Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2005-2006
MACS - 1
C. Basdevant

Devoir surveillé d'Analyse Numérique
du lundi 27 mars 2006

Durée : 1h30
Aucun document n'est autorisé.

Exercice

Soient $N+2$ réels $\{a_k,\ k=0,\cdots,N+1\}$. Trouvez le réel X tel que l'identité suivante soit exacte :

$$X + \sum_{k=1}^{k=N-1} (a_{k+1}-a_k)^2 = \sum_{k=1}^{k=N} \left(\frac{a_{k+1}-a_{k-1}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{k=N} (a_{k+1}-2a_k+a_{k-1})^2$$

Interprétez cette identité.

Problème

On considère l'équation de la chaleur sur $[0,1]$ avec des conditions aux limites de Dirichlet :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall x \in]0,1[\quad , \quad \forall t > 0 \\
&u(0,t) = f(t) \quad \forall t > 0 \\
&u(1,t) = g(t) \quad \forall t > 0 \\
&u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in [0,1]
\end{aligned}$$

où f,g et u^0 sont des fonctions données régulières, compatibles entre elles.

Pour un maillage régulier en temps $t_n = n\Delta t$, et **non régulier** en espace

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < x_N = 1$$

on introduit le schéma d'approximation par différences finies où $u_j^n \approx u(x_j, t_n)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} = \frac{2}{\Delta x_{j-1}+\Delta x_j}\left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x_j} - \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x_{j-1}}\right) \quad 1 \le j \le N-1\ ,\ n \ge 0 \\
&u_0^n = f(t_n) \quad n \ge 1 \\
&u_N^n = g(t_n) \quad n \ge 1 \\
&u_j^0 = u^0(x_j) \qquad 0 \le j \le N
\end{aligned}$$

avec $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$.

1. Montrer que le terme principal de l'erreur de troncature s'écrit (pour une solution $u(x,t)$ assez régulière) :

$$T_j^n = \alpha_j \ u_{tt}(x_j, t_n) + \beta_j \ u_{xxx}(x_j, t_n) + \gamma_j \ u_{xxxx}(x_j, t_n)$$

avec α_j, β_j et γ_j des coefficients que l'on exprimera en fonction des Δt et Δx_i.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante (liant Δt et les Δx_j) pour que le schéma conserve la positivité.

3. On pose $\Delta x = \mathrm{Max}\{\Delta x_j\}$, et on suppose que le maillage vérifie :

$$|\Delta x_j - \Delta x_{j-1}| \leq \alpha \ (\Delta x)^2 \qquad j = 1, 2, \ldots, N-1$$

avec α une constante positive. Montrez que, sous la condition de stabilité trouvée à la question précédente, on a la majoration d'erreur pour $t_n < T$:

$$|u_j^n - u(x_j, t_n)| \leq T \left\{ \frac{1}{2} \ \Delta t \ M_{tt} + (\Delta x)^2 \left(\frac{1}{3} \ \alpha \ M_{xxx} + \frac{1}{12} \ \left[1 + \alpha (\Delta x)^2\right] \ M_{xxxx} \right) \right\}$$

avec $M_{\lambda\lambda} = \mathrm{Sup}\{ \ |u_{\lambda\lambda}(x,t)| \ ; \ 0 \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq t \leq T\}$

4. Commentez le résultat trouvé à la question précédente.