Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2010-2011
MACS - 1
C. Basdevant

Examen d'Analyse Numérique
du mardi 14 juin 2011

Durée : 3h
Aucun document autorisé

Exercice

Donnez la solution faible entropique $u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ du problème suivant en justifiant clairement votre réponse avec tous les dessins nécessaires.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2}{2} = 0 \quad x \in \mathbb{R} \quad , \forall t > 0$$

$$\begin{aligned}
u(x,0) =& 1 & x \leq 0 \\
u(x,0) =& 1 - \frac{x}{a} & 0 \leq x \leq a \\
u(x,0) =& 0 & a \leq x
\end{aligned}$$

où a est une constante strictement positive.

Problème

On considère l'équation de la chaleur sur $[0,1]$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \forall x \in]0,1[\quad , \quad \forall t > 0 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in]0,1[\\
u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad , \quad \forall t \geq 0
\end{aligned}$$

et on étudiera dans la suite plusieurs schémas de différences finies sur un maillage régulier de pas $h = \frac{1}{(N+1)}$ en espace et Δt en temps, avec $u_j^n \approx u(jh, n\Delta t)$.

Il est très fortement recommandé de lire l'énoncé du problème jusqu'à la fin avant d'en aborder la résolution.

1. Analysez l'ordre, la stabilité et la convergence du schéma suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0 \tag{2}$$

2. Analysez l'ordre, la stabilité et la convergence du schéma suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0 \tag{3}$$

3. Analysez l'ordre, la stabilité et la convergence du schéma suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} = 0 \tag{4}$$

4. On considère dans cette question le schéma :

$$\frac{u_j^{2n+1} - u_j^{2n}}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^{2n+1} - 2u_j^{2n+1} + u_{j-1}^{2n+1}}{h^2} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{u_j^{2n+2} - u_j^{2n+1}}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^{2n+1} - 2u_j^{2n+1} + u_{j-1}^{2n+1}}{h^2} = 0 \tag{6}$$

   (a) Analysez la stabilité de ce schéma.

   (b) En notant U_h^n le vecteur des inconnues u_j^n pour $1 \leq j \leq N$, écrire le schéma sous la forme vectorielle :

$$\begin{aligned} A_h U_h^{2n+1} &= U_h^{2n} \\ U_h^{2n+2} &= B_h U_h^{2n+1} \end{aligned}$$

   avec A_h et B_h des matrices à définir.

   (c) Montrez que $\|A_h^{-1}\| \leq 1$ et $\|B_h\| \leq \max\{1, |1 - \frac{4\nu\Delta t}{h^2}|\}$ pour une norme à définir.

   (d) En notant $U_h(t_n)$ le vecteur des $u(x_j, t_n)$ pour $1 \leq j \leq N$ avec $u(x,t)$ solution de l'équation, montrez que si U_h^{2n+1*} est la solution de $A_h U_h^{2n+1*} = U_h(t_{2n})$, on a la majoration :

$$\|U_h(t_{2n+1}) - U_h^{2n+1*}\| \leq \Delta t \, O(\Delta t, h^2)$$

   (e) On pose :

$$U_h(t_{2n+2}) = B_h U_h^{2n+1*} + \Delta t E_1 \tag{7}$$

$$U_h(t_{2n+2}) = B_h U_h(t_{2n+1}) + \Delta t E_2 \tag{8}$$

   Que représente E_1, ? Donnez une majoration de E_2.

   (f) Déduisez des questions précédentes l'ordre du schéma.

5. On considère dans cette question le schéma :

$$\frac{u_j^{2n+1} - u_j^{2n}}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^{2n+1} - 2u_j^{2n+1} + u_{j-1}^{2n+1}}{h^2} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{u_j^{2n+2} - u_j^{2n}}{2\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^{2n+1} - 2u_j^{2n+1} + u_{j-1}^{2n+1}}{h^2} = 0 \tag{10}$$

   (a) Analysez la stabilité de ce schéma.

   (b) Analysez l'ordre du schéma.