Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2009-2010
MACS - 1
C. Basdevant

Corrigé du Devoir surveillé d'Analyse Numérique
du mardi 9 mars 2010

Durée : 1h
Aucun document autorisé.

On considère, pour l'équation de la chaleur sur tout $\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad , \qquad \forall t > 0$$
$$u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

le schéma d'approximation par différences finies sur un maillage régulier de pas h en espace et Δt en temps :

$$\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} + A_h u_h^n = 0$$

où l'opérateur A_h est défini par :

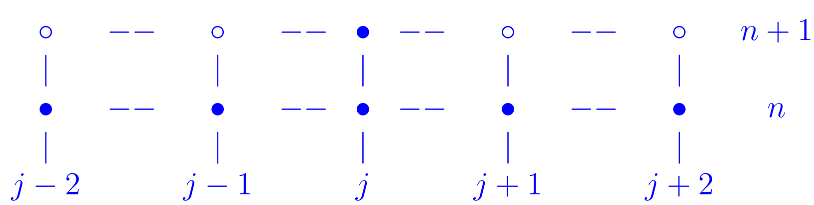
$$(A_h v_h)_j = -\frac{4}{3}\frac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{h^2} + \frac{1}{3}\frac{v_{j+2} - 2v_j + v_{j-2}}{(2h)^2} - \frac{\Delta t}{2}\frac{v_{j+2} - 4v_{j+1} + 6v_j - 4v_{j-1} + v_{j-2}}{h^4}$$

1. Dessinez le stencil du schéma, de quel type de schéma s'agit-il ? Ecrivez le schéma sous la forme :

$$u_j^{n+1} = \alpha_0 u_j^n + \alpha_1 (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + \alpha_2 (u_{j+2}^n + u_{j-2}^n)$$

Note on pourra poser $\beta = \frac{\Delta t}{h^2}$.

Corrigé :



Le schéma est explicite.
Le schéma s'écrit comme indiqué avec :

$$\alpha_0 = 1 - \frac{5}{2}\beta + 3\beta^2 \quad \alpha_1 = \frac{4}{3}\beta - 2\beta^2 \quad \alpha_2 = -\frac{1}{12}\beta + \frac{1}{2}\beta^2$$

2. A quelle condition ce schéma conserve-t-il la positivité ?

   Corrigé : On vérifie que $\alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1$. Le schéma conserve la positivité si et seulement si ces trois coefficients sont positifs ou nuls. On vérifie que α_0 est positif quel que soit β, α_1 est positif pour $\beta \leq \frac{2}{3}$ et α_2 pour $\beta \geq \frac{1}{6}$. Conclusion le schéma conserve la positivité pour :
   $$\frac{1}{6} \leq \frac{\Delta t}{h^2} \leq \frac{2}{3}$$

3. Trouvez par une analyse de Von Neumann la CNS de stabilité du schéma. Note : pour la discussion on pourra poser $Y = 1 - \cos(kh) \in [0, 2]$.

   Corrigé : Cherchons une solution du schéma onde pure c'est à dire de la forme $u_j^n = a_n \exp(ikx_j)$, on obtient alors, après simplification par $\exp(ikx_j)$:
   $$a_{n+1} = \alpha_0 a_n + \alpha_1 a_n \left(\exp(ikh) + \exp(-ikh)\right) + \alpha_2 a_n \left(\exp(2ikh) + \exp(-2ikh)\right)$$
   et donc le coefficient d'amplification qui doit rester de module inférieur ou égal à 1 pour la stabilité s'écrit :
   $$g_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha_0 + 2\alpha_1 \cos(kh) + 2\alpha_2 \cos(2kh)$$
   Soit en posant $Y = 1 - \cos(kh) \in [0, 2]$, avec $\cos(2kh) = 2(1 - Y)^2 - 1$ et en tenant compte de $\alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1$, on obtient :
   $$g_n = 1 - 2\alpha_1 Y + 2\alpha_2(-4Y + 2Y^2) = 1 - 2\beta Y + (2\beta^2 - \frac{\beta}{3})Y^2$$

   - Pour la condition $g_n \leq 1$ il faut avoir $\left((2\beta^2 - \frac{\beta}{3})Y - 2\beta\right) Y \leq 0$ pour $Y \in [0, 2]$, soit $(2\beta^2 - \frac{\beta}{3})Y \leq 2\beta$ ou encore $(\beta - \frac{1}{6})Y \leq 1$.
     - Si $\beta \leq \frac{1}{6}$ la condition est réalisée.
     - Par contre si $\beta > \frac{1}{6}$ alors le maximum est obtenu pour $Y = 2$ ce qui donne la condition $\beta \leq \frac{2}{3}$.

   - Pour la condition $g_n \geq -1$ il faut avoir $f(Y) = (2\beta^2 - \frac{\beta}{3})Y^2 - 2\beta Y + 2 \geq 0$ pour $Y \in [0, 2]$ or $f'(Y) = 2(2\beta^2 - \frac{\beta}{3})Y - 2\beta$ et $f'(0) = -2\beta$, $f'(2) = 8\beta(\beta - \frac{5}{12})$.
     - Si $\beta \leq \frac{5}{12}$, $f'(0)$ et $f'(2)$ étant négatifs, $f'(Y)$ est négatif entre 0 et 2, $f(Y)$ est décroissant dans cet intervalle, il faut donc vérifier $f(2) \geq 0$ soit $\beta^2 - \frac{2}{3}\beta + 1 \geq 0$ ce qui est toujours vrai.
     - Si $\beta > \frac{5}{12}$, $f'(0) < 0$ et $f'(2) > 0$, le minimum de $f(Y)$ est atteint pour $Y_0 = \frac{3}{6\beta - 1}$ et il faut vérifier $f(Y_0) \geq 0$ ce qui donne après calculs $\frac{9\beta - 2}{6\beta - 1} \geq 0$ ce qui est vrai pour ces valeurs de β.
   - Conclusion la condition nécessaire et suffisante de stabilité est $\frac{\Delta t}{h^2} \leq \frac{2}{3}$.

4. Quel est l'ordre du schéma ? Indication : on poussera les développements limités à l'ordre 3 en temps et 6 en espace.

   Corrigé : Pour évaluer l'ordre on doit faire le développement de l'erreur locale de troncature ε_j^n qui est définie par :
   $$\Delta t\, \varepsilon_j^n = u(x_j, t_{n+1}) - \alpha_0 u(x_j, t_n) - \alpha_1(u(x_{j+1}, t_n) + u(x_{j-1}, t_n)) - \alpha_2(u(x_{j+2}, t_n) + u(x_{j+2}, t_n))$$

Le schéma étant manifestement écrit au temps t_n et au point x_j, faisons des développements limités autour de ces valeurs.

$$\begin{aligned}
u(x_j,t_{n+1}) =& u(x_j,t_n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n) + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_n) + \frac{\Delta t^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_j,t_n) + o(\Delta t^3)\\
u(x_{j+1},t_n) =& u(x_j,t_n) + h\frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t_n) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j,t_n) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_n)\\
&+ \frac{h^5}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(x_j,t_n) + \frac{h^6}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j,t_n) + o(h^6)\\
u(x_{j-1},t_n) =& u(x_j,t_n) - h\frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t_n) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) - \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j,t_n) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_n)\\
&- \frac{h^5}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(x_j,t_n) + \frac{h^6}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j,t_n) + o(h^6)\\
u(x_{j+2},t_n) =& u(x_j,t_n) + 2h\frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t_n) + \frac{4h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) + \frac{8h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j,t_n) + \frac{16h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_n)\\
&+ \frac{32h^5}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(x_j,t_n) + \frac{64h^6}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j,t_n) + o(h^6)\\
u(x_{j-2},t_n) =& u(x_j,t_n) - 2h\frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t_n) + \frac{4h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) - \frac{8h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j,t_n) + \frac{16h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_n)\\
&- \frac{32h^5}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(x_j,t_n) + \frac{64h^6}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j,t_n) + o(h^6)
\end{aligned}$$

Ce qui donne en combinant ces développements :

$$\begin{aligned}
\Delta t\,\varepsilon_j^n =& \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n) + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_n) + \frac{\Delta t^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_j,t_n) + o(\Delta t^3)\\
&+ u(x_j,t_n)(1-\alpha_0-2\alpha_1-2\alpha_2) - \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n)(2\alpha_1+8\alpha_2)\\
&- \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_n)(2\alpha_1+32\alpha_2) - \frac{h^6}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j,t_n)(2\alpha_1+128\alpha_2)\\
&+ (\alpha_1+\alpha_2)\,o(h^6)
\end{aligned}$$

Mais $(1-\alpha_0-2\alpha 1-2\alpha_2)=0$, $\frac{h^2}{2}(2\alpha_1+8\alpha_2)=\Delta t$, $\frac{h^4}{24}(2\alpha_1+32\alpha_2)=\frac{\Delta t^2}{2}$, $\frac{h^6}{720}(2\alpha_1+128\alpha_2)=h^6(\frac{\beta^2}{12}-\frac{\beta}{90})$, $(\alpha_1+\alpha_2)o(h^6)=\Delta t\, o(h^4)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\Delta t\,\varepsilon_j^n =& \Delta t(\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n)) + \frac{\Delta t^2}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_n) - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_n))\\
&+ \frac{\Delta t^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_j,t_n) + o(\Delta t^3) + h^6(\frac{\beta}{90}-\frac{\beta^2}{12})\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j,t_n) + \Delta t\, o(h^4)
\end{aligned}$$

Mais $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ entraîne $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ et $\dfrac{\partial^3 u}{\partial t^3}=\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^6}$, il reste donc :

$$\begin{aligned}
\Delta t\,\varepsilon_j^n =& (\frac{\Delta t^3}{6} + \frac{\Delta t\, h^4}{90} - \frac{\Delta t^2 h^2}{12})\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j,t_n) + o(\Delta t^3) + \Delta t\, o(h^4)\\
\varepsilon_j^n =& (\frac{\Delta t^2}{6} + \frac{h^4}{90} - \frac{\Delta t\, h^2}{12})\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j,t_n) + o(\Delta t^2) + o(h^4)
\end{aligned}$$

Mais $2\Delta t\, h^2 \le \Delta t^2 + h^4$ et donc ε_j^n est en $O(\Delta t^2+h^4)$, le schéma est d'ordre 2 en temps et 4 en espace.