

Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique du 10 juin 2014

Durée : 3h00

Une feuille recto-verso de notes personnelles manuscrites est autorisée

Problème 1 : Equation des ondes

On s'intéresse à la solution de l'équation des ondes en une dimension d'espace

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad \forall t > 0 \\ u(0, x) &= u^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) &= v^0(x) \end{aligned} \tag{1}$$

où $c \in \mathbb{R}$ et u^0 et v^0 sont les conditions initiales supposées bornées.

1. Démontrez que l'équation (1) est une EDP linéaire. S'agit-il d'un problème elliptique, hyperbolique ou parabolique ? Donnez la forme générale de la solution.

Corrigé : L'équation est bien linéaire, puisque si u^1 et u^2 sont solutions alors $w = u^1 + u^2$ est aussi solution, de même que $v = \lambda u^1$. Il s'agit, comme on l'a vu en cours, d'un problème hyperbolique, sa solution est :

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (u^0(x + ct) + u^0(x - ct)) + \frac{1}{2c} (w^0(x + ct) - w^0(x - ct))$$

avec $w^0(x) = \int^x v^0(t) dt$ une primitive de v^0 . Soit des propagations avec des vitesses d'onde $+c$ et $-c$.

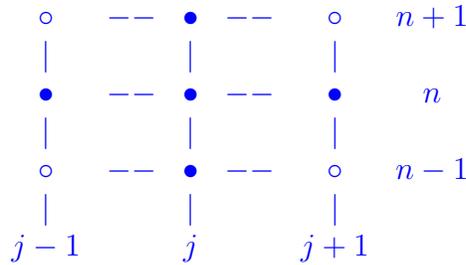
On considère dans la suite des schémas de différences finies associés à des maillages réguliers de l'espace et du temps ($x_j = j\Delta x$, $t_n = n\Delta t$) pour calculer l'approximation $u_j^n \approx u(t_n, x_j)$ de la solution continue.

2. On a étudié en cours le schéma saute-mouton

$$\forall n \geq 1 \quad \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

Rappelez (sans démonstration) le stencil, l'ordre et les propriétés de stabilité de ce schéma. Donnez également une procédure de démarrage du schéma.

Corrigé : Le schéma est explicite, son stencil est :



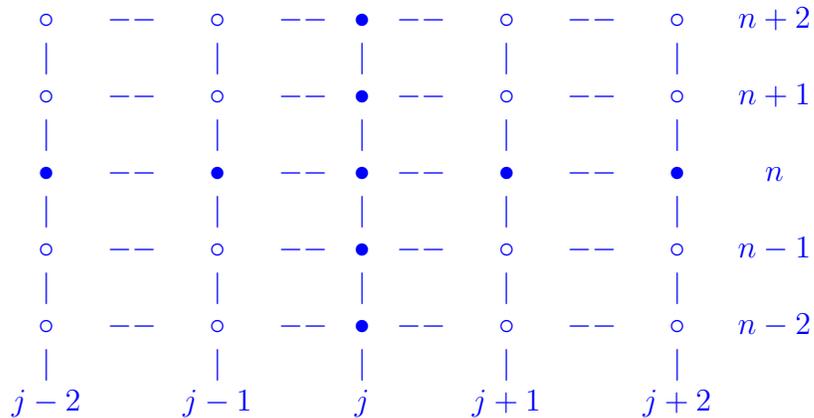
Il est d'ordre deux en espace et en temps, il est stable sous la condition CFL : $|c| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$. La procédure de démarrage doit permettre de calculer les valeurs de u_j^1 à partir des $u_j^0 = u^0(x_j)$ et $v^0(x_j)$, on peut, par exemple, utiliser un schéma de type Euler : $u_j^1 = u_j^0 + \Delta t v^0(x_j)$.

3. On propose maintenant le schéma

$$\forall n \geq 2 \quad \frac{-u_j^{n+2} + 16u_j^{n+1} - 30u_j^n + 16u_j^{n-1} - u_j^{n-2}}{12\Delta t^2} - c^2 \frac{-u_{j+2}^n + 16u_{j+1}^n - 30u_j^n + 16u_{j-1}^n - u_{j-2}^n}{12\Delta x^2} = 0 \quad (2)$$

(a) Donnez le stencil de ce schéma. Expliquez pourquoi on peut dire que ce schéma est explicite, moyennant une procédure de démarrage que l'on proposera.

Corrigé : Le stencil du schéma est :



Le schéma permet de calculer de manière explicite la valeur de u_j^{n+2} connaissant la solution aux temps précédents, il faut donc définir une procédure de démarrage pour calculer u^1 , u^2 et u^3 . Le schéma saute-mouton peut être utilisé comme procédure de démarrage pour calculer ces trois temps.

- (b) Montrez que ce schéma est d'ordre quatre en espace et en temps.

Corrigé : Un développement de Taylor à l'ordre 5 donne :

$$f''(x) = \frac{-f(x+2h) + 16f(x+h) - 30f(x) + 16f(x-h) - f(x-2h)}{12h^2} + \frac{h^4}{90} f^{(6)}(x) + o(h^4)$$

L'erreur locale de troncature du schéma s'écrit donc :

$$\varepsilon_j^n = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_n, x_j) - \frac{\Delta t^4}{90} \frac{\partial^6 u}{\partial t^6}(t_n, x_j) + o(\Delta t^4) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) + \frac{\Delta x^4}{90} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(t_n, x_j) + o(\Delta x^4)$$

Soit $\varepsilon_j^n = O(\Delta t^4 + \Delta x^4)$, ce qui prouve que le schéma est d'ordre 4 en espace et en temps.

- (c) Montrez que l'étude de la stabilité au sens de Von Neumann, i.e. en introduisant une solution de la forme

$$u_j^n = a_n e^{ikx_j}$$

permet d'écrire le schéma numérique (2) sous la forme d'une relation de récurrence à 4 termes dont l'équation caractéristique a nécessairement une racine de module plus grand que 1 (attention, on ne demande surtout pas le calcul explicite des racines de l'équation). Conclure.

Corrigé : En injectant la solution onde dans le schéma on obtient l'équation de récurrence :

$$-a_{n+2} + 16a_{n+1} - 30a_n + 16a_{n-1} - a_{n-2} - \mu a_n = 0$$

avec $\mu = c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (-2 \cos(2k\Delta x) + 32 \cos(k\Delta x) - 30)$, et dont l'équation caractéristique est :

$$-r^4 + 16r^3 - (30 + \mu)r^2 + 16r - 1 = 0$$

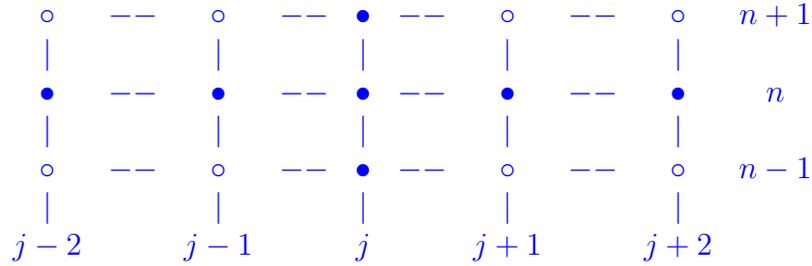
Le produit des racines est 1, leur somme est 16, il n'est donc pas possible que toutes les racines soient de module inférieur à 1, ce qui prouve que ce schéma est instable.

4. On veut maintenant trouver un schéma d'ordre 4 en espace et en temps, mais qui ait le même stencil en temps que le schéma saute-mouton, i.e. où le calcul de la solution ne dépend que des deux pas de temps précédents. On propose la schéma suivant

$$\forall n \geq 1 \quad \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{-u_{j+2}^n + 16u_{j+1}^n - 30u_j^n + 16u_{j-1}^n - u_{j-2}^n}{12\Delta x^2} - c^4 \frac{\Delta t^2}{12} \frac{u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{\Delta x^4} = 0$$

(a) Donnez le stencil de ce schéma.

Corrigé : Le stencil du schéma est :



C'est un schéma explicite.

(b) En utilisant les liens entre dérivée temporelle et dérivée spatiale de la solution qu'on peut déduire de l'équation (1), montrez que ce schéma est d'ordre quatre en espace et en temps.

Corrigé : On a vu que

$$\frac{-f(x+2h) + 16f(x+h) - 30f(x) + 16f(x-h) - f(x-2h)}{12h^2} = f''(x) + O(h^4)$$

On a également que :

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) + \frac{h^2}{12}f^{(4)}(x) + O(h^4)$$

et :

$$\frac{f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{h^4} = f^{(4)}(x) + O(h^2)$$

L'erreur locale de troncature du schéma s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^n = & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_n, x_j) + \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(t_n, x_j) + O(\Delta t^4) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) + O(\Delta x^4) \\ & - c^4 \frac{\Delta t^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t_n, x_j) + O(\Delta x^4) \right) \end{aligned}$$

Comme $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ on en déduit que $\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = c^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, et ainsi $\varepsilon_j^n = O(\Delta t^4) + O(\Delta x^4) + \Delta t^2 O(\Delta x^4)$, en utilisant l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$ on en déduit $\varepsilon_j^n = O(\Delta t^4 + \Delta x^4)$, ce qui prouve que le schéma est d'ordre 4 en espace et en temps.

(c) Montrez que l'étude de la stabilité au sens de Von Neumann conduit à considérer une relation de récurrence à deux termes, et que sous l'hypothèse

$$c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} = 1$$

les racines de l'équation caractéristique sont de module 1. Conclure.

On rappelle que les racines de l'équation du second degré à coefficients réels $z^2 + bz + c = 0$ sont toutes les deux dans le disque unité fermé si et seulement si $|c| \leq 1$ et $|b| \leq 1 + c$.

Corrigé : En injectant la solution onde dans le schéma on obtient l'équation de récurrence :

$$a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} - \mu a_n = 0$$

avec

$$\begin{aligned} \mu = & \frac{c^2 \Delta t^2}{12 \Delta x^2} (-2 \cos(2k\Delta x) + 32 \cos(k\Delta x) - 30) \\ & + \frac{c^4 \Delta t^4}{12 \Delta x^4} (2 \cos(2k\Delta x) - 8 \cos(k\Delta x) + 6) \end{aligned}$$

et dont l'équation caractéristique est :

$$r^2 - (2 + \mu)r + 1 = 0$$

D'après le résultat rappelé, pour que les racines de l'équation caractéristique soient dans le disque unité il faut que $|2 + \mu| \leq 2$, or si $c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} = 1$, $2 + \mu = 2 \cos(k\Delta x)$. Les racines sont donc dans le disque unité et leur produit étant égal à 1, les racines sont complexes conjuguées de module 1 et sous cette hypothèse le schéma est stable.

Problème 2 : Modèle de trafic routier

On a étudié en TD le modèle de trafic routier

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u(\rho)) = 0, \quad \rho(0, x) = \rho^0(x) \quad (3)$$

où $\rho(t, x)$ désigne la densité de voiture et $u(\rho)$ la vitesse des voitures, la fonction u étant donnée. Notez que ce problème est très différent du précédent (1) puisque, dès que la vitesse $u(\rho)$ n'est pas constante, il s'agit d'un problème non linéaire. Comme pour l'équation des ondes, on va s'intéresser au calcul de la solution exacte puis à l'analyse de schémas numériques pour calculer une solution approchée. Dans le TD, on avait proposé la formule

$$u(\rho) = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_M}\right) u_M$$

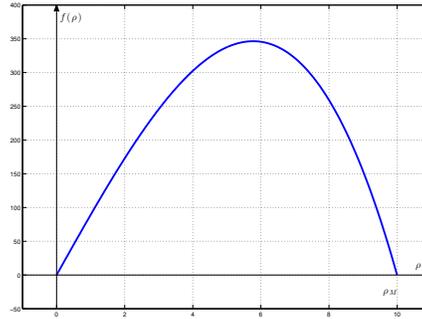
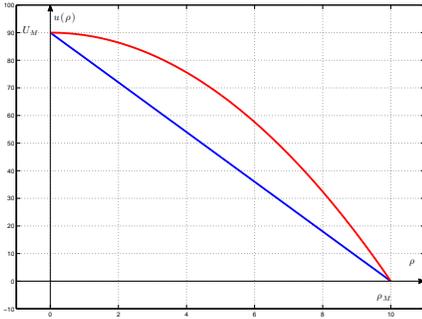
où ρ_M désigne la densité maximale de voitures sur la route considérée et u_M la vitesse maximale autorisée sur cette route. On cherche ici à construire puis à étudier un modèle qui soit plus précis quand la densité de voiture est faible.

1. Pour cela, on veut construire une vitesse $\tilde{u}(\rho)$ qui satisfasse les conditions suivantes

$$\tilde{u}(0) = u_M, \quad \tilde{u}'(0) = 0, \quad \tilde{u}(\rho_M) = 0$$

Trouvez l'unique polynôme de degré 2 qui réponde au problème. Tracez les fonctions u (du TD) et \tilde{u} sur un même graphique.

Corrigé : On trouve $\tilde{u}(\rho) = \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_M}\right)^2\right) u_M$.



2. On veut maintenant étudier le problème de Riemann pour le modèle (3). On considère donc une solution initiale

$$\rho^0(x) = \begin{cases} \rho_g & x < 0 \\ \rho_d & x \geq 0 \end{cases}$$

et on introduit la fonction flux

$$f(\rho) = \rho \tilde{u}(\rho)$$

- (a) Tracez la fonction $f(\rho)$. Montrez que c'est une fonction concave.

Corrigé : On trouve $f''(\rho) = -6 u_M \frac{\rho}{\rho_M^2} < 0$ pour $\rho > 0$, le flux est bien concave.

- (b) On cherche la solution du problème de Riemann sous la forme d'une fonction discontinue

$$\rho(t, x) = \begin{cases} \rho_g & x < \sigma t \\ \rho_d & x \geq \sigma t \end{cases}$$

Montrer que

$$\sigma = u_M \left(1 - \frac{\rho_g^2 + \rho_g \rho_d + \rho_d^2}{\rho_M^2} \right)$$

Corrigé : D'après Rankine et Hugoniot, la vitesse σ de propagation du choc doit vérifier

$$\sigma = \frac{[f(\rho)]}{[\rho]} = \frac{f(\rho_g) - f(\rho_d)}{\rho_g - \rho_d}$$

d'où le résultat.

- (c) On rappelle le critère d'admissibilité d'une discontinuité dans la solution

$$f'(\rho_g) > \sigma > f'(\rho_d)$$

Montrer que pour le modèle considéré, une solution discontinue est admissible si $\rho_g < \rho_d$.

Corrigé : On a vu que le flux est concave, donc f' est décroissante, la relation d'admissibilité est donc vérifiée si $\rho_g < \rho_d$.

3. On s'intéresse maintenant au cas $\rho_g > \rho_d$ et on cherche la solution sous la forme d'une fonction continue qui satisfait

$$\rho(t, x) = \phi\left(\xi = \frac{x}{t}\right)$$

Montrer qu'une telle fonction ρ est solution du modèle (3) si ϕ vérifie la relation

$$\phi'(\xi) (f'(\phi(\xi)) - \xi) = 0$$

En déduire que la solution est de la forme

$$\rho(t, x) = \begin{cases} \rho_g & x < f'(\rho_g)t \\ \frac{\rho_M}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{x}{t u_M}} & f'(\rho_g)t \leq x < f'(\rho_d)t \\ \rho_d & x \geq f'(\rho_d)t \end{cases}$$

Corrigé : Si on injecte une solution de la forme $\rho(t, x) = \phi(\xi = \frac{x}{t})$ dans l'équation on obtient $\phi'(\xi) (f'(\phi(\xi)) - \xi) = 0$ et donc $\phi(\xi) = (f')^{-1}(\xi)$. Comme $f'(\rho) = u_M \left(1 - 3 \frac{\rho^2}{\rho_M^2}\right)$ on a

$$(f')^{-1}(\xi) = \frac{\rho_M}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{\xi}{u_M}}$$

d'où la forme de l'onde de raréfaction qui remplit le domaine d'espace-temps dans lequel il n'y a pas a priori de caractéristiques du type $x = f'(\rho_g)t + x_0$ pour $x_0 < 0$, ou $x = f'(\rho_d)t + x_0$ pour $x_0 > 0$ puisque $f'(\rho_g) < f'(\rho_d)$.

4. On veut maintenant construire un schéma numérique pour trouver une solution approchée de ce problème dans le cas d'une donnée initiale quelconque. On se place dans le cadre des schémas volumes finis étudiés en cours où la solution approchée ρ_j^n est calculée par

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(\rho_j^n, \rho_{j+1}^n) - F(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n))$$

et on propose ici la formule d'Engquist-Osher pour le calcul du flux numérique F

$$F(u, v) = \frac{f(u) + f(v)}{2} - \frac{1}{2} \int_u^v |f'(s)| ds$$

Note : ici $\int_u^v ds = v - u, \forall u$ et v .

- (a) Montrez que ce flux numérique est consistant.

Corrigé : Il faut vérifier que $F(u, u) = f(u)$. Vérification immédiate.

- (b) Déterminez $F(u, v)$ pour f croissant et pour f décroissant.

Corrigé : Pour f croissant $F(u, v) = f(u)$ et pour f décroissant $F(u, v) = f(v)$.

- (c) On suppose que f est concave avec un changement de signe de la dérivée entre u et v au point w , soit $u < w < v$. Calculez $F(u, v)$.

Corrigé : D'après la définition du flux numérique, f' étant décroissante, donc positive jusqu'à w puis négative après :

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \frac{1}{2} (f(u) + f(v)) - \frac{1}{2} \left(\int_u^w f'(s) ds - \int_w^v f'(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{2} (f(u) + f(v)) - \frac{1}{2} (f(w) - f(u) + f(w) - f(v)) \\ &= f(u) + f(v) - f(w) \end{aligned}$$

- (d) Montrez que, dans ces trois cas, le flux numérique F est monotone, i.e. que $F(u, v)$ est croissant en u et décroissant en v . Quelle est la conséquence de cette propriété ?

Corrigé : On a vu que pour f croissant $F(u, v) = f(u)$ donc F est bien croissant en u et constant (donc aussi décroissant) en v , et pour f décroissant $F(u, v) = f(v)$ et donc la même propriété. Pour f concave, lors du changement de signe de f' , on a $F(u, v) = f(u) + f(v) - f(w)$, u étant dans la partie croissante de f , F est bien croissant en u , inversement v est dans la partie décroissante de f et F est décroissant en v , la propriété est donc vérifiée. Cette propriété entraîne la monotonie du schéma et donc la conservation du principe du maximum sous condition CFL.

En effet on a vu en cours que le schéma est monotone si, quand on écrit $\rho_j^{n+1} = H(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n, \rho_{j+1}^n)$, la fonction H est croissante par rapport à chacune de ses variables. La propriété vérifiée par F assure que H est croissant par rapport à sa première et sa troisième variables :

$$\frac{\partial H}{\partial \rho_{j-1}^n} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\partial F}{\partial u}(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n) > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial \rho_{j+1}^n} = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\partial F}{\partial v}(\rho_{j+1}^n, \rho_j^n) > 0$$

Il reste à vérifier $\frac{\partial H}{\partial \rho_j^n} > 0$, or :

$$\frac{\partial H}{\partial \rho_j^n} = 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{\partial F}{\partial u}(\rho_j^n, \rho_{j+1}^n) - \frac{\partial F}{\partial v}(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n) \right)$$

Pour le flux f croissant cela revient à imposer :

$$\frac{\partial H}{\partial \rho_j^n} = 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{\partial}{\partial \rho_j^n} f(\rho_j^n) - \frac{\partial}{\partial \rho_j^n} f(\rho_{j-1}^n) \right) = 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(\rho_j^n) > 0$$

Pour le flux f décroissant cela revient à imposer:

$$\frac{\partial H}{\partial \rho_j^n} = 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{\partial}{\partial \rho_j^n} f(\rho_{j+1}^n) - \frac{\partial}{\partial \rho_j^n} f(\rho_j^n) \right) = 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(\rho_j^n) > 0$$

Au voisinage du "point sonique" $f'(w_j^n) = 0$ on a soit :

$$\rho_{j+1}^n = \rho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(\rho_j^n) + f(\rho_{j+1}^n) - f(w_j^n) - f(\rho_j^n)) = \rho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(\rho_{j+1}^n) - f(w_j^n))$$

soit :

$$\rho_{j+1}^n = \rho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(\rho_j^n) + f(\rho_{j+1}^n) - f(w_j^n) - f(\rho_{j-1}^n))$$

Dans tous les cas pour avoir $\frac{\partial H}{\partial \rho_j^n} > 0$, il suffit d'imposer $|f'(\rho)| \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$, c'est à dire la condition CFL.