Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2014-2015
MACS - 1
C. Basdevant - E. Audusse

Devoir surveillé d'Analyse Numérique
du mardi 3 mars 2015

Durée : 2h

Une feuille recto-verso de notes personnelles manuscrites est autorisée.

Dans chacun des deux premiers exercices on considèrera, pour l'équation de la chaleur sur tout $\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \text{ avec } u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et $\nu > 0$, un schéma d'approximation par différences finies sur un maillage régulier de pas Δx en espace et Δt en temps.

Exercice I

Soit le schéma :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

1. Quelle est l'erreur locale de troncature de ce schéma (son ordre) ?
2. Analysez la stabilité de ce schéma.
3. Etudiez la convergence de ce schéma.

Exercice II

Schéma de Du Fort & Frankel :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - u_j^{n+1} - u_j^{n-1} + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

1. Décrivez le stencil du schéma et donnez son type.
2. Montrez que l'erreur locale de troncature est en $O((\Delta t)^2) + O((\Delta x)^2) + O\left((\frac{\Delta t}{\Delta x})^2\right)$.
   Note - on pourra écrire le schéma sous la forme :
   $$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = (\frac{\Delta t}{\Delta x})^2 X$$
   avec X à déterminer et utiliser des approximations vues en cours.
3. A quelle condition ce schéma conserve-t-il la positivité ?
4. Etudiez la stabilité de ce schéma.
   Note : on pourra utiliser le résultat de l'exercice III.

Exercice III

Démontrez le résultat suivant :
Les racines de l'équation du second degré à coefficients réels $z^2 + bz + c = 0$ sont toutes les deux dans le disque unité fermé de $\mathbb{C}$ si et seulement si $|c| \leq 1$ et $|b| \leq 1 + c$.
Indication : on considérera le signe du trinôme $f(x) = x^2 + bx + c$ pour $x = -1$ et $x = 1$.