Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2004-2005
MACS 1
C. Basdevant

Contrôle du 16 mai 2005
d'Analyse Numérique

Durée 1h Notes de cours autorisées

Exercice 1

On considère le système d'E.D.O. pour lequel on admettra l'existence d'une solution gobale pour $t > 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y(t)^2 & , x_0 \in \mathbb{R} \\ \dfrac{dy}{dt} = \sin(\sqrt{1+x(t)^2}\,) & , y_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

et le schéma :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hy_n^2 + h^2 y_n \sin(\sqrt{1+x_n^2}\,) \\ y_{n+1} = y_n + h\sin(\sqrt{1+x_n^2+hx_ny_n^2}\,) \end{cases} \tag{2}$$

avec h le pas de discrétisation en temps.

1. Montrez que le schéma est consistant.
2. Avec les notations du cours, calculez $\frac{\partial \Phi}{\partial h}(x, y; 0)$.
3. Calculez $f^{(1)}$.
4. Ce schéma est-il d'ordre 2 ?

Exercice 2

Pour résoudre l'EDO $y' = f(t, y(t))$ on considère les méthodes à 2 pas de la forme :

$$y_{n+1} = \alpha y_{n-1} + \alpha' y_n + h(\beta f_{n-1} + \beta' f_n + \beta" f_{n+1}), \tag{3}$$

avec $f_n = f(t_n, y_n)$.

1. Déterminez les conditions sur α, α', β, β', $\beta"$ pour que la méthode soit d'ordre ≥ 1, ≥ 2, ≥ 3
2. montrez que la seule méthode qui soit d'ordre ≥ 4 est :
$$y_{n+1} = y_{n-1} + h\,(\frac{1}{3}f_{n-1} + \frac{4}{3}f_n + \frac{1}{3}f_{n+1}), \tag{4}$$
3. Montrez que, quand la méthode (3) est au moins d'ordre 1, la condition nécessaire et suffisante de stabilité s'écrit $-1 < \alpha \leq 1$.
4. Déterminez en fonction de α les méthodes (3) qui sont d'ordre 3. A quoi correspond la méthode d'ordre 3 pour $\alpha = 0$?
5. Existe-t-il une méthode d'ordre 3 explicite et stable ?
6. Montrez qu'il existe une unique méthode d'ordre 3 pour laquelle $\beta = 0$. Explicitez cette méthode, est-elle stable ?