Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2011-2012
MACS - 1

C. Basdevant

Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique de septembre 2012

Durée : 2h
Aucun document autorisé

Exercice I

Donnez la solution faible entropique $u(x,t),\ x \in \mathbb{R}, t \geq 0$ du problème suivant en justifiant clairement votre réponse avec tous les dessins nécessaires.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2}{2} = 0 \quad x \in \mathbb{R} \quad ,\forall t > 0$$

$$\begin{aligned} u(x,0) =& 1 && x \leq 0 \\ u(x,0) =& 1 - \frac{x}{a} && 0 \leq x \leq a \\ u(x,0) =& 0 && x \geq a \end{aligned}$$

où a est une constante strictement positive.

Corrigé : Tracez l'état initial $u(x,0)$. On sait que les caractéristiques sont des droites et que u est constant le long des caractéristiques. La caractéristique issue d'un point x_0 est, dans le plan (x,t), la droite d'équation $X(t,x_0) = x_0 + t\,u(x_0,0)$. Tracez ces droites dans le plan (x,t). Pour $t < a$ ces caractéristiques ne se coupent pas et permettent de définir la solution partout par l'équation de conservation $u(x_0,0) = u(X(t,x_0),t)$. Soit :

$$\begin{aligned} &u(x,t) = 1, \text{ pour } x \leq t \\ &u(x,t) = \frac{a-x}{a-t}, \text{ pour } t \leq x \leq a \\ &u(x,t) = 0, \text{ pour } x \geq a \end{aligned}$$

Pour $t > a$, il se produit un choc issu de $t = a, x = a$, à gauche du choc on a $u = 1$ et à droite $u = 0$. La relation de Rankine et Hugoniot nous donne la vitesse de déplacement de ce choc, soit :

$$\sigma = \frac{f(u_g) - f(u_d)}{u_g - u_d} = \frac{u_g^2/2 - u_d^2/2}{u_g - u_d} = \frac{1}{2}$$

On en déduit la solution pour $t > a$:

$$\begin{aligned} &u(x,t) = 1, \text{ pour } x < a + \frac{t}{2} \\ &u(x,t) = 0, \text{ pour } x > a + \frac{t}{2} \end{aligned}$$

Tracez la solution à différents temps.

Exercice II

On considère, pour l'équation de la chaleur sur tout $\mathbb{R}$ ($\nu > 0$ est donné) :

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0 \\ u(x,0) = u^0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{array}$$

le schéma d'approximation par différences finies sur un maillage régulier de pas Δx en espace et Δt en temps (schéma de Gear):

$$\frac{3u_j^{n+1} - 4u_j^n + u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{(\Delta x)^2} = 0$$

Note on pourra poser $\lambda = \dfrac{2\nu \Delta t}{(\Delta x)^2}$.

1. Dessinez le stencil du schéma, de quel type de schéma s'agit-il ?

   Corrigé :

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & -- & \bullet & -- & \bullet & & n+1 \\ | & & | & & | & & \\ \circ & -- & \bullet & -- & \circ & & n \\ | & & | & & | & & \\ \circ & -- & \bullet & -- & \circ & & n-1 \\ | & & | & & | & & \\ j-1 & & j & & j+1 & & \end{array}$$

   Le schéma est implicite.

2. Analysez la stabilité du schéma par la méthode de von Neumann.
   On rappelle que les racines de l'équation du second degré à coefficients réels $z^2 + bz + c = 0$ sont toutes les deux dans le disque unité fermé si et seulement si $|c| \leq 1$ et $|b| \leq 1 + c$.

   Corrigé : Cherchons une solution du schéma onde pure c'est à dire de la forme $u_j^n = a_n \exp(ikx_j)$, on obtient alors, après simplification par $\exp(ikx_j)$:

$$3a_{n+1} - 4a_n + a_{n-1} - \lambda a_{n+1} (\exp(ik\Delta x) + \exp(-ik\Delta x) - 2) = 0$$

   soit en posant $\mu = 3 + 4\lambda \sin^2(\frac{k\Delta x}{2})$:

$$\mu a_{n+1} - 4a_n + a_{n-1} = 0$$

   une équation récurrente à deux termes dont l'équation caractéristique s'écrit :

$$r^2 - \frac{4}{\mu} r + \frac{1}{\mu} = 0$$

   Le schéma sera stable si et seulement si les racines de cette équation sont de module inférieur ou égal à un. En appliquant le lemme rappelé dans l'énoncé on obtient les conditions : $\mu \geq 1$ et $3 \leq \mu$, toutes conditions qui sont réalisées, le schéma est donc inconditionnellement stable.

3. Quel est l'ordre du schéma ?

   Corrigé : Pour évaluer l'ordre on doit faire le développement de l'erreur locale de troncature ε_j^n qui est définie par :

$$\varepsilon_j^n = \frac{3u(x_j, t_{n+1}) - 4u(x_j, t_n) + u(x_j, t_{n-1})}{2\Delta t} - \nu \frac{u(x_{j+1}, t_{n+1}) + u(x_{j-1}, t_{n+1}) - 2u(x_j, t_{n+1})}{(\Delta x)^2}$$

   pour u une solution suffisamment régulière de l'équation de la chaleur.
   Le schéma étant manifestement écrit au temps t_{n+1} et au point x_j, faisons des développements limités autour de ces valeurs.
   La deuxième partie de ε_j^n est une approximation bien connue d'ordre 2 de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

$$\frac{u(x_{j+1}, t_{n+1}) + u(x_{j-1}, t_{n+1}) - 2u(x_j, t_{n+1})}{(\Delta x)^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{n+1}) + O(\Delta x^2)$$

   Il reste à faire les développements en temps de la première partie et on obtient :

$$\frac{3u(x_j, t_{n+1}) - 4u(x_j, t_n) + u(x_j, t_{n-1})}{2\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_{n+1}) - \frac{\Delta t^2}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_j, t_{n+1}) + O(\Delta t^3)$$

   Ainsi, $\varepsilon_j^n = O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$, le schéma est d'ordre 2 en temps et en espace.

4. On considère dans cette question ce même schéma pour le problème posé sur $[0, 1]$ avec des conditions aux limites de Dirichlet :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall x \in]0, 1[, \qquad \forall t > 0 \\ &u(x, 0) = u^0(x) \quad \forall x \in]0, 1[\\ &u(0, t) = \alpha, \quad u(1, t) = \beta, \qquad \forall t > 0 \end{aligned}$$

   où α et β sont des constantes données.
   En prenant $x_j = j\Delta x$, avec $\Delta x = \frac{1}{N+1}$, formez le système à résoudre à chaque pas de temps et la matrice associée. Discutez de l'existence et de l'unicité de sa solution.

   Corrigé : Le schéma s'écrit, pour $1 < j < N$:

$$(3 + 2\lambda)u_j^{n+1} - \lambda u_{j+1}^{n+1} - \lambda u_{j-1}^{n+1} = 4u_j^n - u_j^{n-1}$$

   et, en tenant compte des conditions aux limites, pour $j = 1$:

$$(3 + 2\lambda)u_1^{n+1} - \lambda u_2^{n+1} = \lambda\alpha + 4u_1^n - u_1^{n-1}$$

   et enfin pour $j = N$:

$$(3 + 2\lambda)u_N^{n+1} - \lambda u_{N-1}^{n+1} = \lambda\beta + 4u_N^n - u_N^{n-1}$$

   La matrice du système $N \times N$ déterminant les u_j^{n+1} pour $1 \leq j \leq N$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 3+2\lambda & -\lambda & 0 & & & & \\ -\lambda & 3+2\lambda & -\lambda & 0 & & & \\ 0 & -\lambda & 3+2\lambda & -\lambda & 0 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & 0 & -\lambda & 3+2\lambda & -\lambda & 0 \\ & & & 0 & -\lambda & 3+2\lambda & -\lambda \\ & & & & 0 & -\lambda & 3+2\lambda \end{pmatrix}$$

Comme $\lambda > 0$ la matrice est strictement diagonalement dominante et donc inversible quels que soient Δx et Δt. Symétrique, à diagonale positive strictement dominante, la matrice est définie positive, le système étant tridiagonal, il peut alors être résolu en $O(N)$ opérations par décomposition de Choleski de la matrice.

5. On considère maintenant l'équation de la chaleur sur $[0, 1]$ avec des conditions aux limites mixtes Dirichlet Neumann :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall x \in]0, 1[, \qquad \forall t > 0 \\
&u(x, 0) = u^0(x) \quad \forall x \in]0, 1[\\
&\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \gamma, \quad u(1, t) = \beta, \qquad \forall t > 0
\end{aligned}$$

où γ et β sont des constantes données.
En prenant $x_j = (j - \frac{1}{2})\Delta x$, avec $\Delta x = \frac{2}{2N+1}$, adaptez le schéma pour prendre en compte la condition de Neumann, formez le système à résoudre à chaque pas de temps et la matrice associée. Discutez de l'existence et de l'unicité de sa solution.

Corrigé : On remarque que $x_1 = \frac{\Delta x}{2}$ et $x_{N+1} = 1$. Pour tenir compte de la condition de Neumann en $x = 0$ dans le schéma écrit au point $x_1 = \frac{\Delta x}{2}$ on a les développements :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\frac{\Delta x}{2}) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(0)}{\Delta x} + O(\Delta x^2) = \frac{\frac{u(\Delta x + \frac{\Delta x}{2}) - u(\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x}(0)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

Soit : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1) \approx \frac{\frac{u_2 - u_1}{\Delta x} - \gamma}{\Delta x}$, en utilisant cette approximation d'ordre 1 pour la dérivée seconde on forme l'équation du schéma en $j = 1$:

$$(3 + \lambda)u_1^{n+1} - \lambda u_2^{n+1} = -\lambda\gamma\Delta x + 4u_1^n - u_1^{n-1}$$

Le schéma étant inchangé aux autres points du maillage, la matrice du système $N \times N$ déterminant les u_j^{n+1} pour $1 \le j \le N$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix}
3+\lambda & -\lambda & 0 & & & & \\
-\lambda & 3+2\lambda & -\lambda & 0 & & & \\
0 & -\lambda & 3+2\lambda & -\lambda & 0 & & \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
 & & 0 & -\lambda & 3+2\lambda & -\lambda & 0 \\
 & & & 0 & -\lambda & 3+2\lambda & -\lambda \\
 & & & & 0 & -\lambda & 3+2\lambda
\end{pmatrix}$$

Pour les mêmes raisons que dans la question précédente la matrice est symétrique, à diagonale positive strictement dominante, la matrice est définie positive ; le système étant tridiagonal, il peut alors être résolu en $O(N)$ opérations par décomposition de Choleski de la matrice.