Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2009-2010
MACS - 1
C. Basdevant

Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique
du mardi 1er juin 2010

Durée : 3 h
Aucun document autorisé.

Exercice I

On considère, pour l'équation de la chaleur sur tout $\mathbb{R}$ ($\nu > 0$ est donné) :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \forall t > 0 \\ &u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

le schéma d'approximation par différences finies sur un maillage régulier de pas Δx en espace et Δt en temps (schéma de Gear):

$$\frac{3u_j^{n+1} - 4u_j^n + u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{(\Delta x)^2} = 0$$

Note on pourra poser $\lambda = \dfrac{2\nu \Delta t}{(\Delta x)^2}$.

1. Dessinez le stencil du schéma, de quel type de schéma s'agit-il ?

   Corrigé :

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & -- & \bullet & -- & \bullet & & n+1 \\ | & & | & & | & & \\ \circ & -- & \bullet & -- & \circ & & n \\ | & & | & & | & & \\ \circ & -- & \bullet & -- & \circ & & n-1 \\ | & & | & & | & & \\ j-1 & & j & & j+1 & & \end{array}$$

   Le schéma est implicite.

2. Analysez la stabilité du schéma par la méthode de von Neumann.
   On rappelle que les racines de l'équation du second degré à coefficients réels $z^2 + bz + c = 0$ sont toutes les deux dans le disque unité fermé si et seulement si $|c| \leq 1$ et $|b| \leq 1 + c$.

Corrigé : Cherchons une solution du schéma onde pure c'est à dire de la forme $u_j^n = a_n \exp(ikx_j)$, on obtient alors, après simplification par $\exp(ikx_j)$:

$$3a_{n+1} - 4a_n + a_{n-1} - \lambda a_{n+1} \left(\exp(ik\Delta x) + \exp(-ik\Delta x) - 2\right) = 0$$

soit en posant $\mu = 3 + 4\lambda \sin^2(\frac{k\Delta x}{2})$:

$$\mu a_{n+1} - 4a_n + a_{n-1} = 0$$

une équation récurrente à deux termes dont l'équation caractéristique s'écrit :

$$r^2 - \frac{4}{\mu} r + \frac{1}{\mu} = 0$$

Le schéma sera stable si et seulement si les racines de cette équation sont de module inférieur ou égal à un. En appliquant le lemme rappelé dans l'énoncé on obtient les conditions : $\mu \geq 1$ et $3 \leq \mu$, toutes conditions qui sont réalisées, le schéma est donc inconditionnellement stable.

3. Quel est l'ordre du schéma ?

Corrigé : Pour évaluer l'ordre on doit faire le développement de l'erreur locale de troncature ε_j^n qui est définie par :

$$\varepsilon_j^n = \frac{3u(x_j, t_{n+1}) - 4u(x_j, t_n) + u(x_j, t_{n-1})}{2\Delta t} - \nu \frac{u(x_{j+1}, t_{n+1}) + u(x_{j-1}, t_{n+1}) - 2u(x_j, t_{n+1})}{(\Delta x)^2}$$

pour u une solution suffisamment régulière de l'équation de la chaleur.
Le schéma étant manifestement écrit au temps t_{n+1} et au point x_j, faisons des développements limités autour de ces valeurs.
La deuxième partie de ε_j^n est une approximation bien connue d'ordre 2 de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

$$\frac{u(x_{j+1}, t_{n+1}) + u(x_{j-1}, t_{n+1}) - 2u(x_j, t_{n+1})}{(\Delta x)^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{n+1}) + O(\Delta x^2)$$

Il reste à faire les développements en temps de la première partie et on obtient :

$$\frac{3u(x_j, t_{n+1}) - 4u(x_j, t_n) + u(x_j, t_{n-1})}{2\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_{n+1}) - \frac{\Delta t^2}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_j, t_{n+1}) + O(\Delta t^3)$$

Ainsi, $\varepsilon_j^n = O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$, le schéma est d'ordre 2 en temps et en espace.

4. On considère dans cette question ce même schéma pour le problème posé sur $[0, 1]$ avec des conditions aux limites de Dirichlet :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall x \in]0, 1[, \quad \forall t > 0\\
&u(x, 0) = u^0(x) \quad \forall x \in]0, 1[\\
&u(0, t) = \alpha, \quad u(1, t) = \beta, \quad \forall t > 0
\end{aligned}$$

où α et β sont des constantes données.
En prenant $x_j = j\Delta x$, avec $\Delta x = \frac{1}{N+1}$, formez le système à résoudre à chaque pas de temps et la matrice associée. Discutez de l'existence et de l'unicité de sa solution.

Corrigé : Le schéma s'écrit, pour $1 < j < N$:

$$(3+2\lambda)u_j^{n+1} - \lambda u_{j+1}^{n+1} - \lambda u_{j-1}^{n+1} = 4u_j^n - u_j^{n-1}$$

et, en tenant compte des conditions aux limites, pour $j = 1$:

$$(3+2\lambda)u_1^{n+1} - \lambda u_2^{n+1} = \lambda\alpha + 4u_1^n - u_1^{n-1}$$

et enfin pour $j = N$:

$$(3+2\lambda)u_N^{n+1} - \lambda u_{N-1}^{n+1} = \lambda\beta + 4u_N^n - u_N^{n-1}$$

La matrice du système $N \times N$ déterminant les u_j^{n+1} pour $1 \leq j \leq N$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix}
3+2\lambda & -\lambda & 0 & & & & \\
-\lambda & 3+2\lambda & -\lambda & 0 & & & \\
0 & -\lambda & 3+2\lambda & -\lambda & 0 & & \\
 & & \dots & \dots & \dots & & \\
 & & 0 & -\lambda & 3+2\lambda & -\lambda & 0 \\
 & & & 0 & -\lambda & 3+2\lambda & -\lambda \\
 & & & & 0 & -\lambda & 3+2\lambda
\end{pmatrix}$$

Comme $\lambda > 0$ la matrice est strictement diagonalement dominante et donc inversible quels que soient Δx et Δt. Symétrique, à diagonale positive strictement dominante, la matrice est définie positive, le système étant tridiagonal, il peut alors être résolu en $O(N)$ opérations par décomposition de Choleski de la matrice.

5. On considère maintenant l'équation de la chaleur sur $[0,1]$ avec des conditions aux limites mixtes Dirichlet Neumann :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall x \in]0,1[, \qquad \forall t > 0 \\
&u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in]0,1[\\
&\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \gamma, \quad u(1,t) = \beta, \qquad \forall t > 0
\end{aligned}$$

où γ et β sont des constantes données.
En prenant $x_j = (j - \frac{1}{2})\Delta x$, avec $\Delta x = \frac{2}{2N+1}$, adaptez le schéma pour prendre en compte la condition de Neumann, formez le système à résoudre à chaque pas de temps et la matrice associée. Discutez de l'existence et de l'unicité de sa solution.

Corrigé : On remarque que $x_1 = \frac{\Delta x}{2}$ et $x_{N+1} = 1$. Pour tenir compte de la condition de Neumann en $x = 0$ dans le schéma écrit au point $x_1 = \frac{\Delta x}{2}$ on a les développements :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\frac{\Delta x}{2}) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(0)}{\Delta x} + O(\Delta x^2) = \frac{\frac{u(\Delta x + \frac{\Delta x}{2}) - u(\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x}(0)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

Soit : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1) \approx \frac{\frac{u_2 - u_1}{\Delta x} - \gamma}{\Delta x}$, en utilisant cette approximation d'ordre 1 pour la dérivée seconde on forme l'équation du schéma en $j = 1$:

$$(3+\lambda)u_1^{n+1} - \lambda u_2^{n+1} = -\lambda\gamma\Delta x + 4u_1^n - u_1^{n-1}$$

Le schéma étant inchangé aux autres points du maillage, la matrice du système $N \times N$ déterminant les u_j^{n+1} pour $1 \leq j \leq N$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix}
3+\lambda & -\lambda & 0 & & & & \\
-\lambda & 3+2\lambda & -\lambda & 0 & & & \\
0 & -\lambda & 3+2\lambda & -\lambda & 0 & & \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
 & & 0 & -\lambda & 3+2\lambda & -\lambda & 0 \\
 & & & 0 & -\lambda & 3+2\lambda & -\lambda \\
 & & & & 0 & -\lambda & 3+2\lambda
\end{pmatrix}$$

Pour les mêmes raisons que dans la question précédente la matrice est symétrique, à diagonale positive strictement dominante, la matrice est définie positive ; le système étant tridiagonal, il peut alors être résolu en $O(N)$ opérations par décomposition de Choleski de la matrice.

Exercice II

Pour la loi de conservation scalaire :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(\phi) = 0 \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad \phi(x,0) = \Phi(x) \tag{1}$$

On considère le schéma sur un maillage régulier en espace ($x_j = j\Delta x$) et en temps ($t_n = n\Delta t$)(schéma de Mac-Cormack) :

$$\begin{aligned}
\phi_j^* &= \phi_j^n - \lambda\left(f(\phi_{j+1}^n) - f(\phi_j^n)\right) \\
\phi_j^{n+1} &= \frac{1}{2}(\phi_j^n + \phi_j^*) - \frac{\lambda}{2}\left(f(\phi_j^*) - f(\phi_{j-1}^*)\right)
\end{aligned}$$

où $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$. Le schéma est ici interprété comme un schéma de différences finies, c'est à dire $\phi_j^n \approx \phi(x_j, t_n)$. On supposera dans la suite que le flux f est une fonction suffisamment régulière.

1. Démontrez, pour ϕ une solution classique (régulière), que la solution ϕ est constante le long des caractéristiques et que les caractéristiques sont des droites .

   Corrigé : Les caractéristiques sont les courbes $X(t; x_0)$ définies par :

   $$\frac{dX}{dt}(t; x_0) = f'\Big(\phi(X(t; x_0), t)\Big), \quad X(0; x_0) = x_0$$

   La dérivée de la solution le long d'une caractéristique est :

   $$\frac{d}{dt}\phi(X(t; x_0), t) = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{dX}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} f'(\phi) + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

   La solution est bien constante le long d'un caractéristique, et en conséquence comme $\phi(X(t; x_0), t) = \phi(X(0; x_0), 0)$, la pente de la caractéristique est constante, la caractéristique est une droite.

2. Dessinez le stencil du schéma et déduisez en une condition nécessaire de stabilité.

   Corrigé : Le schéma est explicite, son stencil est :

$$\begin{array}{ccccccc}
\circ & -- & \bullet & -- & \circ & & n+1 \\
| & & | & & | & & \\
\bullet & -- & \bullet & -- & \bullet & & n \\
| & & | & & | & & \\
j-1 & & j & & j+1 & &
\end{array}$$

   Le cône de dépendance numérique doit contenir la caractéristique, celle ci est définie par $x(t) = x_j^{n+1} + f'(\phi_j^{n+1})\,(t - t_{n+1})$; en tenant compte du fait que $\phi_j^{n+1} = \Phi(x_0)$ avec x_0 le pied de la caractéristique, on déduit la condition nécessaire de stabilité (condition CFL) :

$$\sup_x |f'(\Phi(x))| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

3. On considère pour cette question un flux linéaire $f(\phi) = a\phi$, avec $a > 0$ une constante.

   (a) Exprimez $\dfrac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t}$ en fonction des ϕ_k^n à l'instant t_n.

   Corrigé : En éliminant les ϕ_j^* on obtient :

$$\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} + a\frac{\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{a^2 \Delta t}{2}\frac{\phi_{j+1}^n + \phi_{j-1}^n - 2\phi_j^n}{\Delta x^2} = 0$$

   (b) En déduire que l'erreur locale de troncature s'écrit (avec $\alpha > 0$ à déterminer) :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_j^n = & \frac{\partial \phi}{\partial t}(x_j, t_n) + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x_j, t_n) + O(\Delta t^2) \\
& + a\frac{\partial \phi}{\partial x}(x_j, t_n) + O(\Delta x^2) - \alpha\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x_j, t_n) + O(\Delta x^2)\right)
\end{aligned}$$

   Corrigé : Les quotients de différences finies en espace sont des approximations d'ordre 2 bien connues des dérivées partielles, quant à la différence finie en temps, un simple développement de Taylor donne la formule indiquée, d'où le résultat avec $\alpha = \frac{a^2 \Delta t}{2}$

   (c) En déduire l'ordre du schéma, expliquez pourquoi le schéma est dissipatif.

   Corrigé : Comme $\frac{\partial \phi}{\partial t} = -a\frac{\partial \phi}{\partial x}$ donc $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$. Le résultat précédent nous dit que pour ϕ solution régulière de l'équation de transport $\varepsilon_j^n = O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$, le schéma est donc d'ordre 2 en temps et en espace. Mais le terme en $\alpha\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ est un terme de diffusion qui va amortir la solution d'autant plus que Δt est grand.

(d) Analysez la stabilité du schéma par la methode de Von Neumann.

Corrigé : Cherchons une solution du schéma onde pure c'est à dire de la forme $\phi_j^n = a_n \exp(ikx_j)$, on obtient alors, après simplification par $\exp(ikx_j)$:

$$a_{n+1} = a_n(1 - \mu\, i \sin(k\Delta x) - 2\mu^2 \sin^2(\frac{k\Delta x}{2})), \quad \text{avec} \quad \mu = a\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

d'où un facteur d'amplification numérique g_d :

$$|g_d|^2 = (1 - 2\mu^2 \sin^2(\frac{k\Delta x}{2}))^2 + \mu^2 \sin^2(k\Delta x) = 1 - 4\mu^2(1-\mu^2)\sin^4(\frac{k\Delta x}{2})$$

Le schéma est stable si le facteur d'amplification g_d est de module inférieur ou égal à 1. L'expression précédente prouve que le schéma est conditionnellement stable sous la condition $|\mu| \leq 1$, c'est la condition de stabilité de Courant-Friedrisch-Lewy.

(e) Montrez que le schéma ne respecte pas le principe du maximum.

Corrigé : Prenons $\phi_j^0 = 1$ pour $j \leq 0$ et $\phi_j^0 = 0$ pour $j \geq 1$, soit un état initial compris entre 0 et 1. On obtient alors $\phi_0^1 = 1 + \frac{\mu}{2} - \frac{\mu^2}{2}$ mais avec $0 < \mu < 1$, $\phi_0^1 > 1$, le maximum de l'état initial est dépassé.
Autre approche, le schéma s'écrit : $\phi_j^{n+1} = \frac{\mu}{2}(\mu-1)\phi_{j+1}^n + (1-\mu^2)\phi_j^n + \frac{\mu}{2}(\mu+1)\phi_{j-1}^n$. Pour $\mu > 0$ les coefficients de ϕ_{j+1}^n et de ϕ_j^n ne peuvent pas être simultanément positifs (la combinaison n'est pas convexe), on peut donc construire un état initial positif ou nul qui deviendra négatif dès le temps un.

4. On considère maintenant le cas non-linéaire, c'est à dire f quelconque régulière.

(a) Montrez que ce schéma est conservatif, on donnera l'expression du flux numérique.

Corrigé : Un schéma conservatif sur 3 mailles s'écrit au moyen d'un flux numérique $g(\phi_j;\phi_{j+1})$ approximation de $f\Big(\phi(x_{j+\frac{1}{2}},t)\Big)$:

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[g(\phi_j^n;\phi_{j+1}^n) - g(\phi_{j-1}^n;\phi_j^n)\right]$$

Si l'on remplace les ϕ^* par leurs expressions dans la formule de ϕ_j^{n+1} on trouve facilement :

$$g(\phi_j;\phi_{j+1}) = \frac{1}{2}f(\phi_{j+1}) + \frac{1}{2}f\Big(\phi_j - \lambda(f(\phi_{j+1}) - f(\phi_j))\Big)$$

(b) Vérifiez que le schéma est consistant.

Corrigé : D'après le théorème de Lax-Wendroff il faut et il suffit que le flux numérique vérifie $g(\phi;\phi) = f(\phi)$, $\forall \phi \in \mathbb{R}$, ce qui est immédiat.

Corrigé : D'après le théorème de Lax-Wendroff il faut et il suffit que le $g(\phi;\phi) = f(\phi)$, $\forall \phi \in \mathbb{R}$, ce qui est immédiat.

(c) Le schéma est-il monotone ?

Corrigé : Si le schéma était monotone, comme il est conservatif et consistant il respecterait le principe du maximum, or on a vu que pour un flux linéaire ce n'était pas le cas, le schéma n'est donc pas monotone.