Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2014-2015
MACS - 1

C. Basdevant - E. Audusse

Examen d'Analyse Numérique
du 5 mai 2015

Durée : 3h

Une feuille recto-verso de notes personnelles manuscrites est autorisée.

Question de cours

En donnant des exemples d'équations énoncez les propriétés et différences essentielles des équations aux dérivées partielles paraboliques, elliptiques et hyperboliques.

Exercice I

On considère l'équation d'advection linéaire sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}u = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0 \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

avec une vitesse constante et positive $a > 0$.
Pour $\Delta t > 0$ et $\Delta x > 0$, on définit les noeuds d'un maillage régulier $(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x)$ pour $n \geq 0, j \in \mathbb{Z}$. On note u_j^n une approximation discrète au point (x_j, t_n) de la solution exacte $u(x,t)$. On pose $c = a\frac{\Delta t}{\Delta x}$ et considère le schéma :

$$u_i^{n+1} = \frac{c(c-1)}{2}u_{i-2}^n + c(2-c)u_{i-1}^n + \frac{(c-1)(c-2)}{2}u_i^n \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$u_i^0 = u_0(x_i) \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

1. Dessinez le stencil du schéma, de quel type de schéma s'agit-il ? Déduisez du stencil une condition nécessaire de stabilité.

2. Montrez que la solution de l'équation (1) vérifie également une équation des ondes que vous expliciterez.

3. Montrez que ce schéma est (au moins) d'ordre 2 en temps et en espace.

4. Montrez que ce schéma est stable L^2 sous une condition que vous détermineterez.
   Note : vous pourrez montrer que, avec des notations à définir, le coefficient d'amplification du schéma $g_d = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ vérifie :

$$|g_d|^2 = 1 - c(c-1)^2(2-c)(1-\cos\xi)^2$$

5. En déduire que le schéma est convergent. Quel avantage voyez vous, en termes d'ordre et de stabilité, à ce schéma par rapport à ceux vus en cours ?

Exercice II

On considère, pour l'équation de la chaleur sur tout $\mathbb{R}$ ($\nu > 0$ est donné) :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \forall t > 0 \\
&u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

le schéma d'approximation par différences finies sur un maillage régulier de pas Δx en espace et Δt en temps (schéma de Gear):

$$3u_j^{n+1} - 4u_j^n + u_j^{n-1} - \lambda\left(u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}\right) = 0, \text{ avec } \lambda = \frac{2\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

1. Dessinez le stencil du schéma, de quel type de schéma s'agit-il ?
2. Analysez la stabilité du schéma par la méthode de von Neumann.
   On rappelle que les racines de l'équation du second degré à coefficients réels $z^2 + bz + c = 0$ *sont toutes les deux dans le disque unité fermé si et seulement si* $|c| \leq 1$ *et* $|b| \leq 1 + c$.
3. Quel est l'ordre du schéma en temps et en espace ?
4. On considère dans cette question ce même schéma pour le problème posé sur $[0,1]$ avec des conditions aux limites de Dirichlet :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall x \in]0,1[, \qquad \forall t > 0 \\
&u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in]0,1[\\
&u(0,t) = \alpha, \quad u(1,t) = \beta, \qquad \forall t > 0
\end{aligned}$$

   où α et β sont des constantes données.
   En prenant $x_j = j\Delta x$, avec $\Delta x = \frac{1}{N+1}$, et $N = 4$

   (a) Dessinez le maillage de $[0,1]$.
   (b) Formez le système à résoudre à chaque pas de temps et la matrice associée.
   (c) Discutez de l'existence et de l'unicité de sa solution.

5. On considère maintenant l'équation de la chaleur sur $[0,1]$ avec des conditions aux limites mixtes Dirichlet Neumann :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall x \in]0,1[, \qquad \forall t > 0 \\
&u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in]0,1[\\
&\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \gamma, \quad u(1,t) = \beta, \qquad \forall t > 0
\end{aligned}$$

   où γ et β sont des constantes données.
   En prenant $x_j = (j - \frac{1}{2})\Delta x$, avec $\Delta x = \frac{2}{2N+1}$, et $N = 4$

   (a) Dessinez le maillage de $[0,1]$.
   (b) Adaptez le schéma de Gear pour prendre en compte la condition de Neumann.
   (c) Formez le système à résoudre à chaque pas de temps et la matrice associée.
   (d) Discutez de l'existence et de l'unicité de sa solution.