Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2013-2014
MACS - 1
C. Basdevant - E. Audusse

Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique du 17 mars 2014

Durée : 1h30
Une feuille recto-verso de notes personnelles manuscrites est autorisée

Problème

Soit l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad \forall t > 0$$
$$u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

où $\nu > 0$ et u^0 est la condition initiale supposée régulière et bornée.
On considère des schémas de différences finies associés à des maillages réguliers de l'espace et du temps ($x_j = j\Delta x$, $t_n = n\Delta t$) pour calculer l'approximation $u_j^n \approx u(x_j, t_n)$ de la solution continue.

1. Présentez le schéma d'Euler explicite vu en cours et rappelez sans démonstration ses propriétés (stabilité, ordre, positivité).

   Corrigé : Le schéma d'Euler explicite s'écrit :

   $$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

   Il est stable sous la condition $\nu \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$, il est d'ordre 1 en temps et 2 en espace, il conserve la positivité sous sa condition de stabilité.

2. On considère dans la suite le schéma :

   $$\begin{cases} u_j^{n+1} = u_j^n + \lambda \delta_j^n - \frac{\lambda - 6\lambda^2}{12}\left(\delta_{j+1}^n + \delta_{j-1}^n - 2\delta_j^n\right), & j \in \mathbb{Z}\,,\ n \geq 0 \\ u_j^0 = u^0(x_j) \quad j \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{1}$$

   avec

   $$\delta_j^n = u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n \quad \text{et} \quad \lambda = \nu \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

   Donnez une interprétation, sans justification, en termes de dérivées partielles de la fonction u, du terme rajouté au schéma d'Euler pour former le schéma (1).

   Corrigé : Le schéma (1) s'écrit :

   $$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{(\Delta x)^2} - \nu \frac{(\Delta x)^2 - 6\nu\Delta t}{12}\left(\frac{\delta_{j+1}^n + \delta_{j-1}^n - 2\delta_j^n}{(\Delta x)^4}\right) = 0$$

Sans faire le développement on voit que le terme rajouté au schéma d'Euler est de la forme :

$$-\mu\left(\frac{\delta_{j+1}^n+\delta_{j-1}^n-2\delta_j^n}{(\Delta x)^4}\right)\approx-\mu\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

avec $\mu=\nu\frac{(\Delta x)^2-6\nu\Delta t}{12}$.

3. Ecrivez le schéma (1) sous la forme :

$$u_j^{n+1}=a_0\,u_j^n+a_1(u_{j+1}^n+u_{j-1}^n)+a_2(u_{j+2}^n+u_{j-2}^n) \tag{2}$$

avec des coefficients a_i que vous expliciterez en fonction de λ. Note : pensez à vérifier la somme $a_0+2a_1+2a_2$.

Corrigé : Un calcul simple donne :

$$\begin{cases} a_0=1-2\lambda-\lambda\frac{1-6\lambda}{2}=1-\frac{5}{2}\lambda+3\lambda^2 \\ a_1=\lambda+\lambda\frac{1-6\lambda}{3}=\frac{2\lambda}{3}(2-3\lambda) \\ a_2=-\lambda\frac{1-6\lambda}{12}=\frac{\lambda}{12}(6\lambda-1) \end{cases}$$

et on vérifie (consistance) que $a_0+2a_1+2a_2=1$.

4. Montrez qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le schéma conserve la positivité s'écrit :

$$\frac{1}{6}\leq\lambda\leq\frac{2}{3}$$

En déduire que sous cette condition u_j^n reste borné pour tous j et n.

Corrigé : La formule (2) montre que u_j^{n+1} est un barycentre des 5 valeurs u_k^n pour $-2\leq k\leq 2$. Le schéma conservera la positivité (principe du maximum) si et seulement si tous les coefficients du barycentre sont positifs (combinaison convexe), soit :

$$\begin{cases} a_0\geq 0 \;\rightarrow\; \text{OK} \\ a_1\geq 0 \;\rightarrow\; \lambda\leq\frac{2}{3} \\ a_2\geq 0 \;\rightarrow\; \lambda\geq\frac{1}{6} \end{cases}$$

La positivité du schéma est équivalente au principe du maximum, c'est à dire que u_j^n reste borné par les bornes de la donnée initiale, pour s'en convaincre il suffit de refaire le raisonnement du barycentre avec $v_j^n=MAX-u_j^n\geq 0$ ou $w_j^n=u_j^n-MIN\geq 0$ où MAX et MIN sont les bornes de la donnée initiale.

5. Montrez (proprement !) que, sous la condition de stabilité précédente, l'erreur locale de troncature est majorée par :

$$C_1\,(\Delta t)^2\,\mathrm{Max}|\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}|+C_2\,(\Delta x)^4\,\mathrm{Max}|\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}|$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes indépendantes de u, Δt et Δx. Indication : on conseille de faire des développements à partir de la formulation (2) et on notera que $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\nu^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$.

Corrigé : En utilisant la formulation (2) l'erreur locale de troncature ε_j^n s'écrit, pour $u(x,t)$ une solution de l'équation :

$$\begin{aligned}\varepsilon_j^n = \ & \tfrac{1}{\Delta t}\left[u(x_j,t_{n+1}) - a_0 u(x_j,t_n) - a_1(u(x_{j+1},t_n)+u(x_{j-1},t_n))\right.\\ & \left. -a_2(u(x_{j+2},t_n)+u(x_{j-2},t_n))\right]\end{aligned}$$

Faisons alors des développement de Taylor-Lagrange autour du point (x_j,t_n) :

$$\begin{aligned}u(x_j,t_{n+1}) =& u(x_j,t_n) + \Delta t\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_n) + \\ & \frac{(\Delta t)^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_j,t_{n+\theta_1})\\ u(x_{j+1},t_n)+u(x_{j-1},t_n) =& 2u(x_j,t_n) + (\Delta x)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) + \frac{(\Delta x)^4}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_n) + \\ & \frac{(\Delta x)^6}{360}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_{j+\theta_2},t_n)\\ u(x_{j+2},t_n)+u(x_{j-2},t_n) =& 2u(x_j,t_n) + 2^2(\Delta x)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) + \frac{2^4(\Delta x)^4}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_n) + \\ & \frac{2^6(\Delta x)^6}{360}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_{j+\theta_3},t_n)\end{aligned}$$

avec $0 \leq \theta_1 \leq 1$, $-1 \leq \theta_2 \leq 1$ et $-2 \leq \theta_3 \leq 2$. On obtient ainsi, en tenant compte de $\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nu^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$:

$$\begin{aligned}\Delta t\varepsilon_j^n =& u(x_j,t_n)(1-a_0-2a_1-2a_2) + \\ & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n)(\nu\Delta t - (\Delta x)^2(a_1+4a_2)) + \\ & \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_n)(\nu^2\frac{(\Delta t)^2}{2} - \frac{(\Delta x)^4}{12}(a_1+16a_2)) + \\ & \frac{(\Delta t)^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_j,t_{n+\theta_1}) - a_1\frac{(\Delta x)^6}{360}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_{j+\theta_2},t_n) - a_2\frac{2^6(\Delta x)^6}{360}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_{j+\theta_3},t_n)\end{aligned}$$

On vérifie que $1-2a_1-2a_2 = 0$, $\nu\Delta t - (\Delta x)^2(a_1+4a_2) = 0$ et $\nu^2\frac{(\Delta t)^2}{2} - \frac{(\Delta x)^4}{12}(a_1+16a_2) = 0$, d'où :

$$\Delta t\varepsilon_j^n = \frac{(\Delta t)^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_j,t_{n+\theta_1}) - a_1\frac{(\Delta x)^6}{360}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_{j+\theta_2},t_n) - a_2\frac{2^6(\Delta x)^6}{360}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_{j+\theta_3},t_n)$$

Comme λ est majoré (par $\frac{2}{3}$), a_1 et a_2 sont majoré par $c\lambda = c\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}$, d'où le résultat demandé :

$$|\varepsilon_j^n| \leq= C_1\,(\Delta t)^2\,\mathrm{Max}|\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}| + C_2\,(\Delta x)^4\,\mathrm{Max}|\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}|$$

6. Montrez qu'une analyse de stabilité de von Neumann conduit à la condition nécessaire et suffisante de stabilité :

$$|f(K)| \leq 1 \quad \forall K \in [-1,1]$$

avec

$$f(K) = 4a_2K^2 + 2a_1K + a_0 - 2a_2$$

Note : là encore utilisez de préférence la formulation (2).

Corrigé : En injectant une solution onde pure $u_j^n = \alpha_n \exp(ikx_j)$ dans l'équation (2) on obtient :

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n \left(a_0 + 2a_1 \cos(k\Delta x) + 2a_2 \cos(2k\Delta x)\right)$$

soit en posant $K = \cos(k\Delta x)$, $\cos(2k\Delta x) = 2K^2 - 1$:

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = f(K) = 4a_2K^2 + 2a_1K + a_0 - 2a_2$$

La condition nécessaire et suffisante de stabilité est alors : $|f(K)| \leq 1 \quad \forall K \in [-1, 1]$.

7. Vérifiez que $f(1) = 1$, $f'(1) > 0$ et $f(-1) > 0$. En étudiant $f'(-1)$ montrez que $\lambda \leq \frac{5}{12}$ est une condition suffisante de stabilité.

   Corrigé : On obtient $f(1) = 1$, $f'(1) = 2\lambda > 0$, $f(-1) = 8\lambda^2 - \frac{16}{3}\lambda + 1 > 0$, $\forall \lambda$, $f'(-1) = 2\lambda(\frac{5}{3} - 4\lambda)$. Si $f'(-1) \geq 0$ comme $f'(K)$ est linéaire en K et est positif en $K = 1$ et $K = -1$, $f'(K) \geq 0$ entre -1 et 1, et donc $0 < f(-1) \leq f(K) \leq f(1) = 1$. Ainsi $\lambda \leq \frac{5}{12}$ est bien une condition suffisante de stabilité.

8. En déduire que le schéma est stable pour $\lambda \leq \frac{2}{3}$.

   Corrigé : L'analyse de la positivité nous a donné la stabilité pour $\frac{1}{6} \leq \lambda \leq \frac{2}{3}$ et l'analyse de von Neumann une condition suffisante $0 < \lambda \leq \frac{5}{12}$, on en déduit que le schéma est stable pour $\lambda \leq \frac{2}{3}$.