Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2011-2012
Licence de Mathématiques - L3

C. Basdevant - F. Cuvelier

Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique
du mardi 17 janvier 2012

Durée : 3h
Aucun document n'est autorisé

Problème I

1. Soit $f \in C^4([0,1])$ et P le polynôme d'interpolation d'Hermite de degré 3 tel que :

$$P(x) = h_{0,0}(x)\, f(0) + h_{1,0}(x)\, f(1) + h_{0,1}(x)\, f'(0) + h_{1,1}(x)\, f'(1)$$

Calculez les expressions des polynômes de base $h_{i,j},\ (i,j) \in \{0,1\}$.

Corrigé :
- $h_{0,0}(x)$ vérifie $h_{0,0}(0) = 1$, $h'_{0,0}(0) = 0$, $h_{0,0}(1) = 0$, $h'_{0,0}(1) = 0$, on trouve ainsi $h_{0,0}(x) = (x-1)^2(2x+1)$
- $h_{1,0}(x)$ vérifie $h_{1,0}(0) = 0$, $h'_{1,0}(0) = 0$, $h_{1,0}(1) = 1$, $h'_{1,0}(1) = 0$, on trouve ainsi $h_{1,0}(x) = x^2(3-2x)$
- $h_{0,1}(x)$ vérifie $h_{0,1}(0) = 0$, $h'_{0,1}(0) = 1$, $h_{0,1}(1) = 0$, $h'_{0,1}(1) = 0$, on trouve ainsi $h_{0,1}(x) = x(x-1)^2$
- $h_{1,1}(x)$ vérifie $h_{1,1}(0) = 0$, $h'_{1,1}(0) = 0$, $h_{1,1}(1) = 0$, $h'_{1,1}(1) = 1$, on trouve ainsi $h_{1,1}(x) = x^2(x-1)$

2. Démontrez l'estimation d'erreur :

$$\forall x \in [0,1],\ \exists \xi_x \in]0,1[,\ f(x) - P(x) = \frac{1}{4\,!} x^2\,(x-1)^2\, f^{(4)}(\xi_x)$$

Indication : on pourra utiliser la fonction $F(t) = f(t) - P(t) - (f(x) - P(x))\,\frac{t^2(1-t)^2}{x^2(1-x)^2}$

Corrigé : L'estimation étant vraie pour $x = 0$ ou $x = 1$, on suppose $x \in]0,1[$. On vérifie alors que $F(0) = F(1) = F(x) = 0$, on en déduit par le théorème de Rolle que F' a deux zéros distincts de 0, 1 et x, comme de plus $F'(0) = F'(1) = 0$ cela fait 4 zéros distincts pour F', donc toujours par Rolle 3 pour F'', 2 pour $F^{(3)}$ et donc il existe ξ_x tel que $F^{(4)}(\xi_x) = 0$, la formule proposée s'en déduit.

3. Démontrez qu'il existe une unique formule de quadrature exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3 de la forme :

$$\int_0^1 f(t)dt \approx a\, f(0) + b\, f(1) + c\, f'(0) + d\, f'(1)$$

Corrigé :

- Existence : la formule $\int_0^1 f(t)dt \approx \int_0^1 P(t)dt$ avec P le polynôme d'Hermite de la première question vérifie les propriétés demandées.
- Unicité : Soit une telle formule, alors, en prenant successivement pour f les polynômes de base de l'interpolation d'Hermite, on a nécessairement $a = \int_0^1 h_{0,0}(t)dt$, $\cdots$, $d = \int_0^1 h_{1,1}(t)dt$ et la formule consiste bien à intégrer le polynôme d'interpolation d'Hermite.

4. Vérifiez que la formule de quadrature de la question précédente s'écrit :

$$I(f) = \frac{1}{2}\,(f(0) + f(1)) + \frac{1}{12}\,(f'(0) - f'(1))$$

Corrigé : Le calcul des intégrales sur $[0, 1]$ des $h_{i,j}$ conduit à ce résultat.
Note : on aurait pu aussi répondre simultanément à la question précédente et à celle-ci en cherchant les coefficients de la formule en l'appliquant successivement à : $f(x) = 1$; $(1 = a+b)$, $f(x) = x$; $(\frac{1}{2} = b+c-d)$, $f(x) = x^2$; $(\frac{1}{3} = b-2d)$, $f(x) = x^3$; $(\frac{1}{4} = b - 3d)$.

5. Donnez une majoration de l'erreur $|\int_0^1 f(t)dt - I(f)|$

Corrigé : Comme $I(f) = \int_0^1 P(t)dt$ et que l'on a une estimation de l'erreur $f(t) - P(t)$ on en déduit la majoration :

$$\begin{aligned} |\int_0^1 f(t)dt - I(f)| &= |\frac{1}{4\,!}\int_0^1 t^2\,(t-1)^2\,f^{(4)}(\xi_t)dt| \\ &\leq \frac{1}{4\,!}\,\sup|f^{(4)}(x)|\int_0^1 t^2\,(t-1)^2\,dt \\ &\leq \frac{1}{720}\,\sup|f^{(4)}(x)| \end{aligned}$$

6. En déduire une formule de quadrature sur le segment borné $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$, exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3, de la forme :

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt \approx I_\alpha^\beta(f) = r\,f(\alpha) + s\,f(\beta) + u\,f'(\alpha) + v\,f'(\beta)$$

Exprimez les coefficients r, s, u, v en fonction de α et β.

Corrigé : Le changement de variable $t = \alpha + u(\beta - \alpha)$ permet de se ramener au segment $[0, 1]$, soit

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = (\beta - \alpha)\int_0^1 g(u)du, \quad \text{avec} \quad g(x) = f(\alpha + x(\beta - \alpha))$$

et donc en utilisant la formule de quadrature sur $[0, 1]$ (avec $g'x) = (\beta - \alpha)f'(\alpha + x(\beta - \alpha))$) :

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt \approx \frac{\beta - \alpha}{2}\,(f(\alpha) + f(\beta)) + \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}\,(f'(\alpha) - f'(\beta))$$

Le changement de variable étant affine il conserve le degré d'un polynôme, la formule est donc exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

7. Etablissez la majoration d'erreur pour $f \in C^4([\alpha, \beta])$:

$$|\int_\alpha^\beta f(t)dt - I_\alpha^\beta(f)| \leq \frac{(\beta-\alpha)^5}{720} \sup_{x \in]\alpha,\beta[} |f^{(4)}(x)|$$

Corrigé : De la majoration d'erreur sur $[0,1]$ on déduit que l'erreur sur $\int_0^1 g(t)dt$ est majorée par $\frac{1}{720} \sup_{x\in]0,1[} |g^{(4)}(x)| = \frac{(\beta-\alpha)^4}{720} \sup_{x\in]\alpha,\beta[} |f^{(4)}(x)|$, d'où le résultat.

8. En déduire la formule de quadrature composée sur $[a, b]$, où $h = \frac{b-a}{n}$ et $x_i = a + i\,h$:

$$\int_a^b f(t)dt \approx U(f) = h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right) + \frac{h^2}{12}\left(f'(x_0) - f'(x_n)\right)$$

Corrigé : En écrivant $\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{i=n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt$ puis en appliquant la formule de quadrature élémentaire pour chacune des intégrales de la somme on obtient

$$U(f) = \sum_{i=0}^{i=n-1} \left[\frac{h}{2}\left(f(x_i + f(x_{i+1})\right) + \frac{h^2}{12}\left(f'(x_i) - f'(x_{i+1})\right)\right]$$

d'où la formule demandée.

9. Donnez une majoration de l'erreur $|\int_a^b f(t)dt - U(f)|$ pour $f \in C^4([a, b])$.

Corrigé :

$$\begin{aligned} |\int_a^b f(t)dt - U(f)| &\leq \sum_{i=0}^{i=n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt - I_{x_i}^{x_{i+1}}(f) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{h^5}{720} \sup_{x\in]a,b[} |f^{(4)}(x)| \\ &\leq \frac{h^4}{720}(b-a) \sup_{x\in]a,b[} |f^{(4)}(x)| \end{aligned}$$

Problème II
Résolution au sens des moindres carrés d'un système surdimensionné

Soit A une matrice réelle $m \times n$ avec $m > n$ et b un vecteur donné dans $\mathbb{R}^m$, le problème est consacré à la recherche d'un algorithme pour trouver un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ qui minimise la fonctionnelle :

$$J(y) = \|Ay - b\|^2$$

où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^m$. Pour éviter toute confusion, on notera (x, y) le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$ et $< x, y >$ le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^m$.

1. Montrez que $x \in \mathbb{R}^n$ vérifie $\{J(x+\lambda z) \geq J(x), \quad \forall z \in \mathbb{R}^n, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}\}$ si et seulement si (A^t désignant la matrice transposée de A) :

$$A^t A x = A^t b \quad . \tag{1}$$

   En déduire que la condition précédente est une condition nécessaire et suffisante pour que x soit solution du problème :

$$J(x) = Inf\{J(y) \quad ; \quad y \in \mathbb{R}^n\} \tag{2}$$

   Corrigé : Développons $J(x+\lambda z)$:

$$J(x+\lambda z) = \|A(x+\lambda z) - b\|_2^2 = J(x) + 2\lambda < Ax - b, Az > +\lambda^2 \|Az\|^2$$

   Comme $< Ax - b, Az >= (A^t(Ax-b), x)$, on voit donc que si $A^t(Ax-b) = 0$, alors $J(x+\lambda z) \geq J(x)$ quels que soient λ et z, c'est donc une condition suffisante pour que x réalise le minimum de J sur $\mathbb{R}^n$.
   Réciproquement, supposons $A^t(Ax-b) \neq 0$, alors il existe z tel que $< Ax-b, Az >$ soit strictement négatif (prendre $z = -A^t(Ax-b)$), en posant $\mu = -2 < Ax - b, Az >$, $\mu > 0$, $J(x+\lambda z) = J(x) - \lambda(\mu - \lambda\|Az\|^2)$ et donc $J(x+\lambda z) < J(x)$ pour λ assez petit, x n'est pas minimum local, la condition est donc nécessaire.

2. Démontrez que $Ker(A) = Ker(A^t A)$, $Ker(A)$ désignant le noyau de A.

   Corrigé : Il est clair que $Ker(A) \subset Ker(A^t A)$, montrons l'inclusion inverse. Soit $x \in Ker(A^t A)$, i.e. $x \in \mathbb{R}^n$ et $A^t A x = 0 \in \mathbb{R}^n$, on en déduit $(A^t A x, x) = 0$ qui s'écrit aussi $< Ax, Ax >= 0 = \|Ax\|^2$ et donc $x \in Ker(A)$.

3. Soit r le rang de A (on rappelle que le rang d'une matrice ou d'une application linéaire est la dimension de son image). Quel est le rang s de $A^t A$? En déduire que si $r = n$ l'équation (1) admet une unique solution.

   Corrigé : On sait que pour une matrice B de dimensions $p \times q$ on a la relation $q = \dim(Im(B)) + \dim(Ker(B))$. On en déduit, si $\dim(Im(A)) = r$, que $\dim(Ker(A)) = n - r$, donc le rang de $A^t A$ est $s = n - \dim(Ker(A^t A)) = n - \dim(Ker(A)) = r$. Ainsi si $r = n$ la matrice $A^t A$ est inversible et l'équation (1) admet une unique solution.

4. Dans le cas général où $r \leq n$, montrez que :

$$Im(A^t A) = Ker(A)^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (y, x) = 0, \ \forall x \in Ker \ A)\} \tag{3}$$

   Corrigé :

   (a) Montrons $Im(A^t A) \subset Ker(A)^\perp$: soit $y \in Im(A^t A)$, i.e. $y = A^t A x$ avec $x \in \mathbb{R}^n$ et soit $z \in Ker(A)$, alors $(y, z) = (A^t A x, z) =< Ax, Az >= 0$, c'est à dire y est orthogonal à tous les éléments de $Ker(A)$, cqfd.

   (b) D'autre part, la relation sur les dimensions nous dit que $\dim(Ker(A)^\perp) = n - \dim(Ker(A)) = r = \dim(Im(A^t A))$.

Les deux sous-espaces $Im(A^tA)$ et $Ker(A)^\perp$ ont même dimension et l'un est inclus dans l'autre ils sont donc égaux.

5. En déduire que $A^tb \in Im(A^tA)$ et qu'il existe une unique solution $\hat{x}$ de l'équation (1) dans $Ker(A)^\perp$.

   Corrigé : Compte tenu du résultat précédent, il faut montrer $A^tb \in Ker(A)^\perp$, mais soit $z \in Ker(A)$, $(A^tb, z) =< b, Az >= 0$ ce qui démontre cette inclusion.
   Comme $\mathbb{R}^n = Im(A^tA) \oplus Ker(A) = Im(A^tA) \oplus Ker(A^tA)$ on en déduit que A^tA est bijectif de $Im(A^tA)$ sur lui même, donc il existe une unique solution $\hat{x}$ de l'équation (1) dans $Im(A^tA) = Ker(A)^\perp$.

6. Montrez que $\hat{x}$ est la solution de norme euclidienne minimale de l'équation (1).

   Corrigé : Toute autre solution x de (1) s'écrira $x = \hat{x} + z$ avec $z \in Ker(A)$, et donc $\|x\|^2 = \|\hat{x}\|^2 + \|z\|^2$ puisque $(\hat{x}, z) = 0$, (attention ici $\|x\|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$), ce qui prouve que $\hat{x}$ est la solution de norme euclidienne minimale.

7. On suppose dans les questions qui suivent $r < n$ et on cherche à calculer la solution $\hat{x}$ de l'équation (1) dans $Ker(A)^\perp$. On considère la méthode itérative :

$$(A^tA + \alpha I)x^{k+1} = A^tb + \alpha x^k \tag{4}$$

   avec x^0 arbitraire dans $\mathbb{R}^n$ et $\alpha > 0$.

   (a) Montrez que le rayon spectral de la matrice d'itération de la méthode (4) est 1.

   Corrigé : La matrice d'itération est $\alpha(A^tA+\alpha I)^{-1}$; c'est une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}$ avec λ valeur propre de la matrice symétrique A^tA, comme $(A^tAx, x) =< Ax, Ax >\geq 0$ A^tA est semi-définie positive donc $\lambda \geq 0$, mais comme $r < n$ le noyau de A^tA n'est pas réduit à 0, elle a des valeurs propres nulles, la plus grande valeur propre de la matrice d'itération est donc 1.

   (b) En utilisant le fait que $\mathbb{R}^n = Im(A^tA) \oplus Ker(A^tA)$, montrez que néanmoins la méthode converge toujours.

   Corrigé : On a vu que $\mathbb{R}^n = Im(A^tA) \oplus Ker(A^tA)$ et que $A^tb \in Im(A^tA)$. Si on décompose x^k suivant ces deux sous-espaces : $x^k = x_a^k + x_b^k$ avec $x_a^k \in Im(A^tA)$ et $x_b^k \in Ker(A^tA)$, on obtient :

$$(A^tA + \alpha I)(x_a^{k+1} + x_b^{k+1}) = A^tb + \alpha(x_a^k + x_b^k)$$

   et par projection sur les deux sous-espaces orthogonaux

$$(A^tA + \alpha I)x_a^{k+1} = A^tb + \alpha x_a^k \quad \text{et} \quad x_b^{k+1} = x_b^k$$

   Ansi la composante sur $Ker(A^tA)$ ne change pas et la composante sur $Im(A^tA)$ évolue ; mais sur ce dernier sous-espace A^tA est bijective donc définie positive et la matrice d'itération (restreinte au sous-espace) a un rayon spectral strictement inférieur à 1 et donc la méthode y est convergente. Les composantes suivant les deux sous-espaces étant convergentes, la méthode est globalement convergente.

(c) Montrez que si $x^0 \in Ker(A)^\perp$ (par exemple $x^0 = 0$ ou $x^0 = A^t b$) alors la suite converge vers $\hat{x}$.

Corrigé : Si $x^0 \in Ker(A)^\perp$, $x_b^0 = 0$ et tous les x_b^k sont nuls. La limite z de la suite vérifie $(A^t A + \alpha I)z = A^t b + \alpha z$ avec $z \in Ker(A)^\perp$, c'est donc la solution unique de (1) dans $Ker(A)^\perp$, c'est à dire $\hat{x}$.