Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2012-2013
MACS - 1
C. Basdevant

Examen d'Analyse Numérique du 2 avril 2013

Durée : 1h30
Notes de cours autorisée

On considère l'équation de la chaleur sur $]0,1[$ suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall x \in]0,1[, \quad \forall t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = a\ u(0,t) \quad \forall t \geq 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = -a\ u(1,t) \quad \forall t \geq 0 \\ u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in [0,1] \end{cases}$$

dans laquelle a est une constante positive.

Sur un maillage régulier de pas $\Delta x = \dfrac{1}{N}$ en espace et Δt en temps, on introduit le schéma de différences finies suivant, où $u_j^n \approx u(j\Delta x, n\Delta t)$ pour $j \in \{0, \cdots, N\}$, $\lambda = \nu \dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}$ et $u_j^0 = u_0(x_j)\ \forall j \in \{0, \cdots, N\}$:

$$\begin{cases} u_0^{n+1} = (1 - 2\lambda - 2\lambda a \Delta x) u_0^n + 2\lambda u_1^n \\ u_j^{n+1} = \lambda u_{j-1}^n + (1-2\lambda) u_j^n + \lambda u_{j+1}^n, \qquad \forall j \in \{1, \cdots, N-1\} \\ u_N^{n+1} = 2\lambda u_{N-1}^n + (1 - 2\lambda - 2\lambda a \Delta x) u_N^n \end{cases} \tag{1}$$

1. Définissez le stencil du schéma et son type.

2. Analysez la consistance du schéma et son ordre.

3. On note $U^{(n)}$ le vecteur $(u_0^n, u_1^n, \cdots, u_N^n)$. Mettre le schéma (1) sous la forme matricielle :
$$U^{(n+1)} = AU^{(n)}$$
avec une matrice A que vous expliciterez.

4. Montrez que toute valeur propre μ de la matrice A vérifie :
$$\text{Soit} \qquad |\mu - (1 - 2\lambda - 2a\lambda\Delta x)| \leq 2\lambda \qquad \text{soit} \qquad |\mu - (1-2\lambda)| \leq 2\lambda$$
Note : on rappelle le théorème de Gershgorin : Soit μ une valeur propre (réelle ou complexe) d'une matrice carrée C $n \times n$, alors il existe un indice i tel que $|\mu - C_{i,i}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |C_{i,j}|$.

5. En déduire qu'une condition suffisante de stabilité du schéma (1) est :
$$\lambda \leq \frac{1}{2 + a\Delta x}$$

6. Commentez ce résultat.

7. Démontrez la convergence du schéma (1) sous cette condition de stabilité.