Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2008-2009
MACS - 1
C. Basdevant

Corrigé du Devoir surveillé d'Analyse Numérique du mardi 17 mars 2009

Durée : 1h
Notes de cours autorisées.

Exercice

On considère, pour l'équation de la chaleur sur $]0,1[$ avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall x \in]0,1[\quad , \qquad \forall t > 0, \quad \nu > 0$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \forall t > 0$$
$$u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in [0,1]$$

des schémas de différences finies associés à des maillages réguliers de l'espace et du temps $x_j = j\Delta x$, $1 < j < N$, $\Delta x = 1/(N+1)$, $t_n = n\Delta t$. Pour cela on définit l'opérateur δ_x^2 agissant sur les suites $u = (u_j)$ par :

$$(\delta_x^2\, u)_j = u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j$$

et on pose $\lambda = 2\nu \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$.

On considère le schéma :

$$u_j^{n+1} - u_j^{n-1} = \frac{1}{3}\lambda \left\{ (\delta_x^2\, u^{n+1})_j + (\delta_x^2\, u^n)_j + (\delta_x^2\, u^{n-1})_j \right\}$$

associé à une procédure de démarrage (pour calculer u_j^1) que l'on n'étudiera pas ici.

1. Dessinez le stencil du schéma.

Corrigé :

$$\begin{array}{ccccccc}
\bullet & -- & \bullet & -- & \bullet & & n+1 \\
| & & | & & | & & \\
\bullet & -- & \bullet & -- & \bullet & & n \\
| & & | & & | & & \\
\bullet & -- & \bullet & -- & \bullet & & n-1 \\
j-1 & & j & & j+1 & &
\end{array}$$

Le schéma est implicite.

2. Mettre le schéma sous forme matricielle et démontrez qu'il est calculable.

   Corrigé : Désignons par U^n le vecteur de $\mathbb{R}^N$ de composantes $u_1, u_2, \cdots, u_N$ et A la matrice de l'opérateur associé à δ_x^2 dans $\mathbb{R}^N$ avec les conditions aux limites de Dirichlet, soit :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   Le schéma s'écrit alors :

$$U^{n+1} - U^{n-1} = \frac{1}{3}\lambda A(U^{n+1} + U^n + U^{n-1})$$

   Soit :

$$(I - \frac{1}{3}\lambda A)U^{n+1} = U^{n-1} + \frac{1}{3}\lambda A(U^n + U^{n-1})$$

   Comme $\lambda > 0$, la matrice $(I - \frac{1}{3}\lambda A)$ étant strictement diagonalement dominante, U^{n+1} est calculable quel que soit λ.

3. Etudiez l'ordre du schéma.

   Corrigé : La symétrie en temps et en espace du schéma laisse penser que l'équation est discrétisée au temps t_n et au point x_j, on va donc effectuer des développements limités de la solution de l'équation autour de ces valeurs, les développements vus en cours donnent :

$$\begin{aligned} \frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_{n-1})}{2\Delta t} &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + O(\Delta t^2) \\ \frac{\delta_x^2\ u(x_j, t_n)}{\Delta x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + O(\Delta x^2) \end{aligned}$$

   on en déduit aux temps t_{n-1} et t_{n+1}

$$\begin{aligned} \frac{\delta_x^2\ u(x_j, t_{n+1})}{\Delta x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{n+1}) + O(\Delta x^2) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial t}(x_j, t_n) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) \\ \frac{\delta_x^2\ u(x_j, t_{n-1})}{\Delta x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{n-1}) + O(\Delta x^2) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) - \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial t}(x_j, t_n) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) \end{aligned}$$

   En sommant toutes les contributions les termes en Δt disparaissent ; la solution exacte de l'équation vérifie le schéma à une erreur de troncature près qui est en $O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$, le schéma est donc d'ordre deux en temps et en espace.

4. Etudiez la stabilité du schéma (indication : les racines de l'équation du second degré à coefficients réels $z^2 + bz + c = 0$ sont toutes les deux dans le disque unité fermé si et seulement si $|c| \leq 1$ et $|b| \leq 1 + c$).

   Corrigé : Etudions la stabilité par la méthode de Von Neumann. Soit une condition initiale onde pure vérifiant les conditions aux limites : $u_j^0 = a_0 \sin k\pi x_j$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Recherchons la solution du schéma sous la forme $u_j^n = a_n \sin k\pi x_j$, on a alors :

$$\begin{aligned}(\delta_x^2\, U^n)_j &= a_n \left(\sin k\pi(x_j + \Delta x) + \sin k\pi(x_j - \Delta x) - 2\sin k\pi x_j\right)\\ &= a_n 2\left(\cos k\pi\Delta x - 1\right)\sin k\pi x_j\\ &= -a_n 4\sin^2\frac{k\pi\Delta x}{2}\ \sin k\pi x_j\end{aligned}$$

   et donc le schéma se ramène pour cette onde à l'équation récurrente :

$$a_{n+1} - a_{n-1} = -\frac{\lambda}{3} 4\sin^2\frac{k\pi\Delta x}{2}\ (a_{n+1} + a_n + a_{n-1})$$

   dont l'équation caractéristique est :

$$z^2 - 1 = -\beta(z^2 + z + 1), \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{4}{3}\lambda \sin^2\frac{k\pi\Delta x}{2}$$

   ou encore

$$z^2 + \frac{\beta}{\beta+1} z + \frac{\beta - 1}{\beta + 1} = 0$$

   La condition nécessaire et suffisante de stabilité du schéma est que les racines de l'équation caractéristiques soient de module inférieur ou égal à 1, ce qui donne, compte tenu de l'indication de l'énoncé :

$$-1 \leq \frac{\beta-1}{\beta+1} \leq 1, \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{\beta+1} \leq 1 + \frac{\beta-1}{\beta+1}$$

   On vérifie facilement que ces deux conditions sont vérifiées pour tout $\beta \geq 0$, le schéma est donc inconditionnellement stable.

5. Question subsidiaire - Démontrez que les racines de l'équation du second degré à coefficients réels $z^2 + bz + c = 0$ sont toutes les deux dans le disque unité fermé si et seulement si $|c| \leq 1$ et $|b| \leq 1 + c$.
   Indication : on considérera le signe du trinôme $f(x) = x^2 + bx + c$ pour $x = -1$ et $x = 1$.

   Corrigé : On remarque que $\{f(1) \geq 0 \iff -b \leq 1 + c\}$ et $\{f(-1) \geq 0 \iff b \leq 1 + c\}$, donc $\{|b| \leq 1 + c \iff (f(1)\,\text{et}\, f(-1) \geq 0)\}$
   Si les deux racines sont dans le cercle unité, leur produit c est inférieur ou égal à 1. D'autre part, soit elles sont complexes et alors le trinôme pour x réel est toujours positif, soit elles sont réelles et dans $[-1, 1]$ et alors le trinôme étant positif à l'extérieur des racines est positif en -1 et 1. Donc dans tous les cas l'inégalité $|b| \leq 1 + c$ est vérifiée.
   Réciproquement, si $c \leq 1$, c'est à dire le produit des racines est inférieur ou égal à 1, si les racines sont complexes conjuguées , c est le carré de leur module, cela implique que leur module est inférieur ou égal à 1. Si les deux racines sont réelles, nécessairement l'une est inférieure ou égale à 1, mais l'inégalité $|b| \leq 1 + c$ implique que 1 et -1 sont à l'extérieur des racines, elles sont donc toutes les deux dans $[-1, 1]$.