Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2003-2004
MACS-1

C. Basdevant - V. Martin

Contrôle d'analyse
du lundi 2 février 2004
Durée : 1h30
Notes de cours autorisées

Problème I

Soit $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction suffisamment continûment différentiable. On pose :

$$g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + f(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

On suppose f et g Lipschitziennes par rapport à y :

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(x,z)| &\leq L\,|y-z| \quad \forall x \in [a,b], \quad \forall y,z \in \mathbb{R} \\ |g(x,y) - g(x,z)| &\leq M\,|y-z| \end{aligned}$$

Pour résoudre numériquement le problème :

$$y' = f(x,y) \quad \forall x \in [a,b], \quad y(a) = \eta \tag{1}$$

on utilise la méthode à un pas implicite :

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left\{(1+\alpha)f_{k+1} + (1-\alpha)f_k\right\} - \frac{h^2}{4}\left\{(\beta+\alpha)g_{k+1} - (\beta-\alpha)g_k\right\} \tag{2}$$

avec $h = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + kh$, $y_0 = \eta$, $f_k = f(x_k, y_k)$, $g_k = g(x_k, y_k)$ et α et β sont des réels à déterminer au mieux.

1. Donnez une méthode itérative de calcul de la solution y_{k+1} de l'équation (2) et une condition suffisante sur h pour qu'elle converge.
2. Déterminez l'ordre de la méthode (2) pour α et β quelconques.
3. Pour quelle valeur de β la méthode est-elle d'ordre 3 ?
4. Pour quelle valeur du couple α, β est-elle d'ordre 4 ?
5. Etudiez la stabilité de la méthode.
6. Donnez une majoration de l'erreur $\max_k |y_k - y(x_k)|$.

Problème II

On considère une formule de quadrature de la forme :

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + E(f)$$

1. On pose $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$. Trouvez λ_1 et λ_2 tels que la méthode soit d'ordre le plus élevé possible.
2. Montrez qu'alors le noyau de Péano est de signe constant sur $[-1,1]$.
3. En déduire que pour tout $f \in C^2([-1,1])$, il existe $\xi_f \in [-1,1]$ tel que
$$E(f) = -\frac{2}{15} f^{(2)}(\xi_f)$$
4. Déterminez λ_1, λ_2 et x_1, x_2 pour que la méthode soit exacte sur $\mathcal{P}_3$, l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.