Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2004-2005
MACS 1
C. Basdevant

Contrôle du 13 juin 2005 d'Analyse Numérique

Durée 3 h Notes de cours autorisées

Problème - Première partie

Soit $c(t,x)$ une fonction à valeurs réelles, définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, qui est $C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et telle que c et $\frac{\partial c}{\partial x}$ soient bornées sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et soit $u_0(x)$ est une fonction à valeurs réelles qui est $C^1(\mathbb{R})$.

On considère l'équation de transport :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c(t,x)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \forall t \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

où $u(t,x) \in \mathbb{R}$.

1. Montrez que, pour tout $t_0 > 0$ et tout $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction $X(t;t_0,x_0)$, continûment différentiable par rapport à la variable t telle que :
$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = c(t,X) \quad \forall t \geq 0 \\ X(t_0;t_0,x_0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$
2. Calculez $\frac{d}{dt}u(t,X(t;t_0,x_0))$ pour u solution de (1).
3. En déduire qu'il existe une unique solution $C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ de (1) et donner son expression en fonction de u_0 en utilisant la fonction X.
4. On supposera dans la suite que la donnée initiale u_0 vérifie $u_0(x) = 0$ pour $|x| \geq M$. Montrez que :
$$u(t,x) = 0 \quad \forall (t,x) \text{ vérifiant } |x| \geq M + \int_0^t \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |c(s,x)|\right) ds$$
5. Montrez que la solution u de (1) vérifie :
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(t,x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |u_0(x)|$$
6. Montrez que la solution u de (1) vérifie :
$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} |u(t,x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial c}{\partial x}(t,x)\,|u(t,x)|^2 dx$$
Indication : on multipliera l'équation (1) par $u(t,x)$ et on intégrera en x.

7. En déduire la majoration :

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t,x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|^2 dx \, \exp\left\{ \int_{\mathbb{R}} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |c(s,x)| \right) ds \right\} \tag{3}$$

Problème - Deuxième partie

On suppose toujours que la donnée initiale u_0 vérifie $u_0(x) = 0$ pour $|x| \geq M$. On supposera dans la suite $c(t,x) \geq 0$ pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

On cherche à calculer une approximation $u_i^n \approx u(t_n, x_i)$ de la solution de l'équation (1) aux points régulièrement espacés $x_i = i\Delta x,\ i \in \mathbb{Z},\ t_n = n\Delta t,\ n \in \mathbb{N}$ avec le schéma :

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \dfrac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0 \\ u_i^0 = u_0(x_i) \end{cases} \tag{4}$$

où

$$c_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} = c(t_{n+1}, \frac{x_{i-1} + x_i}{2})$$

1. Montrez que l'on peut calculer u_i^{n+1} de manière explicite.
2. Quel est l'ordre du schéma (4) ?
3. Dans le cas où $c(t,x) = c$ est une constante positive faites une analyse de stabilité de Von Neumann du schéma (4).
4. Dans le cas où $c(t,x) \geq 0$ n'est pas constant montrez que :

$$\max_{i\in\mathbb{Z}} |u_i^n| \leq \max_{i\in\mathbb{Z}} |u_i^0|$$

5. Dans le cas où $c(t,x) \geq 0$ n'est pas constant, montrez que :

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |u_i^{n+1}|^2 - \sum_{i\in\mathbb{Z}} |u_i^n|^2 \right) \leq \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{c_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - c_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta x} |u_i^{n+1}|^2 \tag{5}$$

   Indication : on pourra multiplier le schéma par u_i^{n+1}, sommer pour $i \in \mathbb{Z}$ et utiliser l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.
6. Déduire de (5) que, pour Δt suffisamment petit :

$$\|u^n\|^2 \leq \|u^0\|^2 \prod_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i\in\mathbb{Z}} |c_{i+\frac{1}{2}}^k - c_{i-\frac{1}{2}}^k| \right)^{-1} \tag{6}$$

   où

$$\|u^n\| = \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \Delta x \, |u_i^n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

7. Comparez (3) et (6) et donnez un critère pratique pour choisir le pas de temps Δt.