Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2005-2006
MACS - 1
C. Basdevant

Examen d'Analyse Numérique
du mardi 6 juin 2006

Durée : 3h
Notes de cours autorisées.

Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées

Exercice I

Pour un maillage régulier en temps $t_n = n\Delta t,\ n \in \mathbb{N}$ et en espace $x_j = j\Delta x,\ j \in \mathbb{Z}$, on introduit le schéma d'approximation par différences finies où $u_j^n \approx u(x_j, t_n)$:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{a}{4\Delta x}\left(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) = 0 \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0 \tag{1}$$

où a est une constante réelle positive.

1. Pour quelle est équation ce schéma est-il défini ?
2. Dessinez le stencil du schéma. Le stencil permet-il de déduire une condition nécessaire de stabilité ?
3. Analysez la stabilité de ce schéma.
4. Quel est l'ordre de ce schéma ?
5. On considère dorénavant ce schéma pour un problème sur le segment [0 1].
   (a) Quelles conditions aux limites faut-il imposer ?
   (b) Adaptez le schéma pour tenir compte des conditions aux limites.
   (c) Donnez des conditions suffisantes portant sur Δt et Δx pour que la solution du schéma soit calculable et indiquez une méthode de résolution.

Exercice II

Pour la loi de conservation scalaire :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(\phi) = 0 \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0 \tag{2}$$

On considère le schéma sur un maillage régulier en espace et en temps :

$$\phi_j^* = \phi_j^n - \lambda\left(f(\phi_{j+1}^n) - f(\phi_j^n)\right)$$
$$\phi_j^{n+1} = \frac{1}{2}(\phi_j^n + \phi_j^*) - \frac{\lambda}{2}\left(f(\phi_j^*) - f(\phi_{j-1}^*)\right)$$

où $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ et $\phi_j^n \approx \phi(j\Delta x, n\Delta t)$.

1. Etudiez les propriétés de ce schéma pour l'équation de transport.
2. Dans le cas non-linéaire, montrez que ce schéma est conservatif, on donnera l'expression du flux numérique.
3. Vérifiez que le schéma est consistant.
4. Calculez l'ordre du schéma.
5. Le schéma est-il monotone ?

Exercice III

On considère l'équation de convection diffusion sur $[0,1]$ avec des conditions aux limites périodiques :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + b\frac{\partial u}{\partial x} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \forall x \in]0,1[\quad , \qquad \forall t > 0 \\ &u(0,t) = u(1,t) \quad \forall t > 0 \\ &u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in [0,1] \end{aligned} \tag{3}$$

où u^0 est périodique de période 1, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Pour un maillage régulier en temps $t_n = n\Delta t,\ n \in \mathbb{N}$ et en espace $x_j = j\Delta x,\ 0 \leq j \leq N,\ N = 1/\Delta x$, on introduit le schéma d'approximation par différences finies où $u_j^n \approx u(x_j, t_n)$ et $\theta \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} &\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + b\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = a\theta\frac{u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{(\Delta x)^2} + a(1-\theta)\frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{(\Delta x)^2} \\ &j \in [0, N-1]\ ,\ n \geq 0 \\ &u_j^0 = u^0(x_j), \quad j \in [0, N-1] \\ &u_N^n = u_0^n \end{aligned} \tag{4}$$

1. Pour quelles valeurs de θ le schéma est-il implicite ? Expliquez pourquoi et comment on peut alors intégrer le schéma.
2. Montrez que la condition nécessaire et suffisante de stabilité du schéma s'écrit :
   - Pour $\theta \in [0, \frac{1}{2}[\ :\ a\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}$ et $b^2\Delta t \leq 2a$.
   - Pour $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]\ :\ b^2\Delta t \leq 2a$.
3. Discutez et commentez la condition précédente. On examinera en particulier les cas $b = 0$ et $a \to 0$.