Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2007-2008
MACS - 1
C. Basdevant

Devoir surveillé d'Analyse Numérique du vendredi 16 mai 2008

Durée : 1h30
Aucun document autorisé.

Exercice I

On considère, pour l'équation de la chaleur sur tout $\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad , \qquad \forall t > 0$$
$$u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

des schémas de différences finies associés à des maillages réguliers de l'espace et du temps $x_j = j\Delta x$, $t_n = n\Delta t$. Pour cela on définit l'opérateur δ_x^2 par :

$$\delta_x^2 \; u_j = u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j$$

et le schéma :

$$\frac{3}{2}\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{1}{2}\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} = \frac{\nu}{(\Delta x)^2}\delta_x^2 \; u_j^{n+1}$$

1. Décrivez le stencil du schéma et donnez son type.
2. Déterminez l'ordre du schéma.
3. Etudiez la stabilité du schéma.

   On rappelle que les racines de l'équation du second degré à coefficients réels $z^2 + bz + c = 0$ sont toutes les deux dans le disque unité fermé si et seulement si $|c| \leq 1$ et $|b| \leq 1 + c$.

Exercice II

On considère, pour l'équation de la chaleur sur tout $\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad , \qquad \forall t > 0$$
$$u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

le schéma d'approximation par différences finies sur un maillage régulier en espace et en temps (schéma de Du Fort & Frankel) :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = \nu \frac{u_{j+1}^n - u_j^{n+1} - u_j^{n-1} + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

1. Décrivez le stencil du schéma et donnez son type.
2. Montrez que l'erreur locale de troncature est en $O((\Delta t)^2) + O((\Delta x)^2) + O\left((\frac{\Delta t}{\Delta x})^2\right)$.
3. A quelle condition ce schéma conserve-t-il la positivité ?
4. Etudiez la stabilité de ce schéma.