Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2011-2012
MACS - 1
C. Basdevant

Examen d'Analyse Numérique
du jeudi 21 juin 2012

Durée : 3h
Aucun document autorisé

Exercice

Donnez la solution faible entropique $u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ du problème suivant en justifiant clairement votre réponse avec tous les dessins nécessaires.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2}{2} = 0 \quad x \in \mathbb{R} \quad , \forall t > 0$$

$$\begin{aligned}
u(x,0) =& 1 & x \leq -a \\
u(x,0) =& -\frac{x}{a} & -a \leq x \leq 2a \\
u(x,0) =& -2 & x \geq 2a
\end{aligned}$$

où a est une constante strictement positive.

Problème

Pour la loi de conservation scalaire :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(\phi) = 0 \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad \phi(x,0) = \Phi(x) \tag{1}$$

On considère le schéma sur un maillage régulier en espace ($x_j = j\Delta x$) et en temps ($t_n = n\Delta t$)(schéma de Mac-Cormack) :

$$\begin{aligned}
\phi_j^* &= \phi_j^n - \lambda\left(f(\phi_{j+1}^n) - f(\phi_j^n)\right) \\
\phi_j^{n+1} &= \frac{1}{2}(\phi_j^n + \phi_j^*) - \frac{\lambda}{2}\left(f(\phi_j^*) - f(\phi_{j-1}^*)\right)
\end{aligned}$$

où $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$. Le schéma est ici interprété comme un schéma de différences finies, c'est à dire $\phi_j^n \approx \phi(x_j, t_n)$. On supposera dans la suite que le flux f est une fonction suffisamment régulière.

1. Démontrez que, pour ϕ une solution classique (régulière), la valeur de ϕ est constante le long des caractéristiques et que les caractéristiques sont des droites .

2. Dessinez le stencil du schéma et déduisez en une condition nécessaire de stabilité.

3. On considère pour cette question un flux linéaire $f(\phi) = a\phi$, avec $a > 0$ une constante.

(a) Exprimez $\dfrac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t}$ en fonction des ϕ_k^n à l'instant t_n.

(b) En déduire que l'erreur locale de troncature s'écrit (avec $\alpha > 0$ à déterminer) :

$$\begin{aligned}\varepsilon_j^n =& \frac{\partial \phi}{\partial t}(x_j, t_n) + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x_j, t_n) + O(\Delta t^2) \\ &+ a\frac{\partial \phi}{\partial x}(x_j, t_n) + O(\Delta x^2) - \alpha\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x_j, t_n) + O(\Delta x^2)\right)\end{aligned}$$

(c) En déduire l'ordre du schéma, expliquez pourquoi le schéma est dissipatif.

(d) Analysez la stabilité du schéma par la methode de Von Neumann.

(e) Montrez que le schéma ne respecte pas le principe du maximum.

4. On considère maintenant le cas non-linéaire, c'est à dire f quelconque régulière.

(a) Montrez que ce schéma est conservatif, on donnera l'expression du flux numérique.

(b) Vérifiez que le schéma est consistant.

(c) Le schéma est-il monotone ?