Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2012-2013
MACS - 1
C. Basdevant

Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique du 14 mai 2013

Durée : 1h30
Notes de cours autorisées

Exercice

Pour calculer les solutions de l'équation de transport sur toute la droite réelle

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad , \qquad \forall t > 0$$
$$u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

avec $c > 0$, on considère des schémas de différences finies explicites associés à des maillages réguliers de l'espace et du temps $x_j = j\Delta x$, $t_n = n\Delta t$.

1. On considère le schéma Leap-Frog :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + c\,\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

(a) Démontrez (proprement) que le schéma est d'ordre 2 en temps et en espace.

Corrigé : Pour évaluer l'ordre on doit faire le développement de l'erreur locale de troncature ε_j^n qui est définie par :

$$\varepsilon_j^n = \frac{u(x_j,t_{n+1}) - u(x_j,t_{n-1})}{2\Delta t} + c\,\frac{u(x_{j+1},t_n) - u(x_{j-1},t_n)}{2\Delta x}$$

pour u une solution suffisamment régulière de l'équation de transport.
Le schéma étant manifestement écrit au temps t_n et au point x_j, faisons des développements limités autour de ces valeurs.
On obtient par développement de Taylor les approximation suivantes :

$$\frac{u(x_j,t_{n+1}) - u(x_j,t_{n-1})}{2\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n) + O(\Delta t^2)$$
$$\frac{u(x_{j+1},t_n) - u(x_{j-1},t_n)}{2\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t_n) + O(\Delta x^2)$$

On en déduit pour u solution de l'équation de transport :

$$\varepsilon_j^n = O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$$

le schéma est d'ordre 2 en temps et en espace.

(b) Analysez la stabilité du schéma.

Corrigé : Une analyse de causalité (le cône de dépendance numérique doit contenir la caractéristique) impose une condition CFL nécessaire pour la stabilité, soit $c\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$. Pour obtenir une condition nécessaire et suffisante de stabilité, procédons à une analyse de von Neumann. Soit une solution numérique onde pure : $u_j^n = \alpha^n \exp(ikx_j)$, alors :

$$\alpha^{n+1} - \alpha^{n-1} + c\frac{\Delta t}{\Delta x}\alpha^n \left(\exp(+ik\Delta x) - \exp(-ik\Delta x)\right) = 0$$

d'où l'équation récurrente à deux termes pour la suite α^n :

$$\alpha^{n+1} + 2i\lambda\alpha^n - \alpha^{n-1} = 0 \qquad \text{avec} \qquad \lambda = c\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin(k\Delta x)$$

Pour la stabilité il faut et il suffit que les racines de l'équation caractéristique soient toutes deux de module inférieur ou égal à 1. Or ces racines sont de la forme $r = -i\lambda \pm (1-\lambda^2)^{1/2}$, si $\lambda > 1$ elles sont toutes deux imaginaires pures, non égales, de produit -1 et donc l'une d'elles est de module supérieur à 1, par contre si $\lambda \leq 1$, $r_2 = -\bar{r}_1$ et donc $-1 = r_1 r_2 = -|r_1|^2$, elles sont toutes deux de module 1 et le schéma est stable. La condition CFL trouvée plus haut est donc une condition nécessaire et suffisante de stabilité.

2. Démontrez (proprement) que le schéma de Lax-Wendroff

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\,\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{c^2 \Delta t}{2(\Delta x)^2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n\right) = 0$$

est d'ordre 2 en temps et en espace.

Corrigé : Pour évaluer l'ordre on doit faire le développement de l'erreur locale de troncature ε_j^n qui est définie par :

$$\begin{aligned}\varepsilon_j^n =& \frac{u(x_j,t_{n+1}) - u(x_j,t_n)}{\Delta t} + c\,\frac{u(x_{j+1},t_n) - u(x_{j-1},t_n)}{2\Delta x} \\ &- \frac{c^2\Delta t}{2}\frac{u(x_{j+1},t_n) + u(x_{j-1},t_n) - 2u(x_j,t_n)}{(\Delta x)^2}\end{aligned}$$

pour u une solution suffisamment régulière de l'équation de transport.
Le schéma étant manifestement écrit au temps t_n et au point x_j, faisons des développements limités autour de ces valeurs.
On obtient par développement de Taylor les approximation suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{u(x_j,t_{n+1}) - u(x_j,t_n)}{\Delta t} &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n) + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_n) + O(\Delta t^2) \\ \frac{u(x_{j+1},t_n) - u(x_{j-1},t_n)}{2\Delta x} &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t_n) + O(\Delta x^2) \\ \frac{u(x_{j+1},t_n) + u(x_{j-1},t_n) - 2u(x_j,t_n)}{(\Delta x)^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) + O(\Delta x^2)\end{aligned}$$

On en déduit pour u solution de l'équation de transport :

$$\varepsilon_j^n = \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) - \frac{c^2 \Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) + \Delta t\ O(\Delta x^2)$$

Mais, en remarquant d'une part que $\Delta t\ O(\Delta x^2) \leq (\Delta t)^2 + O(\Delta x^2)^2$, et que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = -c\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

On obtient le résultat, $\varepsilon_j^n = O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$, le schéma est d'ordre 2 en temps et en espace.

3. On considère le schéma :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + c\left(\alpha\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \beta\frac{u_{j+2}^n - u_{j-2}^n}{4\Delta x}\right) = 0$$

   (a) Déterminez les coefficients α et β pour que le schéma soit d'ordre 2 en temps et 4 en espace.

   Corrigé : Une première condition de consistance impose $\alpha + \beta = 1$. Pour évaluer l'ordre on doit faire le développement de l'erreur locale de troncature ε_j^n pour u une solution suffisamment régulière de l'équation de transport.
   Le schéma étant manifestement écrit au temps t_n et au point x_j, faisons des développements limités autour de ces valeurs.
   On obtient par développement de Taylor les approximation suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_{n-1})}{2\Delta t} &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + O(\Delta t^2)\\
\frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)}{2\Delta x} &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) + \frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t_n) + O(\Delta x^4)\\
\frac{u(x_{j+2}, t_n) - u(x_{j-2}, t_n)}{4\Delta x} &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) + \frac{4\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t_n) + O(\Delta x^4)
\end{aligned}$$

   On en déduit pour u solution régulière de l'équation de transport :

$$\varepsilon_j^n = (\alpha + 4\beta)\frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t_n) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^4)$$

   le schéma sera d'ordre 2 en temps et 4 en espace si $\alpha = \dfrac{4}{3}$ et $\beta = -\dfrac{1}{3}$.

   (b) Analysez la stabilité du schéma, on donnera une première condition nécessaire par une analyse de causalité puis une condition nécessaire et suffisante par une analyse de von Neumann. (Indications : $C = \frac{2-\sqrt{6}}{2} \approx -0.2247$, $S = 1 - C^2 \approx 0.9744$, $\frac{3}{S(4-C)} \approx 0.7287$).

   Corrigé : Imposer que le cône de dépendance numérique contienne la caractéristique conduit à la condition CFL nécessaire $c\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 2$. L'analyse de von Neumann pour une solution numérique onde pure : $u_j^n = \alpha^n \exp(ikx_j)$, donne :

$$\alpha^{n+1} - \alpha^{n-1} + ic\frac{2\Delta t}{3\Delta x}\alpha^n\left(4\sin(k\Delta x) - \frac{1}{2}\sin(2k\Delta x)\right) = 0$$

d'où l'équation récurrente à deux termes pour la suite α^n :

$$\alpha^{n+1} + 2i\mu\alpha^n - \alpha^{n-1} = 0 \qquad \text{avec} \qquad \mu = c\frac{\Delta t}{3\Delta x}\left(4\sin(k\Delta x) - \frac{1}{2}\sin(2k\Delta x)\right)$$

Pour la stabilité il faut et il suffit que les racines de l'équation caractéristique soient toutes deux de module inférieur ou égal à 1. Or ces racines sont de la forme $r = -i\mu \pm (1-\mu^2)^{1/2}$, si $|\mu| > 1$ elles sont toutes deux imaginaires pures, non égales, de produit -1 et donc l'une d'elles est de module supérieur à 1, par contre si $|\mu| \leq 1$, $r_2 = -\bar{r}_1$ et donc $-1 = r_1 r_2 = -|r_1|^2$, elles sont toutes deux de module 1 et le schéma sera stable.
Il nous faut donc trouver le maximum de $\Phi = 4\sin(y) - \dfrac{1}{2}\sin(2y)$, $\Phi' = 0$ conduit à l'équation $4\cos y - \cos 2y = 0$, soit $2\cos^2 y - 4\cos y - 1 = 0$ ce qui donne comme solution $\cos y = \frac{2-\sqrt{6}}{2} \approx -0.2247$, $\sin y \approx 0.9744$ et $\max\Phi \approx 4.1167$, d'où la condition de stabilité :

$$c\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{3}{\max\Phi} \approx 0.7287$$

Condition de type CFL plus sévère que la condition nécessaire trouvée plus haut.