}{a}$ proche de zéro, le polynôme d'interpolation de Lagrange sur $[-a,a]$ $Q_h(x)$ converge vers $f(x)$ quand $h$ tend vers zéro, mais pour $x$ voisin de $a$ et $a$ assez grand, comme $I>0$, $Q_h(x)$ ne converge pas vers $f(x)$ et même l'écart diverge.

## Problème II
## Intégration des fonctions périodiques par la méthode des trapèzes

On considère une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}([0,1])$ et la méthode des trapèzes

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq \frac{1}{2}\,(f(0)+f(1))$$

1. Montrez que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\,(f(0)+f(1)) - \int_0^1 (x-\frac{1}{2})\,f'(x)\,dx$$

   **Corrigé** : Une intégration par parties du dernier terme donne :

$$\int_0^1 (x-\frac{1}{2})\,f'(x)\,dx = \left[(x-\frac{1}{2})f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 f(x)\,dx$$

   d'où le résultat demandé.

2. Montrez par récurrence que pour $0 \le m \le n$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx = {} & \frac{1}{2}\,(f(0)+f(1)) + \alpha_1 \int_0^1 f'(x)\,dx \\ + {} & \alpha_2 \int_0^1 f''(x)\,dx + \ldots + \alpha_m \int_0^1 f^{(m)}(x)\,dx + \int_0^1 p_{m+1}(x)\,f^{(m+1)}(x)\,dx\end{aligned}$$

   où la suite de polynômes $(p_i)$ et la suite de réels $(\alpha_i)$ sont données par les relations de récurrence :

$$(1)\qquad \begin{cases} p_1(x) = -\left(x-\dfrac{1}{2}\right),\ \alpha_1 = 0\ , \\ p_{k+1}(x) = \displaystyle\int_0^x (\alpha_k - p_k(t))\,dt,\ \alpha_{k+1} = \int_0^1 p_{k+1}(t)\,dt \end{cases}$$

   **Corrigé** : D'après la question précédente la relation est vraie pour $m=0$ , supposons la vraie à l'ordre $m=k$ et démontrons la à l'ordre $k+1$.

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 p_{k+1}(x)\, f^{(k+1)}(x)\, dx = & \left[\left(\int_0^x p_{k+1}(t)dt\right) f^{(k+1)}(x)\right]_0^1 \\
- & \int_0^1 \left(\int_0^x p_{k+1}(t)dt\right) f^{(k+2)}(x)\, dx \\
= & \alpha_{k+1} f^{(k+1)}(1) + \int_0^1 \left(p_{k+2}(x) - x\,\alpha_{k+1}\right) f^{(k+2)}(x)\, dx \\
= & \alpha_{k+1}\left(f^{(k+1)}(1) - \left[x\, f^{(k+1)}(x)\right]_0^1 + \int_0^1 f^{(k+1)}(x)\, dx\right) \\
+ & \int_0^1 p_{k+2}(x)\, f^{(k+2)}(x)\, dx \\
= & \alpha_{k+1} \int_0^1 f^{(k+1)}(x)\, dx + \int_0^1 p_{k+2}(x)\, f^{(k+2)}(x)\, dx
\end{aligned}$$

d'où la formule de récurrence.

3. Montrez par récurrence que $\forall k \geq 1,\ \forall x,\ p_k(x) = (-1)^k p_k(1-x)$ et $\alpha_k = (-1)^k \alpha_k$.

   **Corrigé** : La propriété est vraie pour $k = 1$, supposons la vraie au rang $k$ et démontrons la au rang $k+1$.

$$\begin{aligned}
p_{k+1}(1-x) = & \int_0^{1-x} (\alpha_k - p_k(t))\, dt \\
= & \int_0^1 (\alpha_k - p_k(t))\, dt + \int_1^{1-x} (\alpha_k - p_k(t))\, dt \\
= & -\int_0^x (\alpha_k - p_k(1-u))\, du = -\int_0^x (\alpha_k - (-1)^k p_k(u))\, du
\end{aligned}$$

   d'où le premier résultat puisque par hypothèse de récurrence $\alpha_k = (-1)^k \alpha_k$. Maintenant, pour $k+1$ impair, $p_{k+1}$ est symétrique par rapport au point $x = \frac{1}{2}, y = 0$ et donc son intégrale sur $[0,1]$, $\alpha_{k+1}$ est nulle, ce qui prouve la relation $\alpha_{k+1} = (-1)^{k+1}\alpha_{k+1}$.

4. En déduire que si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([0,1])$

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) + \sum_{j=1}^{[n/2]} \alpha_{2j} \int_0^1 f^{(2j)}(x)\, dx + \int_0^1 p_{n+1}(x)\, f^{(n+1)}(x)\, dx$$

   avec $[n/2]$ la partie entière de $n/2$.

   **Corrigé** : La relation $\alpha_k = (-1)^k \alpha_k$. équivaut à $\alpha_k = 0$ pour $k$ impair, en conséquence la formule se déduit de celle de la question 2.

5. Notons par $\tilde{p}_m$ la fonction périodique de période 1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\tilde{p}_m(x) = p_m(x - [x]), \quad \text{où } [x] \text{ désigne la partie entière de } x.$$

   Montrer qu'alors, pour $k \geq 1$ entier et $g \in \mathcal{C}^{n+1}([0,k])$

$$\int_0^k g(x)\, dx = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2}(g(i) + g(i+1)) + \sum_{j=1}^{[n/2]} \alpha_{2j} \int_0^k g^{(2j)}(x)\, dx + \int_0^k \tilde{p}_{n+1}(x)\, g^{(n+1)}(x)\, dx$$

**Corrigé** : Par translation la formule de la question 4 est valable sur tout intervalle $[i, i+1]$, à condition de remplacer $p_{n+1}(x)$ par $p_{n+1}(x-i) = \tilde{p}_{n+1}(x)$, aussi appliquons la à la fonction $g$ :

$$\int_i^{i+1} g(x)\,dx = \frac{1}{2}\,(g(i) + g(i+1)) + \sum_{j=1}^{[n/2]} \alpha_{2j} \int_i^{i+1} g^{(2j)}(x)\,dx + \int_i^{i+1} \tilde{p}_{n+1}(x)\, g^{(n+1)}(x)\,dx$$

On obtient alors la formule demandée en sommant ces formules pour $i$ de 0 à $k-1$.

6. On se place sur l'intervalle borné $[a, b]$ divisé en $k$ intervalles égaux par la subdivision

$$x_i = a + i\,h,\ \ h = \frac{b-a}{k}\ .$$

On note

$$T_k(f) = h\left[\frac{1}{2}f(x_o) + f(x_1) + \ldots + f(x_{k-1}) + \frac{1}{2}f(x_k)\right]$$

la formule des trapèzes composée sur l'intervalle $[a, b]$.
En utilisant le changement de variable $\varphi(t) = f(a + th)$ et la formule de la question 5 montrez que pour $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$

$$\int_a^b f(x)\,dx = T_k(f) + \sum_{j=1}^{[n/2]} \alpha_{2j} h^{2j} \int_a^b f^{(2j)}(x)\,dx + h^{n+1} \int_a^b \tilde{p}_{n+1}(\frac{x-a}{h})\, f^{(n+1)}(x)\,dx$$

**Corrigé** : Avec le changement de variable indiqué et la formule de la question 5 on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx = &\ h\int_0^k \varphi(t)\,dt \\
= &\ h\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2}\,(\varphi(i) + \varphi(i+1)) \\
&+ h\sum_{j=1}^{[n/2]} \alpha_{2j} \int_0^k \varphi^{(2j)}(x)\,dx + h\int_0^k \tilde{p}_{n+1}(x)\,\varphi^{(n+1)}(x)\,dx \\
= &\ h\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2}\,(f(x_i)) + f((x_{i+1})) \\
&+ \sum_{j=1}^{[n/2]} \alpha_{2j} \int_a^b h^{2j}\, f^{(2j)}(x)\,dx + \int_a^b \tilde{p}_{n+1}(\frac{x-a}{h})\, h^{n+1}\, f^{(n+1)}(x)\,dx
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

7. Montrez que si $f$ est périodique de période $b-a$ et qu'elle est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$, alors

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T_k(f)\right| \le C_n h^{n+1}$$

avec $C_n$ indépendant de $h$ dont on donnera une majoration.
On a ainsi démontré la super convergence de la méthode des trapèzes pour les fonctions périodiques intégrées sur une période complète.

**Corrigé** : Si $f$ est périodique de période $b-a$ :

$$\int_a^b f^{(2j)}(x) = f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a) = 0$$

et donc d'après la formule de la question 6 :

$$\int_a^b f(x)\,dx = T_k(f) + h^{n+1}\int_a^b \tilde{p}_{n+1}(\frac{x-a}{h})\,f^{(n+1)}(x)\,dx$$

d'où le résultat avec $C_n = (b-a)\sup_{x\in[0,1]}|p_{n+1}(x)|\sup_{x\in[a,b]}|f^{(n+1)}(x)|$