Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2010-2011
MACS - 1
C. Basdevant

Examen d'Analyse Numérique
du mardi 3 mai 2011

Durée : 1h30
Aucun document autorisé

Problème

On considère l'équation de transport sur $[0,1]$:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \forall x \in]0,1[\quad , \quad \forall t > 0 \\ u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in]0,1[\\ u(0,t) = u^1(t) \quad , \quad \forall t > 0 \end{array} \tag{1}$$

où la vitesse $a(x,t)$ est dans $C^1([0,1] \times \mathbb{R}_+)$ et vérifie $a(x,t) \geq 0$; $u^0(x)$ est la condition initiale supposée $C^1([0,1])$, et $u^1(t)$ la condition à la limite $x = 0$ est supposée continue.

1. Les courbes caractéristiques $(t, X(t; t_0, x_0))$ de l'équation (1) sont définies par :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = a(X,t) \quad \forall t \geq 0 \\ X(t_0; t_0, x_0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

   (a) Montrez que u est constant le long des caractéristiques.

   (b) Calculez et tracez quelques courbes caractéristiques pour le champ de vitesse $a(x,t) = \frac{1}{2(x+1)}$; on déterminera en particulier des caractéristiques issues de $x_0 = 0$ pour $t_0 > 0$.

Pour un maillage régulier en temps $t_n = n\Delta t$, $n \in \mathbb{N}$ et en espace $x_j = j\Delta x$, $0 \leq j \leq N$, $N = 1/\Delta x$, on introduit le schéma d'approximation par différences finies où $u_j^n \approx u(x_j, t_n)$:

$$\begin{array}{l} \dfrac{u_{j+1/2}^{n+1} - u_{j+1/2}^{n}}{\Delta t} + a_{j+1/2}^{n+1/2} \dfrac{u_{j+1}^{n+1/2} - u_{j}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0, \quad j \in [1, N] \ , \ n \geq 0 \\ \text{avec} \quad a_{j+1/2}^{n+1/2} = a(x_{j+1/2}, t_{n+1/2}) \\ u_j^0 = u^0(x_j), \quad j \in [1, N]; \quad u_0^n = u^1(t_n), \quad n \geq 0 \\ u_{j+1/2}^n = \dfrac{1}{2}(u_j^n + u_{j+1}^n) \quad \text{et} \quad u_j^{n+1/2} = \dfrac{1}{2}(u_j^{n+1} + u_j^n) \end{array}$$

2. Ecrire le schéma sous la forme :

$$\alpha u_j^{n+1} + \beta u_{j+1}^{n+1} = \gamma u_j^n + \delta u_{j+1}^n$$

avec des coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ que l'on explicitera en fonction de $\lambda_j^n = a_{j+1/2}^{n+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

3. Montrez que, malgré les apparences, le schéma est un schéma explicite.
4. Quelle condition de stabilité peut-on déduire d'une analyse de causalité ?
5. Déterminez l'ordre du schéma.
6. Faites une analyse de stabilité de Von Neumann du schéma pour le cas d'une vitesse $a(x,t)$ constante en temps et en espace.
7. Montrez que le schéma ne vérifie pas le principe du maximum et ce quel que soit $\frac{\Delta t}{\Delta x}$. Indication, on pourra prendre $u_j^0 = 0,\ \forall j \neq j_0,\ u_{j_0}^0 = 1,\ u_0^1 = 0$.