Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2005-2006
MACS-3
C. Basdevant

Examen d'Analyse Numérique du mercredi 8 février 2006

Durée : 3h
Notes de cours autorisées

Exercice 1

Déterminez les fonctions $y(t)$, définies sur $[-\pi, +\pi]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, nulles en π et $-\pi$, réalisant les extrema de :

$$\int_{-\pi}^{\pi} y(t)\sin(t)dt$$

et vérifiant : $|y'(t)| \leq 1$.

Exercice 2

On considère le système dynamique dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \\ \dot{y} = u_2 \end{cases}$$

dans lequel les commandes u_1 et u_2 vérifient $|u_i| \leq 1$.
Déterminez la commande optimale pour un retour en $x = 0, y = 0$ en temps minimal.

Problème

On envisage le problème de l'atterrissage en douceur d'un véhicule spatial sur une aire plane d'un corps céleste privé d'atmosphère, par exemple la Lune.

Le véhicule est supposé suivre une trajectoire rectiligne perpendiculaire à la surface de la Lune. $m(t)$ est la masse du véhicule et $x(t)$ sa distance à la surface à l'instant t. Les équations du système sont les suivantes :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = ku - \gamma m \\ \dot{m} = -u \end{cases}$$

γ est l'accélération de la gravité lunaire (constante), k la constante de poussée et $u(t)$, la commande, est la consommation instantanée de carburant qui est bornée par $0 \leq u(t) \leq U$ (U étant une constante donnée).

L'objectif est un alunissage en douceur minimisant la consommation totale de carburant, le temps nécessaire T à cette opération n'étant pas fixé.
On notera x_0 la position initiale du véhicule ($x_0 > 0$), x_1 sa vitesse initiale et m_0 sa masse initiale. On résoudra dans la suite ce problème par la méthode de Pontryagin.

1. Formulez le problème sous la forme d'un problème de contrôle optimal pour un système dynamique d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^3$ dont la fonction coût est $J(u) = m_0 - m(T)$.
2. Formez le hamiltonien du système et les équations de l'état adjoint $p = (p_1, p_2, p_3)$.
3. En utilisant les conditions aux limites en T et la condition d'optimalité montrez que la commande optimale est bang-bang, sa valeur étant déterminée par le signe de la quantité :
$$\psi(t) = p_2 \frac{k}{m} - p_3$$
.
4. Calculez $\dot{\psi}$ et montrez que $\psi(T)u(T) = \gamma p_2(T)$.
5. Des résultats précédents déduisez que la commande optimale est d'une des formes suivantes :
   – $u(t) = 0 \quad \forall t$,
   – $u(t) = U \quad \forall t$,
   – $u(t) = 0 \quad 0 \leq t \leq \tau$ et $u(t) = U \quad \tau < t < T$,
   – $u(t) = U \quad 0 \leq t \leq \tau$ et $u(t) = 0 \quad \tau < t < T$.
   On éliminera deux de ces quatre scénarios pour une raison physique simple.
6. Formez l'équation qui donne le temps de commutation τ en fonction de x_0 et x_1.
7. Reprendre le problème pour la fonction coût
$$G(u) = \alpha(m_0 - m(T)) + \beta T + \gamma \int_0^T u^2(s)ds$$
-