Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2013-2014
MACS - 1

C. Basdevant, B. Delourme

Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique du 7 janvier 2014

Durée : 3h

Une feuille recto-verso de notes personnelles manuscrites est autorisée.

Problème I

Soit $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction suffisamment continûment différentiable. On pose :

$$g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + f(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

On suppose f et g Lipschitziennes par rapport à y :

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(x,z)| &\leq L\,|y-z| \quad \forall x \in [a,b], \quad \forall y,z \in \mathbb{R} \\ |g(x,y) - g(x,z)| &\leq M\,|y-z| \end{aligned}$$

Pour résoudre numériquement le problème :

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in [a,b], \quad y(a) = \eta \tag{1}$$

on utilise la méthode :

$$y_{k+1} = y_k + hf_k + \frac{h^2}{2} g_k \tag{2}$$

avec $h = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + kh$, $y_0 = \eta$, $f_k = f(x_k, y_k)$, $g_k = g(x_k, y_k)$.

1. Etudiez la stabilité, la convergence et l'ordre de la méthode (2).

   Corrigé : La méthode est une méthode à un pas, du type $y_{k+1} = y_k + h\Phi(x_k, y_k; h)$ avec $\Phi(x,y;h) = f(x,y) + \frac{h}{2} g(x,y)$. Une condition suffisante de stabilité est que Φ soit Lipschitzienne par rapport à y, c'est le cas puisque

   $$|\Phi(x,y;h) - \Phi(x,z;h)| \leq (L + \frac{h_0}{2}M)|y-z| \quad \forall x \in [a,b], \quad \forall y,z \in \mathbb{R}, \quad \forall h \leq h_0$$

   La méthode est consistante si et seulement si $\Phi(x,y;0) = f(x,y)$, ce qui est le cas. La méthode étant stable et consistante elle est convergente d'après le théorème d'équivalence de Lax et Richtmyer. Elle est d'ordre 2 car

   $$\frac{\partial \Phi(x,y;0)}{\partial h} = f^{(1)}(x,y) = g(x,y)$$

On veut dans la suite construire une méthode d'ordre 4.

2. Soit $\xi \in]0,1[$, déterminez α et β pour que la formule de quadrature

$$\int_0^\xi \phi(t)dt \approx \alpha\phi(0) + \beta\phi'(0) \tag{3}$$

soit exacte pour les polynômes de degré 1.

Corrigé : Méthode exacte pour les constantes ($\phi(t) = 1$), impose : $\xi = \alpha$
Méthode exacte pour les polynômes de degré 1 ($\phi(t) = t$), impose : $\frac{\xi^2}{2} = \beta$

3. En déduire une formule de quadrature $\int_x^{x+h\xi} \psi(t)dt \approx c(h,\xi)\psi(x) + d(h,\xi)\psi'(x)$ exacte pour les polynômes de degré 1.

Corrigé : Posons $\phi(t) = \psi(x+th)$, alors $\int_0^\xi \phi(t)dt = \int_0^\xi \psi(x+th)dt = \frac{1}{h}\int_x^{x+h\xi} \psi(u)du$, on obtient donc la formule exacte pour les polynômes de degré 1

$$\int_x^{x+h\xi} \psi(t)dt \approx h\alpha\psi(x) + h^2\beta\psi'(x)$$

avec $\alpha = \xi$ et $\beta = \frac{\xi^2}{2}$ les coefficients de la formule (3).

4. On pose $x_{k,1} = x_k + \xi h$. Montrez, en utilisant par exemple la théorie de l'erreur dans l'interpolation d'Hermite, que, pour une fonction ϕ assez régulière :

$$\int_{x_k}^{x_{k,1}} \phi(x)dx = h\alpha\phi(x_k) + h^2\beta\phi'(x_k) + O(h^3) \tag{4}$$

Corrigé : Soit $P(x)$ le polynôme d'interpolation d'Hermite de degré 1 tel que $P(x_k) = \phi(x_k)$ et $P'(x_k) = \phi'(x_k)$, on sait que $\phi(x) - P(x) = \frac{(x-x_k)^2}{2}\phi^{(2)}(\zeta)$, donc

$$|\int_{x_k}^{x_{k,1}} \phi(x)dx - \int_{x_k}^{x_{k,1}} P(x)dx| \leq \frac{h^3}{2}\sup_t|\phi^{(2)}(t)|$$

Mais, d'après (3), $\int_{x_k}^{x_{k,1}} P(x)dx = h\alpha\phi(x_k) + h^2\beta\phi'(x_k)$, d'où le résultat.

5. Déterminez le système définissant les réels a_0, a_1, b_0, b_1 pour que la formule de quadrature

$$\int_0^1 \phi(t)dt \approx a_0\phi(0) + a_1\phi(\xi) + b_0\phi'(0) + b_1\phi'(\xi) \tag{5}$$

soit exacte pour les polynômes de degré 3. Calculez explicitement le coefficient a_1 en fonction de ξ.

Corrigé : Méthode exacte pour les constantes ($\phi(t) = 1$), impose : $1 = a_0 + a_1$
Méthode exacte pour les polynômes de degré 1 ($\phi(t) = t$), impose : $\frac{1}{2} = a_1\xi + b_0 + b_1$
Méthode exacte pour les polynômes de degré 2 ($\phi(t) = t^2$), impose : $\frac{1}{3} = a_1\xi^2 + 2b_1\xi$
Méthode exacte pour les polynômes de degré 3 ($\phi(t) = t^3$), impose : $\frac{1}{4} = a_1\xi^3 + 3b_1\xi^2$
On a bien 4 équations pour 4 inconnues, des deux dernières on tire :

$$a_1 = \frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{2\xi^3}$$

6. En déduire une formule de quadrature pour approcher $\int_{x_k}^{x_k+h} \psi(t)dt$ utilisant les valeurs $\psi(x_k)$, $\psi(x_{k,1})$, $\psi'(x_k)$, $\psi'(x_{k,1})$, qui soit exacte pour les polynômes de degré 3.
Corrigé : Posons $\phi(t) = \psi(x_k+th)$, alors $\int_0^1 \phi(t)dt = \int_0^1 \psi(x_k+th)dt = \frac{1}{h}\int_{x_k}^{x_k+h} \psi(u)du$, on obtient donc la formule exacte pour les polynômes de degré 3
$$\int_{x_k}^{x_k+h} \psi(t)dt \approx h\left[a_0\psi(x_k) + a_1\psi(x_{k,1})\right] + h^2\left[b_0\psi'(x_k) + b_1\psi'(x_{k,1})\right]$$

7. Montrez que, pour ϕ assez régulière,
$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi(x)dx = h\left[a_0\phi(x_k) + a_1\phi(x_{k,1})\right] + h^2\left[b_0\phi'(x_k) + b_1\phi'(x_{k,1})\right] + O(h^5) \quad (6)$$
Corrigé : Soit $P(x)$ le polynôme d'interpolation d'Hermite de degré 3 tel que $P(x_k) = \phi(x_k)$, $P'(x_k) = \phi'(x_k)$, $P(x_{k,1}) = \phi(x_{k,1})$ et $P'(x_{k,1}) = \phi'(x_{k,1})$, on sait que $\phi(x) - P(x) = \frac{(x-x_k)^2(x-x_{k,1})^2}{4!}\phi^{(4)}(\zeta)$, donc
$$|\int_{x_k}^{x_{k,1}} \phi(x)dx - \int_{x_k}^{x_{k,1}} P(x)dx| \leq \frac{h^5}{4!}\sup_t|\phi^{(4)}(t)|$$
Mais, d'après (5), $\int_{x_k}^{x_{k+1}} P(x)dx = h\left[a_0\phi(x_k) + a_1\phi(x_{k,1})\right] + h^2\left[b_0\phi'(x_k) + b_1\phi'(x_{k,1})\right]$, d'où le résultat.

8. On considère maintenant la méthode à un pas définie par $y_{k+1} = y_k + h\Phi(x_k, y_k; h)$ avec
$$\begin{cases} y_1(x,y;h) = y + h\alpha f(x,y) + h^2\beta g(x,y) \\ \Phi(x,y;h) = a_0 f(x,y) + a_1 f(x+\xi h, y_1(x,y;h)) \\ \qquad\qquad + h\left[b_0 g(x,y) + b_1 g(x+\xi h, y_1(x,y;h))\right] \end{cases} \quad (7)$$
Cette méthode est-elle stable ?
Corrigé : Pour la stabilité il faut vérifier si Φ est Lipschitzienne en y, or
$$\begin{aligned} |\Phi(x,y;h) - \Phi(x,z;h)| \leq & |a_0 L(y-z)| + |a_1 L(y_1(x,y;h) - y_1(x,z;h))| \\ & + |hb_0 M(y-z)| + |hb_1 M(y_1(x,y;h) - y_1(x,z;h))| \end{aligned}$$
Comme d'autre part $|y_1(x,y;h) - y_1(x,z;h)| \leq (1 + h\alpha L + h^2\beta M)|y-z|$, le caractère Lipschitzien de Φ est vérifié.

9. On suppose que la solution $y(x)$ de l'équation différentielle (1) est suffisamment régulière et on pose
$$z_{k,1} = y(x_k) + h\alpha f(x_k, y(x_k)) + h^2\beta g(x_k, y(x_k))$$
(a) Vérifiez que $z_{k,1} = y(x_{k,1}) + O(h^3)$
Corrigé :
$$y(x_{k,1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k,1}} y'(t)dt = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k,1}} f(t,y(t))dt$$
et donc d'après (4)
$$y(x_{k,1}) = y(x_k) + h\alpha f(x_k, y(x_k)) + h^2\beta g(x_k, y(x_k)) + O(h^3)$$
cqfd.

(b) Soit $\varepsilon_k = \dfrac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} - \Phi(x_k, y(x_k); h)$ montrez que

$$\varepsilon_k = O(h^4) + a_1 O(h^3)$$

Corrigé :

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(t)dt = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t, y(t))dt$$

et donc d'après (6)

$$\begin{aligned}
y(x_{k+1}) = y(x_k) &+ h\left[a_0 f((x_k, y(x_k)) + a_1 f(x_{k,1}, y(x_{k,1}))\right] \\
&+ h^2\left[b_0 g(x_k, y(x_k)) + b_1 g(x_{k,1}, y(x_{k,1}))\right] + O(h^5) \\
y(x_{k+1}) = y(x_k) &+ h\left[a_0 f((x_k, y(x_k)) + a_1 f(x_{k,1}, z_{k,1} + O(h^3))\right] \\
&+ h^2\left[b_0 g(x_k, y(x_k)) + b_1 g(x_{k,1}, z_{k,1} + O(h^3))\right] + O(h^5) \\
y(x_{k+1}) = y(x_k) &+ h\left[a_0 f((x_k, y(x_k)) + a_1 f(x_{k,1}, z_{k,1})\right] + a_1 O(h^4) \\
&+ h^2\left[b_0 g(x_k, y(x_k)) + b_1 g(x_{k,1}, z_{k,1})\right] + b_1 O(h^5) + O(h^5)
\end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned}
\Phi(x_k, y(x_k); h) = & a_0 f((x_k, y(x_k)) + a_1 f(x_{k,1}, z_{k,1}) \\
& + h\left[b_0 g(x_k, y(x_k)) + b_1 g(x_{k,1}, z_{k,1})\right]
\end{aligned}$$

on a bien la relation demandée.

10. Déterminez ξ pour que la méthode (7) soit d'ordre 4 et donnez alors la forme exacte du schéma.
Corrigé : Le schéma sera d'ordre 4 si $a_1 = 0$, soit $\xi = \frac{1}{2}$. On a alors $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{8}$, $a_0 = 1$, $b_0 = \frac{1}{6}$ et $b_1 = \frac{1}{3}$. Et le schéma s'écrit :

$$\begin{cases}
y_1(x, y; h) = y + \dfrac{h}{2} f(x, y) + \dfrac{h^2}{8} g(x, y) \\
\Phi(x, y; h) = f(x, y) + h\left[\dfrac{1}{6} g(x, y) + \dfrac{1}{3} g(x + \dfrac{h}{2}, y_1(x, y; h))\right]
\end{cases}$$

Problème II

Soit A une matrice réelle, $n \times n$, symétrique, définie positive.
Pour résoudre le système :

$$Ax = b\ , \qquad b \text{ donné dans } \mathbb{R}^n \tag{8}$$

on considère la méthode itérative suivante pour laquelle x_0 est arbitraire et σ est un paramètre réel non nul :

$$x_{n+1} = x_n - \sigma(Ax_n - b) \tag{9}$$

1. Montrez que la méthode (9) converge vers la solution du système (8) si et seulement si :
$$0 < \sigma < \frac{2}{\rho(A)} ,$$
où $\rho(A)$ désigne le rayon spectral de A.

   Corrigé : Si la méthode converge vers une limite y, celle-ci vérifie l'"équation $y = y - \sigma(Ay - b)$, c'est donc bien l'unique solution du problème (8) dès que $\sigma \neq 0$.
   Pour que la méthode converge il faut et il suffit que le rayon spectral de la matrice d'itération soit inférieur strictement à 1. La matrice d'itération étant $I - \sigma A$ ses valeurs propres sont $1 - \sigma\lambda$ avec λ valeur propre de A ; valeurs propres qui sont, par hypothèse, réelles strictement positives. On doit donc avoir $-1 < 1 - \sigma\lambda < 1$ soit $0 < \sigma\lambda < 2$ quel que soit λ, d'où le résultat demandé.

2. Montrez que la vitesse de convergence de la méthode (9) est maximale pour une valeur de σ que l'on exprimera en fonction de $\rho(A)$ et $\rho(A^{-1})$.

   Corrigé : La vitesse de convergence de la méthode est d'autant plus grande que le rayon spectral de la matrice d'itération est petit, il faut donc choisir σ qui minimise la quantité $\max_i|1 - \sigma\lambda_i|$ avec λ_i les valeurs propres de A. Cette fonction s'écrit $f(\sigma) = \max\{1 - \sigma\lambda_1, \sigma\lambda_n - 1\}$ avec λ_1 et λ_n respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de A. Son graphe est tracé sur la Figure 1 et elle est minimale pour $\sigma = \frac{2}{\lambda_1+\lambda_n}$, soit :
$$\sigma = \frac{2}{\frac{1}{\rho(A^{-1})} + \rho(A)}$$

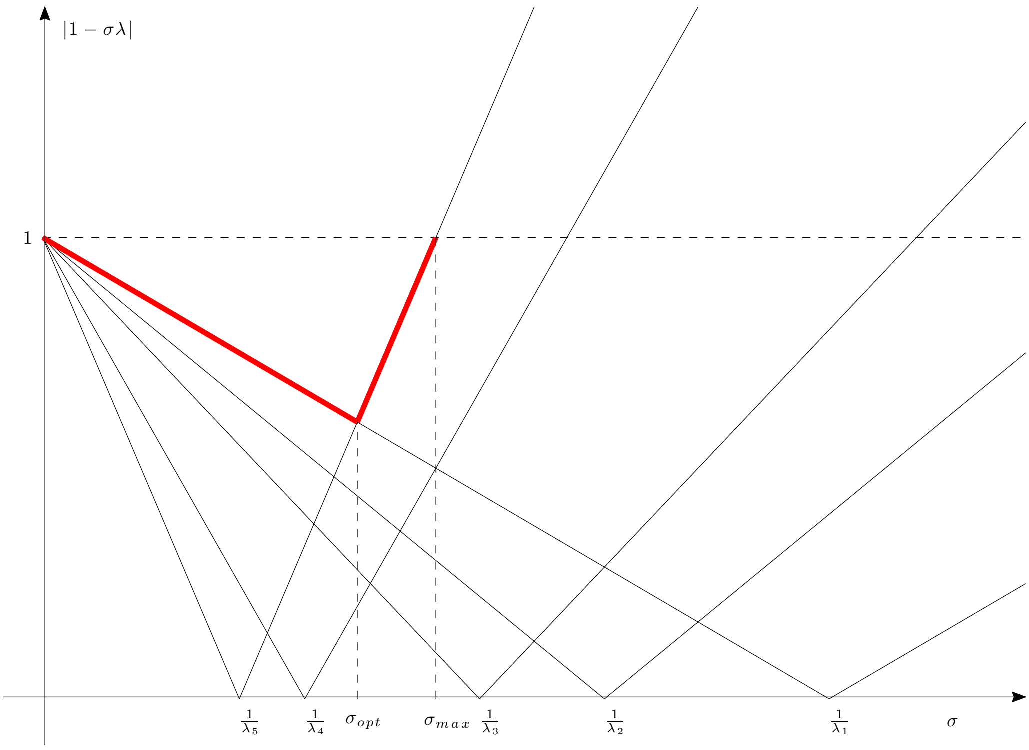

FIG. 1 – $\rho(I - \sigma A)$ en fonction de σ