Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2006-2007
MACS - 1
C. Basdevant

Devoir surveillé d'Analyse Numérique
du mercredi 2 mai 2007

Durée : 1h30
Notes de cours autorisées.

Exercice I

On considère, pour l'équation de la chaleur sur tout $\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad \forall t > 0$$
$$u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

des schémas de différences finies associés à des maillages réguliers de l'espace et du temps $x_j = j\Delta x$, $t_n = n\Delta t$. Pour cela on définit l'opérateur δ_x^2 par :

$$\delta_x^2\, u_j = u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j$$

et on pose $\lambda = \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2}$. On rappelle que les racines de l'équation du second degré à coefficients réels $z^2 + bz + c = 0$ sont toutes les deux dans le disque unité fermé si et seulement si $|c| \leq 1$ et $|b| \leq 1 + c$.

Etudiez l'ordre et la stabilité du schéma :

$$u_j^{n+1} - u_j^{n-1} = \frac{1}{3}\lambda \left\{ \delta_x^2\, u_j^{n+1} + \delta_x^2\, u_j^n + \delta_x^2\, u_j^{n-1} \right\}$$

Exercice II

On considère, pour l'équation de la chaleur sur tout $\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad \forall t > 0$$
$$u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

le schéma d'approximation par différences finies sur un maillage régulier en espace et en temps :

$$\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} + A_h u_h^n = 0$$

où l'opérateur A_h est défini par :

$$(A_h v_h)_j = -\frac{4}{3}\frac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{h^2} + \frac{1}{3}\frac{v_{j+2} - 2v_j + v_{j-2}}{(2h)^2} - \frac{\Delta t}{2}\frac{v_{j+2} - 4v_{j+1} + 6v_j - 4v_{j-1} + v_{j-2}}{h^4}$$

1. De quel type de schéma s'agit-il ?
2. Quel est son ordre ?
3. A quelle condition ce schéma conserve-t-il la positivité ?
4. Trouvez par une analyse de Von Neumann la CNS de stabilité.