Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2011-2012
MACS - 1
C. Basdevant

Corrigé du Devoir surveillé d'Analyse Numérique
du lundi 26 mars 2012

Durée : 1h30
Une unique feuille recto de notes personnelles est autorisée.
Les téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés.

On considère, pour l'équation de la chaleur sur $[0,1]^2$ avec des conditions aux limites de Dirichlet ($\nu > 0$ est donné) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad \forall (x,y) \in]0,1[^2, \qquad \forall t > 0$$
$$u(x,y,0) = u^0(x,y) \quad \forall (x,y) \in]0,1[^2$$
$$u(x,y,t) = u^1 \quad \text{pour} \quad x = 0, x = 1, y = 0 \ \text{ ou } y = 1$$

des schéma d'approximation par différences finies sur un maillage régulier de pas $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{N+1}$ en espace et Δt en temps, où $u_{i,j} \approx u(i\Delta x, j\Delta y)$.

1. On considère tout d'abord le schéma explicite d'Euler :

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} - \nu\left(\frac{u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n - 2u_{i,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n}{(\Delta y)^2}\right) = 0$$

Analysez la stabilité du schéma par la méthode de von Neumann sans tenir compte des conditions aux limites.
Note on pourra poser $\lambda = \dfrac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}$ et $\mu = \dfrac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2}$.

Corrigé : Cherchons une solution du schéma onde pure c'est à dire de la forme $u_{i,j}^n = a_n \exp(i(kx_i + hy_j))$, on obtient alors, après simplification par $\exp(i(kx_i + hy_j))$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n + \quad & -\lambda a_n\left(\exp(ik\Delta x) + \exp(-ik\Delta x) - 2\right) \\ & -\mu a_n\left(\exp(ih\Delta y) + \exp(-ih\Delta y) - 2\right) = 0 \end{aligned}$$

soit un facteur d'amplification : $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - 4\lambda\sin^2(\frac{k\Delta x}{2}) - 4\mu\sin^2(\frac{h\Delta y}{2})$. Pour la stabilité il faut que son module soit inférieur à 1, soit $4(\lambda\sin^2(\frac{k\Delta x}{2}) + \mu\sin^2(\frac{h\Delta y}{2})) \leq 2$ pour tous k et h, ce qui donne $\lambda + \mu \leq \frac{1}{2}$.

2. On considère maintenant le schéma implicite (schéma de Gear) :

$$\frac{3u_{i,j}^{n+1} - 4u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} - \nu\left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1}}{(\Delta y)^2}\right) = 0$$

Démontrez que le système linéaire définissant les $u_{i,j}^{n+1}$ à partir des $u_{i,j}^{n}$ et $u_{i,j}^{n-1}$ admet une unique solution.

Corrigé : Le schéma s'écrit :

$$(3+4\lambda+4\mu)u_{i,j}^{n+1} - 2\lambda(u_{i+1,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}) - 2\mu(u_{i,j+1}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}) = 4u_{i,j}^{n} - u_{i,j}^{n-1}$$

La matrice du système linéaire à donc sur chaque ligne, sur la diagonale le terme $(3+4\lambda+4\mu)$ et en dehors de la diagonale au plus 4 termes qui seraient deux fois -2λ et deux fois -2μ (note certains termes disparaissent quand on est près de la frontière), la matrice est donc, quel que soit son rangement, strictement diagonalement dominante, donc inversible.

3. Analysez la stabilité du schéma par la méthode de von Neumann sans tenir compte des conditions aux limites.
On rappelle que les racines de l'équation du second degré à coefficients réels $z^2 + bz + c = 0$ sont toutes les deux dans le disque unité fermé si et seulement si $|c| \leq 1$ et $|b| \leq 1 + c$.

Corrigé : Cherchons une solution du schéma onde pure c'est à dire de la forme $u_{i,j}^{n} = a_n \exp(i(kx_i+hy_j))$, on obtient alors, après simplification par $\exp(i(kx_i+hy_j))$:

$$\begin{aligned} 3a_{n+1} - 4a_n + a_{n-1} \quad & -2\lambda a_{n+1}\left(\exp(ik\Delta x) + \exp(-ik\Delta x) - 2\right) \\ & -2\mu a_{n+1}\left(\exp(ih\Delta y) + \exp(-ih\Delta y) - 2\right) = 0 \end{aligned}$$

soit en posant $\alpha = 3 + 8\lambda\sin^2(\frac{k\Delta x}{2}) + 8\mu\sin^2(\frac{h\Delta y}{2})$:

$$\alpha a_{n+1} - 4a_n + a_{n-1} = 0$$

une équation récurrente à deux termes dont l'équation caractéristique s'écrit :

$$r^2 - \frac{4}{\alpha}r + \frac{1}{\alpha} = 0$$

Le schéma sera stable si et seulement si les racines de cette équation sont de module inférieur ou égal à un. En appliquant le lemme rappelé dans l'énoncé on obtient les conditions : $\alpha \geq 1$ et $3 \leq \alpha$, toutes conditions qui sont réalisées, le schéma est donc inconditionnellement stable.

4. Quel est l'ordre du schéma ?

Corrigé : Pour évaluer l'ordre on doit faire le développement de l'erreur locale de troncature $\varepsilon_{i,j}^{n}$ qui est définie par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i,j}^{n} = \quad & \frac{3u(x_i,y_j,t_{n+1}) - 4u(x_i,y_j,t_n) + u(x_i,y_j,t_{n-1})}{2\Delta t} \\ & -\nu\frac{u(x_{i+1},y_j,t_{n+1}) + u(x_{i-1},y_j,t_{n+1}) - 2u(x_i,y_j,t_{n+1})}{(\Delta x)^2} \\ & -\nu\frac{u(x_i,y_{j+1},t_{n+1}) + u(x_i,y_{j-1},t_{n+1}) - 2u(x_i,y_j,t_{n+1})}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

pour u une solution suffisamment régulière de l'équation de la chaleur.
Le schéma étant manifestement écrit au temps t_{n+1} et au point x_i, y_j, faisons des développements limités autour de ces valeurs.
La deuxième partie de $\varepsilon_{i,j}^n$ est une approximation bien connue d'ordre 2 de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

$$\frac{u(x_{j+1}, t_{n+1}) + u(x_{j-1}, t_{n+1}) - 2u(x_j, t_{n+1})}{(\Delta x)^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{n+1}) + O(\Delta x^2)$$

De même pour la troisième partie qui approche $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Il reste à faire les développements en temps de la première partie et on obtient :

$$\frac{3u(x_i, y_j, , t_{n+1}) - 4u(x_i, y_j, , t_n) + u(x_i, y_j, , t_{n-1})}{2\Delta t} =$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t_{n+1}) - \frac{\Delta t^2}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, y_j, , t_{n+1}) + O(\Delta t^3)$$

Ainsi, $\varepsilon_{i,j}^n = O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2)$, le schéma est d'ordre 2 en temps et en espace.