Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2009-2010
MACS - 1
C. Basdevant

Corrigé du Devoir surveillé d'Analyse Numérique
du mardi 13 avril 2010

Durée : 1h
Aucun document autorisé.

Exercice

Pour un maillage régulier en temps $t_n = n\Delta t,\ n \in \mathbb{N}$ et en espace $x_j = j\Delta x,\ j \in \mathbb{Z}$, on introduit le schéma d'approximation par différences finies où $u_j^n \approx u(x_j, t_n)$:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{a}{4\Delta x}\left(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) = 0 \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0 \tag{1}$$

où a est une constante réelle strictement positive.

1. Pour quelle équation ce schéma est-il défini (justifiez précisément votre réponse) ?

   Corrigé : Le schéma s'écrit :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{a}{2}\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{a}{2}\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

   On reconnait alors, dans le premier terme une approximation de $\frac{\partial u}{\partial t}$ au point x_j et à un temps entre t_n et t_{n+1}, dans le deuxième terme une approximation de $\frac{a}{2}\frac{\partial u}{\partial x}$ au point x_j et au temps t_{n+1}, enfin dans le troisième terme une approximation de $\frac{a}{2}\frac{\partial u}{\partial x}$ au point x_j et au temps t_n. Le schéma est donc une approximation au point x_j et au temps $t_{n+\frac{1}{2}}$ de l'équation de transport en dimension une :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

2. Dessinez le stencil du schéma. Le stencil permet-il de déduire une condition nécessaire de stabilité ?

   Corrigé : Stencil

$$\begin{array}{ccccccc}
\bullet & -- & \bullet & -- & \bullet & & n+1 \\
| & & | & & | & & \\
\bullet & -- & \bullet & -- & \bullet & & n \\
| & & | & & | & & \\
j-1 & & j & & j+1 & &
\end{array}$$

   Le schéma est implicite. Le principe de causalité est a priori respecté et ne permet pas de définir une condition nécessaire de stabilité puisque la caractéristique est incluse dans le stencil.

3. Analysez la stabilité de ce schéma.

   Corrigé : Faisons une analyse de Von Neumann du schéma ; soit une solution onde pure $u_j^n = \alpha_n e^{ikx_j}$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et posons $\lambda = \frac{a\Delta t}{4\Delta x}$, alors un calcul simple donne :

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{1 - 2i\lambda \sin(k\Delta x)}{1 + 2i\lambda \sin(k\Delta x)}$$

   Le facteur d'amplification du schéma est donc de module 1, le schéma est inconditionnellement stable.

4. Quel est l'ordre de ce schéma ?

   Corrigé : Vérifions que le schéma est bien d'ordre 2 en temps et en espace, écrit au point x_j et au temps $t_{n+\frac{1}{2}}$. Avec des développements limités on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{u(x_j,t_{n+1}) - u(x_j,t_n)}{\Delta t} &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}) + O(\Delta t^2) \\
\frac{u(x_{j+1},t_{n+1}) - u(x_{j-1},t_{n+1})}{2\Delta x} &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_{n+1}) + O(\Delta x^2) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}) + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) \\
\frac{u(x_{j+1},t_n) - u(x_{j-1},t_n)}{2\Delta x} &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) + O(\Delta x^2) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}) - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)
\end{aligned}$$

   Le schéma est bien d'ordre 2 en temps et en espace.

5. On considère dorénavant ce schéma pour un problème sur le segment $[0, 1]$.

   (a) Quelles conditions initiales et aux limites faut-il imposer avec l'équation déterminée à la question 1 pour que le problème ait une unique solution ?

   Corrigé : L'équation de transport est une équation hyperbolique pour laquelle il faut des données là où les caractéristiques sont entrantes, les caractéristiques sont ici les droites $x = at + x_0$ comme $a > 0$ il faut des conditions aux limites en $x = 0$ pour tout $t > 0$ soit $u(0,t) = g(t)$. Par ailleurs s'agissant d'un problème du premier ordre en temps il faut se donner une condition initiale $u(x, 0) = u_0(x)$.

   (b) En prenant $\Delta x = \frac{1}{N}$, adaptez le schéma pour tenir compte des conditions aux limites.

   Corrigé : Le schéma doit être adapté au voisinage des frontières du domaine. En $x = 0$, la solution étant connue, on aura pour $j = 0$ $u_j^n = g(t_n)$, valeur qui intervient dans le schéma en $j = 1$ sans modification de celui-ci. A l'autre extrémité du domaine ($x = 1$), il faut adapter le schéma car a priori en $j = N$ le schéma fait intervenir une valeur en $j = N + 1$ qui se trouverait en dehors du domaine. La solution la plus simple est de perdre un ordre en espace au voisinage de la frontière $x = 1$ en prenant un schéma upwind pour $j = N$:

$$\frac{u_N^{n+1} - u_N^n}{\Delta t} + \frac{a}{2\Delta x}\left(u_N^{n+1} - u_{N-1}^{n+1} + u_N^n - u_{N-1}^n\right) = 0 \qquad (2)$$

(c) Donnez des conditions suffisantes portant sur Δt et Δx pour que la solution du schéma soit calculable et indiquez alors une méthode de résolution.

Corrigé : La matrice du système déterminant les u_j^{n+1} s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & & & & \\ -\lambda & 1 & \lambda & 0 & & & \\ 0 & -\lambda & 1 & \lambda & 0 & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & 0 & -\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ & & & 0 & -\lambda & 1 & \lambda \\ & & & & 0 & -2\lambda & 1+2\lambda \end{pmatrix}$$

La matrice sera inversible si elle est strictement diagonalement dominante, une condition suffisante est donc $2\lambda < 1$ soit $\frac{a\Delta t}{\Delta x} < 2$, une condition du type CFL. Le système étant tridiagonal, il peut alors être résolu en $O(N)$ opérations par décomposition de Choleski de la matrice.