Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2008-2009
MACS - 1
C. Basdevant

Corrigé de l'Examen d'Analyse Numérique
du lundi 8 juin 2009

Durée : 2h
Aucun document autorisé.

On considère l'équation des ondes sur toute la droite réelle :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad , \qquad \forall t > 0 \\
&u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

avec des conditions initiales que l'on supposera régulières ($u^0 \in C^2(\mathbb{R})$, $v^0 \in C^1(\mathbb{R})$, toutes deux à support compact).

1. Vérifiez que la solution de ce problème est donnée par :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u^0(x+ct) + u^0(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\left(w^0(x+ct) - w^0(x-ct)\right)$$

avec w^0 une primitive de v^0. En déduire que la solution est à support compact pour tout temps.

Corrigé : On vérifie facilement que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{c^2}{2}\left((u^0)''(x+ct) + (u^0)''(x-ct)\right) + \frac{c}{2}\left((v^0)'(x+ct) - (v^0)'(x-ct)\right)$$

et que u vérifie les conditions initiales. On a ainsi une propagation de l'information à vitesses finies $\pm c$. Si la condition initiale est à support compact dans $[-A, +A]$, au temps t le support de la solution est dans $[-A-ct, +A+ct]$ donc aussi à support compact.

2. Donnez en la justifiant l'expression de l'énergie de l'équation.

Corrigé : En multipliant l'équation par $\frac{\partial u}{\partial t}$ et en intégrant en espace on obtient, après une intégration par parties en espace :

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}|\frac{\partial u}{\partial t}|^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c^2}{2}|\frac{\partial u}{\partial x}|^2 dx\right\} = 0$$

La quantité :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}|\frac{\partial u}{\partial t}|^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c^2}{2}|\frac{\partial u}{\partial x}|^2 dx$$

est donc conservée au cours du temps.

Pour un maillage régulier de l'espace et du temps de pas $\Delta x = h$ et Δt, on considère le schéma d'approximation :

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} - c^2 \left(\frac{4}{3} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - \frac{1}{3} \frac{u_{j+2}^n - 2u_j^n + u_{j-2}^n}{(2h)^2} \right) = 0$$

3. Déterminez l'ordre de ce schéma.

Corrigé : La symétrie en temps et en espace du schéma montre que l'équation à été discrétisée au point x_j et au temps t_n. On a par développement de Taylor les formules suivantes :

$$\frac{u(x_j, t_{n+1}) - 2u(x_j, t_n) + u(x_j, t_{n-1})}{(\Delta t)^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) + O((\Delta t)^2)$$

$$\frac{u(x_{j+k}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-k}, t_n)}{(kh)^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + \frac{(kh)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_n) + O(h^4)$$

La combinaison de cette dernière formule pour $k = 1$ et $k = 2$ avec les bons coefficients élimine le terme de dérivée quatrième et conduit à une erreur en espace en $O(h^4)$. Le schéma est donc d'ordre 2 en temps et 4 en espace.

4. Déterminez le cône de dépendance numérique. En déduire une condition nécessaire de stabilité.

Corrigé : Le schéma est explicite, son stencil est

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\circ & -- & \circ & -- & \bullet & -- & \circ & -- & \circ & & n+1 \\
| & & | & & | & & | & & | & & \\
\bullet & -- & \bullet & -- & \bullet & -- & \bullet & -- & \bullet & & n \\
| & & | & & | & & | & & | & & \\
\circ & -- & \circ & -- & \bullet & -- & \circ & -- & \circ & & n-1 \\
j-2 & & j-1 & & j & & j+1 & & j+2 & &
\end{array}$$

Le cône de dépendance numérique est donc déterminé dans le plan (x, t) par les droites de pentes $\pm\frac{\Delta t}{2h}$. Une condition nécessaire de stabilité étant que le cône de dépendance numérique contienne les caractéristiques $x \pm ct = \text{cst}$, il faut donc respecter la condition CFL soit : $c\frac{\Delta t}{h} \leq 2$.

5. Analysez le schéma par la méthode de Von Neumann, en déduire une condition nécessaire et suffisante de stabilité L^2. Commentez le résultat.

Corrigé : On cherche une solution du schéma de la forme $u_j^n = a_n \exp ikx_j$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on obtient alors la relation de récurrence sur a_n :

$$\frac{a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1}}{(\Delta t)^2} + c^2 a_n \left(\frac{4}{3h^2} 4\sin^2 \frac{kh}{2} - \frac{1}{12h^2} 4\sin^2 kh \right) = 0$$

Soit encore $a_{n+1} - 2\alpha a_n + a_{n-1} = 0$ avec

$$\alpha = 1 - \frac{1}{3}(\frac{c\Delta t}{h})^2 \left(8\sin^2 \frac{kh}{2} - \frac{1}{2}\sin^2 kh \right)$$

L'équation caractéristique de la suite a_n s'écrit $r^2 + br + c = 0$ avec $b = -2\alpha$ et $c = 1$. Une condition nécessaire et suffisante de stabilité L^2 est que les racines de l'équation soient de module inférieur ou égal à 1 pour tout k. On sait qu'il faut et il suffit pour cela que $|c| \leq 1$ et $|b| \leq 1 + c$ ce qui conduit à la condition nécessaire et suffisante $|\alpha| \leq 1$. Posons $X = \sin^2 \frac{kh}{2}$, $X \in [0, 1]$, alors on a :

$$\alpha = 1 - \frac{1}{3}(\frac{c\Delta t}{h})^2 \left(8X - 2X(1 - X)\right) = 1 - \frac{2}{3}(\frac{c\Delta t}{h})^2 \left(3X + X^2\right)$$

La condition se ramène alors à

$$\frac{1}{3}(\frac{c\Delta t}{h})^2 \left(3X + X^2\right) \leq 1 \quad \text{pour} \quad X \in [0, 1]$$

soit

$$\frac{c\Delta t}{h} \leq \sqrt{\frac{3}{4}}$$

On trouve ainsi une condition nécessaire et suffisante de stabilité plus contraignante que la condition nécessaire déduite des propriétés de propagation.

Sur l'ensemble des suites réelles $v_h = \{v_j, j \in \mathbb{Z}\}$ on définit le produit scalaire discret $(v_h, w_h) = \sum_j v_j w_j h$ et la norme $|v_h| = \sqrt{(v_h, v_h)}$. On définit alors l'opérateur A_h par :

$$A_h v_h = \left\{ -c^2 \left(\frac{4}{3} \frac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{h^2} - \frac{1}{3} \frac{v_{j+2} - 2v_j + v_{j-2}}{(2h)^2} \right), j \in \mathbb{Z} \right\}$$

6. Donnez un expression symétrique en v_h et w_h du produit scalaire discret $(A_h v_h, w_h)$. De quelle propriété de l'opérateur continu $-c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ cette expression est-elle l'équivalent discret ?

Corrigé :

$$\begin{aligned}
(A_h v_h, w_h) &= -c^2 \frac{4}{3} \sum_j \frac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{h^2} w_j h + c^2 \frac{1}{3} \sum_j \frac{v_{j+2} - 2v_j + v_{j-2}}{(2h)^2} w_j h \\
&= -c^2 \frac{4}{3} \sum_j \frac{v_{j+1} - v_j}{h^2} w_j h + c^2 \frac{4}{3} \sum_j \frac{v_j - v_{j-1}}{h^2} w_j h \\
&\quad + c^2 \frac{1}{3} \sum_j \frac{v_{j+2} - v_j}{(2h)^2} w_j h - c^2 \frac{1}{3} \sum_j \frac{v_j - v_{j-2}}{(2h)^2} w_j h \\
&= c^2 \frac{4}{3} \sum_j \frac{v_{j+1} - v_j}{h} \frac{w_{j+1} - w_j}{h} h - c^2 \frac{1}{3} \sum_j \frac{v_{j+2} - v_j}{2h} \frac{w_{j+2} - w_j}{2h} h
\end{aligned}$$

La quantité $(A_h v_h, w_h)$ est l'équivalent discret de la formule continue obtenue par intégration par parties :

$$\int_{\mathbb{R}} -c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} w dx = \int_{\mathbb{R}} c^2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx$$

7. En déduire la majoration :

$$(A_h v_h, v_h) \leq \Lambda_h |v_h|^2, \qquad \text{avec} \qquad \Lambda_h = \frac{16}{3}\frac{c^2}{h^2}$$

Corrigé : Compte tenu du calcul précédent et en utilisant l'inégalité $(a-b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$:

$$\begin{aligned}
(A_h v_h, v_h) &= c^2 \frac{4}{3} \sum_j \left(\frac{v_{j+1}-v_j}{h}\right)^2 h - c^2 \frac{1}{3} \sum_j \left(\frac{v_{j+1}-v_{j-1}}{2h}\right)^2 h \\
&\leq c^2 \frac{4}{3} \sum_j \left(\frac{v_{j+1}-v_j}{h}\right)^2 h \\
&\leq \frac{c^2}{h^2} \frac{16}{3} \sum_j v_j^2 h
\end{aligned}$$

8. En utilisant l'identité :

$$\sum_j (v_{j+1}-v_{j-1})^2 + \sum_j (v_{j+1}-2v_j+v_{j-1})^2 = 4\sum_j (v_{j+1}-v_j)^2$$

Montrez que

$$0 \leq (A_h v_h, v_h)$$

Corrigé : Compte tenu de l'identité :

$$\begin{aligned}
(A_h v_h, v_h) &= c^2 \frac{4}{3} \sum_j \left(\frac{v_{j+1}-v_j}{h}\right)^2 h \\
&\quad - c^2 \frac{1}{3} \frac{1}{4h^2} \left(4 \sum_j (v_{j+1}-v_j)^2 h - \sum_j (v_{j+1}-2v_j+v_{j-1})^2 h\right) \\
&= c^2 \sum_j \left(\frac{v_{j+1}-v_j}{h}\right)^2 h + c^2 \frac{h^2}{12} \sum_j \left(\frac{v_{j+1}-2v_j+v_{j-1}}{h^2}\right)^2 h
\end{aligned}$$

Ce qui prouve la positivité de l'opérateur A_h.

9. En multipliant scalairement le schéma par $\frac{u_h^{n+1}-u_h^{n-1}}{2\Delta t}$, montrez qu'on obtient la conservation de l'énergie discrète :

$$E_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left|\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t}\right|^2 + \frac{1}{2}(A_h u_h^n, u_h^{n+1})$$

Corrigé : Le schéma s'écrit :

$$\frac{u_h^{n+1}-2u_h^n+u_h^{n-1}}{(\Delta t)^2} + A_h u_h = 0$$

En le multipliant scalairement par $\frac{u_h^{n+1}-u_h^{n-1}}{2\Delta t}$ on obtient :

$$(\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{(\Delta t)^2},\frac{u_h^{n+1}-u_h^{n-1}}{2\Delta t})-(\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{(\Delta t)^2},\frac{u_h^{n+1}-u_h^{n-1}}{2\Delta t})+(A_hu_h,\frac{u_h^{n+1}-u_h^{n-1}}{2\Delta t})=0$$

En écrivant $u_h^{n+1}-u_h^{n-1}=u_h^{n+1}-u_h^n+u_h^n-u_h^{n-1}$ on obtient :

$$\frac{1}{2}|\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t}|^2-\frac{1}{2}|\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{\Delta t}|^2+(A_hu_h,\frac{u_h^{n+1}-u_h^{n-1}}{2})=0$$

Ce qui correspond bien à $E_h^{n+\frac{1}{2}}-E_h^{n-\frac{1}{2}}=0$.

10. En utilisant l'identité $4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$ et la minoration de (A_hv_h,v_h) montrez que :

$$E_h^{n+\frac{1}{2}}\geq\frac{1}{2}|\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t}|^2\left(1-\frac{(\Delta t)^2\Lambda_h}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(A_h(\frac{u_h^{n+1}+u_h^n}{2}),(\frac{u_h^{n+1}+u_h^n}{2})\right)$$

Corrigé : En utilisant l'identité sous la forme :

$$(A_hv_h,w_h)=\left(A_h(\frac{v_h+w_h}{2}),(\frac{v_h+w_h}{2})\right)-\left(A_h(\frac{v_h-w_h}{2}),(\frac{v_h-w_h}{2})\right)$$

on obtient

$$E_h^{n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}|\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t}|^2+\frac{1}{2}\left(A_h(\frac{u_h^{n+1}+u_h^n}{2}),(\frac{u_h^{n+1}+u_h^n}{2})\right)-\frac{1}{2}\left(A_h(\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{2}),(\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{2})\right)$$

En utilisant la majoration de (A_hv_h,v_h) on peut minorer $E_h^{n+\frac{1}{2}}$ par :

$$E_h^{n+\frac{1}{2}}\geq\frac{1}{2}|\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t}|^2\left(1-\frac{(\Delta t)^2\Lambda_h}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(A_h(\frac{u_h^{n+1}+u_h^n}{2}),(\frac{u_h^{n+1}+u_h^n}{2})\right)$$

11. En déduire une condition suffisante de stabilité du schéma.

Corrigé : De la minoration précédente on déduit que si $1-\frac{(\Delta t)^2\Lambda_h}{4}\geq 0$ l'énergie discrète est une quantité positive (puisque de son côté $(A_hv_h,v_h)\geq 0$) et comme on a démontré qu'elle est conservée au cours du temps, le schéma est stable. On retrouve par cette méthode la même condition de stabilité que par la méthode de Von Neumann.