Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2007-2008
MACS - 1
C. Basdevant

Examen d'Analyse Numérique
du lundi 9 juin 2008

Durée : 3h
Aucun document autorisé.

Problème I

Pour calculer les solutions de l'équation de transport sur toute la droite réelle

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad , \qquad \forall t > 0$$
$$u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

avec $c > 0$, on considère une famille de schémas de différences finies explicites $S(\tau)$ associés à des maillages réguliers de l'espace et du temps $x_j = j\Delta x$, $t_n = n\Delta t$.

$$S(\tau) \qquad : \qquad u_j^{n+1} = \lambda\frac{\tau+1}{2}u_{j-1}^n + (1-\lambda\tau)u_j^n + \lambda\frac{\tau-1}{2}u_{j+1}^n$$

où τ est un paramètre réel et on a posé $\lambda = c\frac{\Delta t}{\Delta x}$.

1. Quels schémas retrouve-t-on quand : a) $\tau = \lambda$, b) $\tau = 1$, c) $\tau = 0$, d) $\tau = \frac{1}{\lambda}$
2. A quelles conditions sur τ le schéma est-il consistant ? A quelles conditions sur τ le schéma est-il d'ordre 2 (en espace et en temps) ?
3. Quel est le cône de dépendance numérique ? Donnez, en la justifiant, une condition nécessaire de convergence.
4. Calculez le coefficient d'amplification $g(K,\lambda,\tau)$ de von Neumann et son module pour le schéma $S(\tau)$ (où l'on note $K = k\Delta x$).

   (Note : on pourra écrire $|g(K,\lambda,\tau)|^2 = 1+\lambda^2(\cos K - 1)F(\lambda,\tau,K)$, F à déterminer)
5. En déduire la condition nécessaire et suffisante de stabilité, portant sur λ, en fonction de τ. On distinguera les cas $\tau \leq 0$, $0 < \tau \leq 1$ et $1 < \tau$.
6. Discuter la stabilité des schémas de la question 1.
7. Quand $S(\tau)$ est stable, à quelles conditions vérifie-t-il le principe du maximum ?
8. En écrivant le schéma comme une perturbation du schéma d'Euler centré, montrez que pour $1 \ll \tau$ le schéma est fortement dissipatif.

Problème II

On considère le problème suivant : Trouver une fonction $f = f(x, v, t)$, définie de $[0, L] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, solution du problème hyperbolique

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{e}{m}\frac{d\Phi}{dx}\frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad 0 < x < L, \quad v \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{1}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} f(0, v, t) &= g(v) \quad \text{pour} \quad v > 0, \quad t \geq 0 && (2) \\ f(L, v, t) &= 0 \quad \text{pour} \quad v < 0, \quad t \geq 0 && (3) \end{aligned}$$

et la condition initiale

$$f(x, v, 0) = 0 \tag{4}$$

Dans ce problème, $\Phi = \Phi(x)$ est une fonction donnée de $[0, L]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\Phi(0) = 0$ et $\Phi(L) > 0$, et $g = g(v)$ est donnée de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Ces deux fonctions sont supposées "assez régulières". D'autre part e et m sont des constantes positives données.

Le problème (1) modélise la situation physique suivante : une cathode placée en $x = 0$, au potentiel $\Phi(0) = 0$, émet des électrons (de charge $-e$ et de masse m) vers une anode placée en $x = L$, au potentiel $\Phi(L) > 0$. Ces électrons sont accélérés par un champ électrique statique $E = -\frac{d\Phi}{dx}$. Le but du problème est de calculer la fonction de distribution des électrons $f(x, v, t)$ en fonction de la position x, de la vitesse v et du temps t.

1. On désigne par $t \to (X(t; x_0, v_0, t_0), V(t; x_0, v_0, t_0))$ la courbe caractéristique associée à (1) issue au temps t_0 du point (x_0, v_0) de l'espace des phases. Soit :

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt}(t; x_0, v_0, t_0) &= V(t; x_0, v_0, t_0) \\ \frac{dV}{dt}(t; x_0, v_0, t_0) &= \frac{e}{m}\frac{d\Phi}{dx}(X(t; x_0, v_0, t_0)) \\ X(t_0; x_0, v_0, t_0) &= x_0 \\ V(t_0; x_0, v_0, t_0) &= v_0 \end{aligned}$$

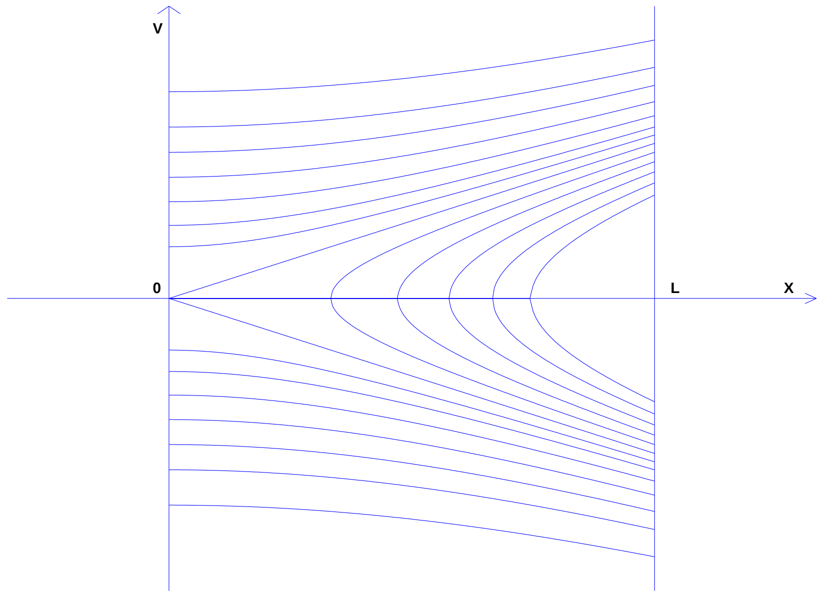
   Montrez que f est constante le long de chaque courbe caractéristique.

2. Montrez que :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mV^2 - e\Phi(X)\right)(t; x_0, v_0, t_0) = 0$$

   autrement dit que les courbes caractéristiques ne sont autres que les courbes de l'espace des phases $\left(\frac{1}{2}mv^2 - e\Phi(x)\right) = C$, avec C une constante.

3. On suppose désormais, pour simplifier, que la fonction Φ est strictement croissante sur $[0, L]$ (avec $\Phi(0) = 0$). Montrez que la géométrie des caractéristiques dans l'espace des phases (x, v) est comme sur la figure ci-dessous (on pourra pour s'aider supposer $\Phi(x) = x^2$). On distinguera sur la figure les caractéristiques correspondant à une constante C, négative, nulle et positive.



4. Indiquez à l'aide de flèches (et en le justifiant) le sens de parcours à t croissant de ces caractéristiques.

5. Montrez que pour tout point (x, v) de l'espace des phases tel que $v > \sqrt{\frac{2e}{m}\Phi(x)}$ il existe $v_0 = v_0(x, v)$ et $t_c = t_c(x, v) > 0$ tels que

$$X(t_c; 0, v_0, 0) = x, \quad V(t_c; 0, v_0, 0) = v, \quad v_0^2 = v^2 - \frac{2e}{m}\Phi(x)$$

6. En déduire que la solution du problème (1) est donnée par

$$\begin{aligned} f(x, v, t) &= g\left(\sqrt{v^2 - \frac{2e}{m}\Phi(x)}\right) \quad \text{si} \quad v > \sqrt{\frac{2e}{m}\Phi(x)} \quad \text{et} \quad t \geq t_c(x, v) \\ f(x, v, t) &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$