Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2003-2004
MACS-1

C. Basdevant - V. Martin

Corrigé du contrôle d'analyse
du lundi 8 mars 2004
Durée : 3h
Notes de cours autorisées

Le sujet se compose d'un problème et de deux exercices indépendants.

Problème
Etude générale des méthodes linéaires à 2 pas

Note : les questions 6 à 9 peuvent être traitées indépendamment des questions précédentes.

Pour résoudre numériquement le problème :

$$y' = f(x,y) \quad \forall x \geq 0, \quad y(0) = \eta \tag{1}$$

on considère des méthodes linéaires à deux pas :

$$\alpha_2\, y_{k+1} + \alpha_1\, y_k + \alpha_0\, y_{k-1} = h\,\{\beta_2 f_{k+1} + \beta_1 f_k + \beta_0 f_{k-1}\} \tag{2}$$

avec $x_k = kh$ et $f_k = f(x_k, y_k)$. Pour normaliser la formule (2) on impose :

$$\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 1$$

1. Ecrivez la condition nécessaire et suffisante pour que la méthode (2) soit d'ordre 2. Résolvez cette condition en prenant α_2 et β_2 comme paramètres.
2. Parmi les méthodes trouvées quelles sont celles qui sont 0-stables ? Distinguez les méthodes fortement et faiblement stables.
3. À quelle condition la méthode est-elle d'ordre 3 ?
4. Montrez qu'il n'existe pas de méthode linéaire à deux pas explicite d'ordre 3 stable.
5. Déterminez toutes les méthodes d'ordre 4.
6. Montrez que la méthode d'Adams-Bashforth :
$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\,(3f_k - f_{k-1})$$
est une méthode de type (2) d'ordre 2 pour des valeurs de α_2 et β_2 que l'on déterminera.
7. On admet le théorème de Schurr :
<u>Théorème</u> : Soit $\phi(\zeta)$ un polynôme sur $\mathbb{C}$: $\phi(\zeta) = c_q\zeta^q + c_{q-1}\zeta^{q-1} + \cdots + c_1\zeta + c_0$. On définit son conjugué $\hat{\phi}(\zeta)$ par $\hat{\phi}(\zeta) = \bar{c}_0\zeta^q + \bar{c}_1\zeta^{q-1} + \cdots + \bar{c}_{q-1}\zeta + \bar{c}_q$ et le polynôme $\phi_1(\zeta)$ par :
$$\phi_1(\zeta) = \frac{1}{\zeta}\left(\hat{\phi}(0)\phi(\zeta) - \phi(0)\hat{\phi}(\zeta)\right)$$
On a alors l'équivalence suivante :

– *toutes les racines du polynôme* ϕ *sont de module strictement inférieur à 1*
– $|\hat{\phi}(0)| > |\phi(0)|$ *et toutes les racines du polynôme* ϕ_1 *sont de module strictement inférieur à 1.*

Note : remarquez que $\deg \phi_1 < \deg \phi$.

Déduire du théorème de Schurr des conditions nécessaires et suffisantes portant sur les nombres complexes b et c pour que les racines de l'équation $z^2 + bz + c = 0$ soient toutes deux dans le disque unité ouvert.

8. Montrez que la région de stabilité absolue de la méthode d'Adams-Bashforth d'ordre 2 est définie par :

$$|z| < 2, \quad \text{et} \quad |1 + z - \tfrac{3}{4}|z|^2| < 1 - \tfrac{1}{4}|z|^2 \tag{3}$$

9. En déduire l'intersection avec l'axe réel de la région de stabilité absolue de la méthode d'Adams-Bashforth d'ordre 2.

Corrigé du problème

1. D'après le cours (Théorème II.4), les conditions de consistance et d'ordre 1 sont $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0$ et $2\alpha_2 + \alpha_1 = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 1$. La condition d'ordre 2 est $4\alpha_2 + \alpha_1 = 2\,(2\beta_2 + \beta_1)$. D'où l'on tire :

$$\alpha_1 = 1 - 2\alpha_2, \quad \alpha_0 = \alpha_2 - 1, \quad \beta_1 = \frac{1}{2} + \alpha_2 - 2\beta_2, \quad \beta_0 = \frac{1}{2} - \alpha_2 + \beta_2$$

2. Le polynôme ρ du schéma s'écrit : $\rho(x) = \alpha_2\, x^2 + (1 - 2\alpha_2)\, x + \alpha_2 - 1$, ses racines sont 1 et $\frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2}$. La condition de stabilité de Dahlquist impose que les racines soient de module inférieur ou égal à 1, les racines de module 1 étant simples ; cela s'écrit :

$$-1 \leq \frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2} < 1, \quad \text{soit} \quad \alpha_2 \geq \frac{1}{2}$$

La méthode est fortement stable si la deuxième racine n'est pas égale à -1, soit pour $\alpha_2 > \frac{1}{2}$; si $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ la méthode est faiblement stable.

3. La condition d'ordre 3 s'écrit $8\alpha_2 + \alpha_1 = 3\,(4\beta_2 + \beta_1)$. Ce qui donne :

$$\alpha_2 = \frac{1}{6} + 2\beta_2$$

4. La méthode est explicite si $\beta_2 = 0$, dans ce cas $\alpha_2 = \frac{1}{6}$ et la condition de stabilité n'est pas réalisée.

5. La condition d'ordre 4 s'écrit $16\alpha_2 + \alpha_1 = 4\,(8\beta_2 + \beta_1)$. Ce qui donne :

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_0 = -\frac{1}{2}, \quad \beta_2 = \frac{1}{6}, \quad \beta_1 = \frac{2}{3}, \quad \beta_0 = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2}\,(y_{k+1} - y_{k-1}) = \frac{h}{6}\,(f_{k+1} + 4f_k + f_{k-1})$$

C'est la méthode de Milne-Simpson à 2 pas.

6. La méthode d'Adams-Bashforth est une méthode de type (2) d'ordre 2 pour $\alpha_2 = 1$ et $\beta_2 = 0$.

7. Si on pose $\phi(z) = z^2 + bz + c$, on a $\hat{\phi}(z) = \bar{c}z^2 + \bar{b}z + 1$ et $\phi_1(z) = (1 - |c|^2)z + b - c\bar{b}$. La condition nécessaire et suffisante s'écrit donc : $|c| < 1$ et $|b - c\bar{b}| < 1 - |c|^2$.
8. La région de stabilité absolue d'une méthode est définie par l'ensemble des $z = \lambda h$ pour lesquels la solution y_k du schéma, appliqué à l'équation linéaire $y' = \lambda h$, converge vers 0 quand k tend vers l'infini. Pour la méthode d'Adams-Bashforth en question cela revient à touver les z tels que la suite récurrente à deux termes définie par $y_{k+1} = (1 + \frac{3z}{2})y_k - \frac{z}{2}y_{k-1}$ tende vers 0. Il faut donc que l'équation caractéristique $x^2 + (1 + \frac{3z}{2})x + \frac{z}{2} = 0$ ait ses racines dans le disque unité ouvert. D'après le résultat de la question précédente la condition nécessaire et suffisante s'écrit (3).
9. Pour z réel, la condition (3) s'écrit : $|z| < 2$ et $|1 + z - \frac{3}{4}z^2| < 1 - \frac{z^2}{4}$, soit : $|z| < 2$ et $\frac{3}{4}|(z-2)(z+\frac{2}{3})| < \frac{1}{4}(2-z)(2+z)$, ce qui donne, après simplification par $|z-2|$: $-1 < z < 0$.

Exercice I

Calculez l'ordre du schéma suivant destiné à intégrer numériquement l'EDO $y' = f(x, y)$, $y(0) = \eta$ et où l'on a posé $x_k = kh$ et $x_{k+\frac{1}{2}} = (k + \frac{1}{2})h$:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+\frac{1}{2}}, \tfrac{3}{2}\, y_k - \tfrac{1}{2}\, y_{k-1})$$

Corrigé de l'exercice I

Evaluons l'erreur locale de troncature :

$$\varepsilon_k = \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} - f(x_{k+\frac{1}{2}}, \tfrac{3}{2}\, y(x_k) - \tfrac{1}{2}\, y(x_{k-1}))$$

En développant au voisinage de $x_{k+\frac{1}{2}}$ on obtient :

$$\tfrac{3}{2}\, y(x_k) - \tfrac{1}{2}\, y(x_{k-1}) = y(x_{k+\frac{1}{2}}) + O(h^2)$$

et

$$\frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} = y'(x_{k+\frac{1}{2}}) + O(h^2)$$

et en reportant dans ε_k :

$$\varepsilon_k = y'(x_{k+\frac{1}{2}}) + O(h^2) - f(x_{k+\frac{1}{2}}, y(x_{k+\frac{1}{2}}) + O(h^2))$$

$$\varepsilon_k = y'(x_{k+\frac{1}{2}}) + O(h^2) - f(x_{k+\frac{1}{2}}, y(x_{k+\frac{1}{2}})) + O(h^2) = O(h^2)$$

Le schéma est d'ordre 2.

Exercice II

Etablir une formule de quadrature à l'ordre le plus élevé possible de la forme :

$$\int_{-1}^{1} f(x)|x|dx \approx \alpha f(x_\alpha) + \beta f(x_\beta)$$

Corrigé de l'exercice II

Si la formule est exacte sur $\mathcal{P}_0$: $\int_{-1}^{1} |x| dx = 1 = \alpha + \beta$.
Si la formule est exacte sur $\mathcal{P}_1$: $\int_{-1}^{1} x|x| dx = 0 = \alpha x_\alpha + \beta x_\beta$.
Si la formule est exacte sur $\mathcal{P}_2$: $\int_{-1}^{1} x^2|x| dx = \frac{1}{2} = \alpha x_\alpha^2 + \beta x_\beta^2$.
Si la formule est exacte sur $\mathcal{P}_3$: $\int_{-1}^{1} x^2|x| dx = 0 = \alpha x_\alpha^3 + \beta x_\beta^3$.
On tire de la relation donnée par $\mathcal{P}_1$: $\alpha x_\alpha = -\beta x_\beta$; en reportant dans celle donnée par $\mathcal{P}_3$ on obtient $x_\alpha = -x_\beta$ (en éliminant les cas $x_\alpha = x_\beta$ ou $\beta x_\beta = 0$ qui ne peuvent convenir) et ensuite $\alpha = \beta$. Par la relation sur $\mathcal{P}_0$ on obtient : $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Enfin en reportant dans la relation pour $\mathcal{P}_2$ on détermine $x_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. La formule suivante est donc d'ordre 3 (on vérifie qu'elle n'est pas d'ordre 4) :

$$\int_{-1}^{1} f(x)|x| dx \approx \frac{1}{2}\left(f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) + f(\frac{1}{\sqrt{2}})\right)$$