Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2010-2011
Licence de Mathématiques - L3
C. Basdevant - F. Cuvelier

Corrigé de l'examen partiel d'Analyse Numérique
du mardi 16 novembre 2010

Durée : 3h
Aucun document n'est autorisé

Problème I

Soit $\varepsilon > 0$ et $A(\varepsilon)$ la matrice $n \times n$ définie par :

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots\dots & 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 & 0 & \dots\dots\dots\dots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots\dots\dots\dots & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots \\ \dots\dots & 0 & 1 & 0 & \dots\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots \\ \dots\dots\dots\dots & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots\dots\dots\dots & & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ou plus précisément : $(a_{i,i-1} = 1, i = 2, \dots, n)$, $a_{1,n} = \varepsilon$, tous les autres éléments sont nuls.

1. Calculez les vapeurs propres de $A(0)$ et de $A(\varepsilon)$.

   Corrigé : La matrice $A(0)$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale nulle, elle est nilpotente, toutes ses valeurs propres sont nulles.
   Calculons le polynôme caractéristique de $A(\varepsilon)$:

$$P_\varepsilon(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 & \varepsilon \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots\dots\dots\dots & & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots\dots\dots\dots & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots \\ \dots\dots & 0 & 1 & -\lambda & 0 \; \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots \\ \dots\dots\dots\dots & & 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ \dots\dots\dots\dots & & & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

   En développant le déterminant suivant la première ligne on obtient :

$$P_\varepsilon(\lambda) = -\lambda M(\lambda) + (-1)^{n-1}\varepsilon N(\lambda)$$

   avec $M(\lambda)$ le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure d'ordre $n-1$ dont les éléments diagonaux sont $-\lambda$ et donc dont $M(\lambda) = (-\lambda)^n$, et $N(\lambda)$ le déterminant de la matrice triangulaire supérieure d'ordre $n-1$ dont les éléments diagonaux sont 1 donc $N(\lambda) = 1$, d'où la formule :

$$P_\varepsilon(\lambda) = (-1)^n \left(\lambda^n - \varepsilon\right)$$

   Les valeurs propres de la matrice $A(\varepsilon)$ sont donc les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de ε

2. Les matrices $A(0)$ et $A(\varepsilon)$ sont-elles diagonalisables sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$?

   Corrigé : $A(0)$ étant nilpotente n'est pas diagonalisable. $A(\varepsilon)$ ayant toutes ses valeurs propres distinctes deux à deux, mais complexes, est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

Problème II

Soit A une matrice $n \times n$ et $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, le quotient de Rayleigh $R_A(x)$ est défini par :

$$R_A(x) = \frac{< Ax, x >}{< x, x >}$$

où $< x, y >$ désigne le produit scalaire euclidien de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

On considère dans la suite une matrice A réelle, symétrique, de valeurs propres $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ et une base orthonormale de vecteurs propres associée $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

1. En notant V_k le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs $p_1, p_2, \ldots, p_k$, démontrez que $\lambda_k = \max_{x \in V_k;\, x \neq 0} R_A(x)$

   Corrigé : Un élément $x \in V_k$ s'écrit $x = \sum_{i=1}^{i=k} \alpha_i p_i$, avec les $\alpha_i \in \mathbb{R}$, et compte tenu des propriétés des p_i (vecteurs propres et orthonormés), son quotient de Rayleigh s'écrit :

   $$R_A(x) = \frac{\sum_1^k \lambda_i \alpha_i^2}{\sum_1^k \alpha_i^2}$$

   une quantité dont le maximum est bien λ_k, atteint pour x colinéaire à p_k.

2. Démontrez que $\lambda_k = \min_{x \perp V_{k-1};\, x \neq 0} R_A(x)$ (lire x orthogonal au sous-espace V_{k-1}).

   Corrigé : L'orthogonal de V_{k-1} est le sous-espace vectoriel engendré par $p_k, p_{k+1}, \ldots, p_n$; donc si $x \perp V_{k-1}$ alors $x = \sum_{i=k}^{i=n} \alpha_i p_i$ et

   $$R_A(x) = \frac{\sum_k^n \lambda_i \alpha_i^2}{\sum_1^k \alpha_i^2}$$

   d'où le résultat

3. Soit W un sous-espace vectoriel quelconque de dimension k, démontrez que l'intersection $W \cap V_{k-1}^{\perp}$ n'est pas réduite au vecteur nul.

   Corrigé : Sachant que $\dim(W \cap V_{k-1}^{\perp}) = \dim(W) + \dim(V_{k-1}^{\perp}) - \dim(W + V_{k-1}^{\perp})$ et que $\dim(W) = k$, $\dim(V_{k-1}^{\perp}) = n - (k-1)$ et $\dim(W + V_{k-1}^{\perp}) \leq n$, on en déduit $\dim(W \cap V_{k-1}^{\perp}) \geq 1$, ce qui prouve que ce sous-espace n'est pas réduit au vecteur nul.

4. En notant $\mathcal{V}_k$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbb{R}^n$, démontrez que $\lambda_k = \min_{W \in \mathcal{V}_k} \left(\max_{x \in W;\, x \neq 0} R_A(x) \right)$

   Corrigé : Puisque $V_k \in \mathcal{V}_k$, la question (1) prouve que $\lambda_k \geq \min_{W \in \mathcal{V}_k} \left(\max_{x \in W} R_A(x) \right)$, maintenant la question (3) permet de trouver un vecteur $v \in W \cap V_{k-1}^{\perp}$ non nul et d'après la question (2) $\lambda_k \leq R_A(v) \leq \max_{x \in W} R_A(x)$, ceci étant vrai pour tout W de dimension k, cela prouve que λ_k est bien le $\min \max$.

Problème III

Dans ce problème, les matrices considérées sont des matrice réelles $n \times n$. Pour une matrice A donnée, $\rho(A)$ désigne son rayon spectral, $\sigma(A)$ son spectre (c'est à dire l'ensemble de ses valeurs propres) et $\|A\|_2$ sa norme matricielle associée à la norme euclidienne $\|x\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$.

Première partie

Soit C une matrice symétrique semi-définie positive et soit $\gamma \in]0, +\infty[$.

1. Montrez que $(\gamma I + C)$ est inversible et que $D = (\gamma I - C)(\gamma I + C)^{-1}$ est symétrique.

   Corrigé : Les valeurs propres de C sont dans $\mathbb{R}_+$. Donc on a :

   $$\sigma(\gamma I + C) = \{\gamma + \lambda \mid \lambda \in \sigma(C)\} \subset \mathbb{R}_+^*.$$

   Par conséquent, $\gamma I + C$ est inversible. Pour montrer que D est symétrique, on utilise d'une part que C est symétrique et donc aussi $(\gamma I - C)$, $(\gamma I + C)$ et $(\gamma I + C)^{-1}$, et d'autre part que $\gamma I - C$ et $\gamma I + C$ commutent et donc que $\gamma I - C$ et $(\gamma I + C)^{-1}$ commutent.

2. Montrez que $\|D\|_2 \leq 1$, puis que $\|D\|_2 = 1$ si et seulement si $1 \in \sigma(D)$.

   Corrigé : La matrice D étant symétrique, sa norme 2 est égale à son rayon spectral, soit :

   $$\|D\|_2 = \rho(D) = \max_{\lambda \in \sigma(C)} \left| \frac{\gamma - \lambda}{\gamma + \lambda} \right| \leq 1.$$

   De plus, si $\|D\|_2 = \rho(D) = 1$, ses valeurs propres étant réelles, 1 ou -1 sont valeurs propres de D. La valeur propre -1 est exclue car elle correspondrait à $\gamma = 0$, donc 1 est bien valeur propre de D.

3. On suppose que $1 \in \sigma(D)$. Montrez que le sous-espace propre $E_1(D)$ de D associé à la valeur propre 1 est un sous-espace vectoriel de $\ker(C)$ le noyau de C.

   Corrigé : Si a est vecteur propre de D associé à la valeur propre 1, $Da = a$ implique $(I - C)a = (I + C)a$ et donc $Ca = 0$, a appartient à $\ker C$.

4. Montrez que si $\|a\|_2 = 1$ et $\|Da\|_2 = 1$, alors $a \in E_1(D)$. (*Indication : on décomposera a dans une base orthonormale de vecteurs propres de D.*)

Corrigé : On suppose que $\|Da\|_2 = 1$ et $\|a\|_2 = 1$. En décomposant sur une base orthonormée de vecteurs propres (e_i) de D, associés aux valeurs propres (μ_i), on obtient $a = \sum a_i e_i$ et $Da = \sum \mu_i a_i e_i$. L'égalité des normes euclidiennes implique

$$\sum a_i^2 \left(1 - \mu_i^2\right) = 0,$$

mais comme on a vu que $-1 < \mu_i \leq 1$, l'égalité implique que si $a_i \neq 0$ nécessairement $\mu_i = 1$ et donc $Da = a$.

Deuxième partie

Soit $\gamma \in]0, +\infty[$ et A une matrice symétrique définie positive et soient C_1 et C_2 deux matrices symétriques semi-définies positives telles que $A = C_1 + C_2$. Pour $b \in \mathbb{R}^n$ et $a^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ donnés, on définit la suite $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ par :

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad \begin{cases} (\gamma I + C_1)a^{(k+\frac{1}{2})} = (\gamma I - C_2)a^{(k)} + b \\ (\gamma I + C_2)a^{(k+1)} = (\gamma I - C_1)a^{(k+\frac{1}{2})} + b \end{cases}$$

5. Trouvez une matrice B et un vecteur c tels que l'on ait

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \ \ a^{(k+1)} = Ba^{(k)} + c$$

Corrigé :
$B = (\gamma I + C_2)^{-1}(\gamma I - C_1)(\gamma I + C_1)^{-1}(\gamma I - C_2)$
$c = (\gamma I + C_2)^{-1}b + (\gamma I + C_2)^{-1}(\gamma I - C_1)(\gamma I + C_1)^{-1}b.$

6. Montrez, en utilisant la notation de la question 1), que $\rho(B) \leq \|D_1D_2\|_2 \leq 1$.

Corrigé : Avec les notations de la question 1), en remarquant que $D_1D_2 = (\gamma I - C_1)(\gamma I + C_1)^{-1}(\gamma I - C_2)(\gamma I + C_2)^{-1}$ est semblable à B, puis en utilisant le résultat de la question (2) ($\|D_i\|_2 \leq 1$), on a :

$$\rho(B) = \rho(D_1D_2) \leq \|D_1D_2\|_2 \leq \|D_1\|_2\|D_2\|_2 \leq 1$$

.

7. L'objet de cette question est de montrer que $\rho(B) < 1$ en raisonnant par l'absurde.
   (a) On suppose que $\rho(B) = 1$. Montrez qu'il existe alors $a \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\|D_1D_2\|_2 = \|D_2a\|_2 = \|a\|_2 = 1$$

Corrigé : Si $\rho(B) = 1$, $\|D_1D_2\|_2 = 1$ donc il existe a tel que $\|a\|_2 = 1$ et $\|D_1D_2a\|_2 = 1$. Remarquons que cela entraîne $\|D_2a\|_2 = 1$ puisque $1 = \|D_1D_2a\|_2 \leq \|D_1\|_2\|D_2a\|_2 \leq \|D_2a\|_2 \leq \|D_2\|_2\|a\|_2 \leq 1$.

(b) Que peut-on alors dire de $\|D_1 a\|_2$?

Corrigé : Puisque $\|D_2 a\|_2 = \|a\|_2 = 1$ Le vecteur a est donc un vecteur propre de D_2 pour la valeur propre 1 (on utilise la question 4). Donc $\|D_1 a\|_2 = 1$ et a est aussi vecteur propre de D_1 pour la valeur propre 1.

(c) En déduire que $a \in \ker(C_1) \cap \ker(C_2)$ et conclure à une contradiction.

Corrigé : On a donc trouvé un vecteur a de norme 1 dans l'intersection de $\ker(C_1)$ et $\ker(C_2)$ (voir question 3). C'est impossible car a appartiendrait alors au noyau de $A = C_1 + C_2$ qui est définie positive.

8. Montrez que la suite $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente, et de limite égale à la solution a du système linéaire $Aa = b$.

Corrigé : La méthode converge car $\rho(B) < 1$, et vers la solution de $a = Ba + c$. On vérifie par le calcul que c'est également l'unique solution de $Aa = b$.