

**Examen
d'Analyse Numérique
du jeudi 15 décembre 2005**

Durée : 2h
Notes de cours autorisées

Exercice

Trouvez la fonction $y(x)$ définie sur $[0, 1]$ qui minimise

$$I(y) = \int_0^1 ((y'')^2 - 24xy) dx$$

sous les contraintes $y(0) = y'(0) = 0$ et $y(1) = \frac{1}{5}$, $y'(1) = 1$.

1. Par l'inégalité d'Euler.
2. Par la méthode de Pontryaguine.

Problème

On considère le système dynamique :

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -2y_1 + u & y_1(0) = y_{10} \\ \frac{dy_2}{dt} = -y_2 + u & y_2(0) = y_{20} \end{cases}$$

La commande $u(t)$ est contrainte par $|u| \leq 1$ et est à déterminer pour un retour à l'origine ($y_1(T) = y_2(T) = 0$) en temps minimum.

1. Formez le Hamiltonien du système, écrivez les équations satisfaites par l'état adjoint p (avec les conditions aux limites dites de transversalité) et donnez l'expression du gradient du critère en fonction de p .
2. Démontrez que la commande optimale u^* est une commande bang-bang et qu'il y a au plus une commutation.
3. Montrez que quand la commande u est constante et égale à une valeur u_c , la trajectoire dans le plan (y_1, y_2) est une parabole de sommet $(\frac{u_c}{2}, u_c)$. Tracez ces trajectoires pour la commande en butée et indiquez, en le justifiant, le sens de parcourt.
4. Construire, et justifier, la courbe de commutation. Donnez la loi de commande de feedback.