Université Paris-Nord — Année 2008-2009
Institut Galilée — MACS - 1
Département de Mathématiques — C. Basdevant

Corrigé du Devoir surveillé d'Analyse Numérique
du mardi 5 mai 2009

Durée : 1h
Aucun document autorisé

Exercice

Pour calculer les solutions de l'équation de transport sur toute la droite réelle

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad , \qquad \forall t > 0 \\ u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array}$$

avec $c > 0$, on considère une famille de schémas de différences finies explicites $S(\tau)$ associés à des maillages réguliers de l'espace et du temps $x_j = j\Delta x$, $t_n = n\Delta t$.

$$S(\tau) \quad : \qquad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{c}{\Delta x}\left(\frac{\tau+1}{2}u_{j-1}^n - \tau u_j^n + \frac{\tau-1}{2}u_{j+1}^n\right)$$

où τ est un paramètre réel.

1. Discutez du cas $\tau = 0$.

   Corrigé : Pour $\tau = 0$ on trouve le schéma explicite d'Euler centré dont on sait qu'il est instable.

2. Pour τ quelconque, dessinez le stencil du schéma et déduisez le cône de dépendance numérique. Donnez, en la justifiant, une condition nécessaire de convergence.

   Corrigé : Le schéma est explicite, son stencil est

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & -- & \bullet & -- & \circ & & n+1 \\ | & & | & & | & & \\ \bullet & -- & \bullet & -- & \bullet & & n \\ j-1 & & j & & j+1 & & \end{array}$$

   Le cône de dépendance numérique est donc déterminé dans le plan (x,t) par les droites de pentes $\pm\frac{\Delta t}{\Delta x}$. Une condition nécessaire de stabilité étant que le cône de dépendance numérique contienne la caractéristique $x - ct = \text{cst}$, il faut donc respecter la condition CFL soit : $c\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

3. Calculez l'erreur locale de troncature et discutez de l'ordre du schéma en fonction du paramètre τ.

   Corrigé : L'erreur locale de troncature est définie par :

   $$\varepsilon_j^n = \frac{u(x_j,t_{n+1}) - u(x_j,t_n)}{\Delta t} - \frac{c}{\Delta x}\left(\frac{\tau+1}{2}u(x_{j-1},t_n) - \tau u(x_j,t_n) + \frac{\tau-1}{2}u(x_{j+1},t_n)\right)$$

   où $u(x,t)$ est une solution suffisamment régulière de l'équation. Des développements limités de cette solution autour du point (x_j,t_n), à l'ordre 2 en temps et en espace, conduisent à l'expression pour l'erreur locale de troncature :

   $$\varepsilon_j^n = \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_n) + O(\Delta t^2) - \frac{c\tau\Delta x}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) + O(\Delta x^2)$$

   tenant compte du fait que $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ on obtient :

   $$\varepsilon_j^n = \frac{c}{2}\left(c\Delta t - \tau\Delta x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$$

   On en déduit que le schéma est d'ordre un en temps et en espace sauf pour le cas où $\tau = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ car il est alors d'ordre deux en temps et en espace, on reconnaît là le schéma de Lax-Wendroff.

4. A quelles conditions sur τ et $\lambda = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ le schéma $S(\tau)$ vérifie-t-il le principe du maximum ?

   Corrigé : Le schéma $S(\tau)$ s'écrit :

   $$u_j^{n+1} = \alpha u_{j-1}^n + \beta u_j^n + \gamma u_{j+1}^n$$

   avec

   $$\alpha = \lambda\frac{\tau+1}{2}, \quad \beta = 1-\lambda\tau, \quad \gamma = \lambda\frac{\tau-1}{2}$$

   on a bien sûr que $\alpha+\beta+\gamma = 1$. Le schéma vérifie le principe du maximum si et seulement si cette combinaison est convexe, c'est à dire si les trois coefficients sont positifs ou nuls. On trouve alors comme condition nécessaire et suffisante :

   $$\tau \geq 1 \quad \text{et} \quad \lambda\tau \leq 1,$$

   cette condition implique en particulier la condition CFL.

5. Calculez le coefficient d'amplification $g(K,\lambda,\tau)$ de von Neumann et son module pour le schéma $S(\tau)$ (où l'on note $K = k\Delta x$).

   (Note : on pourra écrire $|g(K,\lambda,\tau)|^2 = 1+\lambda^2(1-\cos K)F(\lambda,\tau,K)$, F à déterminer)

   Corrigé : Pour $u_j^n = \gamma_n \exp(ikx_j)$ le coefficient d'amplification de Von Neumann $g = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}$ vaut :

   $$\begin{aligned} g &= \lambda\frac{\tau+1}{2}e^{-iK} + 1 - \lambda\tau + \lambda\frac{\tau-1}{2}e^{iK} \\ &= 1-\lambda\tau+\lambda\tau\cos K - i\lambda\sin K \\ |g|^2 &= (1-\lambda\tau+\lambda\tau\cos K)^2 + \lambda^2\sin^2 K \\ &= 1+\lambda^2(1-\cos K)\left[\tau^2(1-\cos K) - \frac{2\tau}{\lambda} + 1 + \cos K\right] \end{aligned}$$

6. En déduire la condition nécessaire et suffisante de stabilité, portant sur λ, en fonction de τ. On distinguera les cas $\tau \leq 0$, $0 < \tau \leq 1$ et $1 < \tau$.

Corrigé : La condition de stabilité $|g| \leq 1$ se ramène, compte tenu des calculs précédents, à :

$$\tau^2(1-\cos K) - \frac{2\tau}{\lambda} + 1 + \cos K \leq 0, \quad \forall K$$

Discussion :

- Si $\tau \leq 0$, tous les termes du membre de gauche étant positifs, la condition ne peut être remplie et le schéma est instable
- Pour $\tau > 0$, cherchons le maximum pour K du membre de gauche. En écrivant l'inégalité :

$$\tau^2 + \cos K(1-\tau^2) - \frac{2\tau}{\lambda} + 1 \leq 0, \quad \forall K$$

  il faut alors distinguer :
  - Pour $\tau \leq 1$, qui conduit à $2 - \frac{2\tau}{\lambda} \leq 0$, soit $\lambda \leq \tau$
  - Pour $\tau \geq 1$, qui conduit à $2\tau^2 - \frac{2\tau}{\lambda} \leq 0$, soit $\lambda \leq 1/\tau$

Conclusion :

- Pour $\tau \leq 0$ le schéma est instable
- Pour $0 < \tau \leq 1$ le schéma est stable si $\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq \tau$ (pour $\frac{c\Delta t}{\Delta x} = \tau \leq 1$ le schéma est d'ordre 2 en temps et en espace, c'est le schéma de Lax-Wendroff)
- pour $\tau \geq 1$ le schéma est stable et positif si $\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\tau} \leq 1$

Remarque : Le schéma peut s'écrire :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = \frac{\tau c \Delta x}{2}\left(\frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\Delta x^2}\right)$$

autrement dit on a pris le schéma d'Euler centré (instable) auquel on a rajouté un terme de diffusion avec un coefficient de diffusion $\nu = \frac{\tau c \Delta x}{2}$. On comprend alors clairement que le schéma ne peut qu'exploser si τ (et donc ν) est négatif ou nul. Pour τ positif, la diffusion est traitée par un schéma explicite d'équation parabolique, il faut alors respecter la condition de stabilité $\frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$, soit $\tau \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.