Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2006-2007
MACS 1
C. Basdevant

Contrôle du mardi 12 juin 2007
d'Analyse Numérique

Durée 3 h Notes de cours autorisées

Problème I

Soit $c(t,x)$ une fonction à valeurs réelles, définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, qui est $C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et telle que c et $\frac{\partial c}{\partial x}$ soient bornées sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et soit $u_0(x)$ est une fonction à valeurs réelles qui est $C^1(\mathbb{R})$.

On considère l'équation de transport où $u(t,x) \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c(t,x)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \forall t \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrez que, pour tout $t_0 \geq 0$ et tout $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe une fonction $X(t;t_0,x_0)$ continûment différentiable par rapport à la variable t telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = c(t,X) \quad \forall t \geq 0 \\ X(t_0;t_0,x_0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

   Les courbes $(t, X(t;t_0,x_0))$ sont les courbes caractéristiques du problème (1).

2. En déduire que les caractéristiques ne se coupent pas.

3. Vérifiez que :

$$X(0;t,x) = x - \int_0^t c(\tau, X(\tau;t,x))d\tau$$

4. Montrez que toute solution de (1) est constante le long des courbes caractéristiques.

5. En déduire qu'il existe une unique solution $C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ de (1) et donner son expression en fonction de u_0 en utilisant la fonction X.

6. Démontrez que la solution u de (1) vérifie : $\sup_{x\in\mathbb{R}}|u(t,x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}}|u_0(x)|$

7. On supposera dans la suite que la donnée initiale u_0 vérifie $u_0(x) = 0$ pour $|x| \geq M$. Montrez que :

$$u(t,x) = 0 \quad \forall (t,x) \text{ vérifiant } |x| \geq M + \int_0^t \left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|c(s,x)|\right) ds$$

8. Montrez que la solution u de (1) vérifie :

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}}|u(t,x)|^2dx = \int_{\mathbb{R}}\frac{\partial c}{\partial x}(t,x)\,|u(t,x)|^2dx$$

Indication : on multipliera l'équation (1) par $u(t,x)$ et on intégrera en x.

9. En déduire la majoration :

$$\int_{\mathbb{R}}|u(t,x)|^2dx \le \int_{\mathbb{R}}|u_0(x)|^2dx\ \exp\left\{\int_0^t \sup_{x\in\mathbb{R}}|\frac{\partial c}{\partial x}(s,x)|ds\right\} \tag{3}$$

Problème II

On considère l'équation de transport sur $[0,1]$:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}+a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad \forall x\in]0,1[\quad , \quad \forall t>0 \\ u(x,0)=u^0(x) \quad \forall x\in]0,1[\\ u(0,t)=u^1(t) \quad , \quad \forall t>0 \end{array} \tag{4}$$

où la vitesse $a(x,t)$ est dans $C^1([0,1]\times\mathbb{R}_+)$ et vérifie $a(x,t)\ge 0$; u^0 est la condition initiale supposée $C^1([0,1])$, et $u^1(t)$ la condition à la limite $x=0$ est supposée continue.

Pour un maillage régulier en temps $t_n = n\Delta t,\ n\in\mathbb{N}$ et en espace $x_j = j\Delta x,\ 0\le j\le N,\ N=1/\Delta x$, on introduit le schéma d'approximation par différences finies où $u_j^n \approx u(x_j,t_n)$:

$$\begin{array}{l} \dfrac{u_{j+1/2}^{n+1}-u_{j+1/2}^{n}}{\Delta t}+a_{j+1/2}^{n+1/2}\,\dfrac{u_{j+1}^{n+1/2}-u_{j}^{n+1/2}}{\Delta x}=0, \quad j\in[1,N]\ ,\ n\ge 0 \\ \text{avec} \quad a_{j+1/2}^{n+1/2}=a(x_{j+1/2},t_{n+1/2}) \\ u_j^0=u^0(x_j), \quad j\in[1,N]; \quad u_0^n=u^1(t_n), \quad n\ge 0 \\ u_{j+1/2}^n=\dfrac{1}{2}(u_j^n+u_{j+1}^n) \quad \text{et} \quad u_j^{n+1/2}=\dfrac{1}{2}(u_j^{n+1}+u_j^n) \end{array}$$

1. Ecrire le schéma sous la forme :

$$\alpha u_j^{n+1}+\beta u_{j+1}^{n+1}=\gamma u_j^n+\delta u_{j+1}^n$$

avec des coefficients $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ que l'on explicitera en fonction de $\lambda = a_{j+1/2}^{n+1/2}\frac{\Delta t}{\Delta x}$.

2. Montrez que, malgré les apparences, le schéma est un schéma explicite.

3. Quelle condition de stabilité peut-on déduire d'une analyse de causalité ?

4. Déterminez l'ordre du schéma.

5. Faites une analyse de stabilité de Von Neumann du schéma pour le cas d'une vitesse $a(x,t)$ constante.

6. Montrez que le schéma ne vérifie pas le principe du maximum et ce quel que soit le rapport $\frac{\Delta t}{\Delta x}$.