Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2008-2009
MACS 3 & M2 Math-Info
C. Basdevant

Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique
du mardi 18 novembre 2008

Durée : 3 h
Aucun document n'est autorisé

Exercice

On considère un véhicule dont la position $x(t) \in \mathbb{R}$ est déterminée par l'équation différentielle :

$$\dot{x}(t) = -a\,x(t) + u(t), \quad x(0) = x_0, \quad \text{avec} \quad |u(t)| \leq 1$$

où $a > 0$ est une constante. Pour $T > 0$ fixé on veut atteindre l'état $x(T) = 0$ en minimisant

$$J(u) = \int_0^T |u(t)| dt$$

1. Déterminez les équations adjointes de ce problème de contrôle. A l'aide du principe du minimum de Pontryaguin montrez que le contrôle optimal est nécessairement de l'une des formes suivantes :

$$(-1), \quad (0, -1), \quad (0, 1), \quad (1), \quad (0)$$

Indication : Pour déterminer les contrôles possibles, on tracera d'abord le graphe de la fonction $f(u) = |u| + pu$ pour les cas $p < -1$, $-1 < p < 1$ et $p > 1$ puis on discutera suivant les valeurs possibles de l'état adjoint.

Corrigé : Le Hamiltonien du système s'écrit $H(x, p, u, t) = |u| + p(u - ax)$ et l'équation adjointe $\dot{p} = ap$; celle-ci s'intègre en $p(t) = \alpha \exp(at)$ avec α une constante inconnue. Etat et temps finaux (comme initiaux) étant fixés, il n'y a pas de condition de transversalité. Le contrôle optimal minimise le Hamiltonien à chaque instant soit :

$$u = \arg \min_{-1 \leq v \leq 1} (|v| + pv)$$

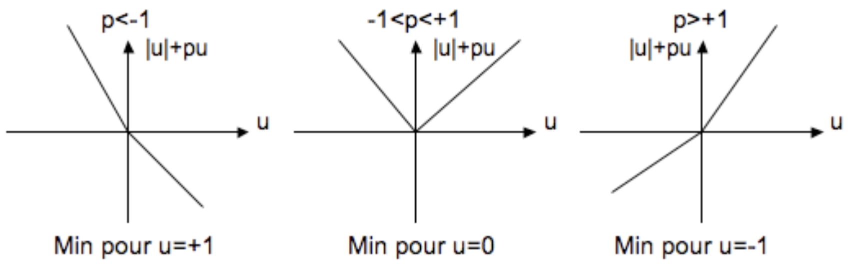
En distinguant d'une part $u < 0$ et $u > 0$ et d'autre part $p < -1$, $-1 < p < 1$ et $p > 1$ on obtient les formes schématisées sur la figure suivante pour la fonction $|u| + pu$. Il faut alors discuter le comportement de l'état adjoint p suivant la valeur de la constante inconnue α :

(a) Si $\alpha < -1$, $p(t)$ est toujours inférieur à -1, alors $u(t) = 1$, $\forall t$.

(b) Si $-1 < \alpha < 0$, $p(t)$ décroît depuis la valeur $\alpha < 0$, on aura soit $u(t) = 0$, $\forall t$ si $p(t)$ reste toujours supérieur à -1, soit une commutation de $u(t) = 0$ à $u(t) = 1$.

(c) Si $0 < \alpha < 1$, $p(t)$ croît depuis la valeur $\alpha > 0$, on aura soit $u(t) = 0$, $\forall t$ si $p(t)$ reste toujours inférieur à 1, soit une commutation de $u(t) = 0$ à $u(t) = -1$.

(d) Si $\alpha > 1$, $p(t)$ est toujours supérieur à $+1$, on aura $u(t) = -1$, $\forall t$.



2. On suppose $|x_0| \leq \frac{1}{a}\left(e^{aT}-1\right)$. Déterminez la solution optimale en distinguant les cas $x_0 > 0$ et $x_0 < 0$.

   Corrigé : Examinons les différents contrôle optimaux possibles :

   (a) Si $u(t) = 1\ \forall t$, comme $x(T) = 0$ on obtient $x(t) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{a(T-t)}\right)$, cela correspond à la valeur initiale limite $x_0 = \frac{1}{a}\left(1 - e^{aT}\right) < 0$.

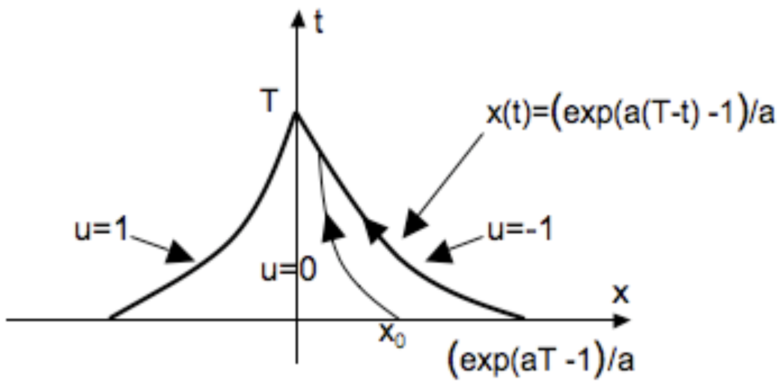
   (b) Si $u(t) = 0\ \forall t$, $x(t) = x_0 e^{-at}$, on ne peut avoir $x(T) = 0$ que si $x_0 = 0$.

   (c) Si $u(t) = -1\ \forall t$, comme $x(T) = 0$ on obtient $x(t) = \frac{1}{a}\left(e^{a(T-t)} - 1\right)$, cela correspond à la valeur initiale limite $x_0 = \frac{1}{a}\left(e^{aT} - 1\right) > 0$.

   (d) Si $u(t) = 0$ puis $u(t) = -1$ cela correspond à un état initial $0 < x_0 < \frac{1}{a}\left(e^{aT} - 1\right)$ avec une commutation sur la courbe $x(t) = \frac{1}{a}\left(e^{a(T-t)} - 1\right)$. Voir la figure suivante.

   (e) Si $u(t) = 0$ puis $u(t) = 1$ on est dans le cas symétrique avec $x_0 < 0$.

   La loi de commande du système est donc $u = 0$ sous les courbes $x(t) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{a(T-t)}\right)$ pour $x < 0$ et $x(t) = \frac{1}{a}\left(e^{a(T-t)} - 1\right)$ pour $x > 0$, avec commutation à $u = \pm 1$ quand la trajectoire atteint l'une de ces courbes limite.



3. Que peut-on dire quand $x_0 > \frac{1}{a}\left(e^{aT} - 1\right)$?

   Corrigé : Quand $x_0 > \frac{1}{a}\left(e^{aT} - 1\right)$ la décroissance la plus rapide est avec $u = -1$ et il n'est pas possible d'atteindre $x(T) = 0$, on dit que le système n'est pas commandable. De même, mutadis mutandis, pour $x_0 < 0$.

Problème

INTRODUCTION

On considère un nageur se déplaçant dans une rivière rectiligne de largeur $2L$. La rivière $\mathcal{R}$, supposée infinie dans la direction x, occupe la bande $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq y \leq 2L\}$, voir Figure 1. En un point $(x, y) \in \mathcal{R}$ la vitesse du courant est parallèle aux rives et égale à $(U(y), 0)$. La vitesse du nageur par rapport à l'eau est de module v (fixé, constant) et fait un angle θ (variable, à déterminer) avec la rive. Le nageur sera repéré par ses coordonnéees (x, y) par rapport à un point fixe O de la rive Sud, elles satisfont :

$$\begin{cases} \dot{x} = U(y) + v\cos\theta \\ \dot{y} = v\sin\theta \end{cases} \tag{1}$$

L'objet du problème est d'étudier différentes trajectoire optimales du nageur en un sens que l'on précisera. La commande que le nageur peut choisir à chaque instant est le cap θ de sa vitesse relative.

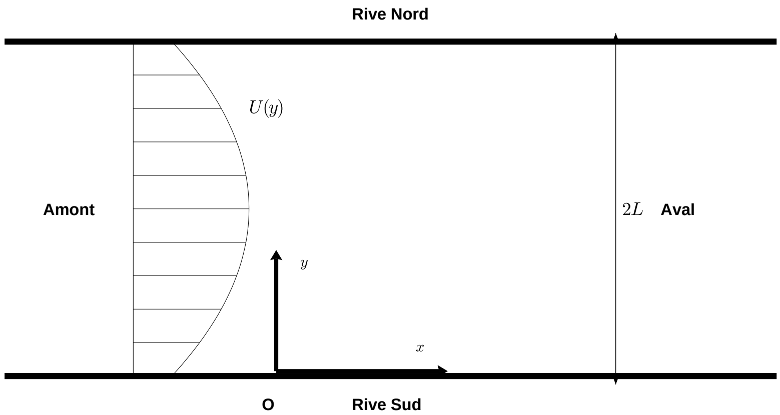


FIG. 1 – Le cadre mathématique

On supposera dans toute la suite que v et L sont des paramètres positifs fixés et que la fonction $U(y)$ est donnée, de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante sur l'intervalle $[0, L]$ et symétrique sur $[L, 2L]$:

$$U(2L - y) = U(y), \quad \forall y \in [0, L] \tag{2}$$

PREMIERE PARTIE

On suppose dans cette partie que :

$$U(0) = \min_{y\in[0,2L]} U(y) > v \tag{3}$$

de sorte que le nageur est nécessairement emporté vers l'aval ($\dot{x} > 0, \forall\theta$). On suppose aussi que la position (x_0, y_0) du nageur à l'instant initial $t = 0$ satisfait $x_0 < 0$. On va étudier le problème de commande optimale suivant : appelant $T > 0$ l'instant (libre) où le nageur franchit la ligne $x = 0$, soit $(x(T), y(T)) = (0, y(T))$, on veut minimiser le critère :

$$J(\theta) = |L - y(T)| \tag{4}$$

Profitant de la symétrie du problème par rapport à la droite $y = L$, on restreint l'étude à la moitié Sud de la rivière : on supposera donc que $0 \leq y_0 \leq L$ et on écrira le critère $J(\theta) = L - y(T)$ (voir Figure 2).

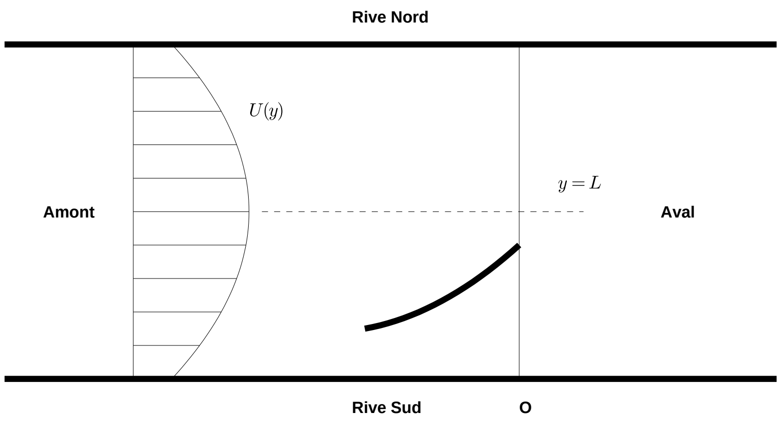


FIG. 2 – Premier problème de commande

1. Soit $V(x, y, t)$ la fonction de Bellman, rappelez sa définition (c'est à dire ce qu'elle représente) et l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman pour ce problème, n'oubliez pas la condition aux limites.

   Corrigé : La fonction de Bellman $V(x, y, t)$ représente la valeur optimale du critère J pour la trajectoire partant à l'instant t de la position (x, y) (avec $x < 0$ et $y \leq L$) et arrivant sur la cible c'est à dire à $x = 0$ à un temps T libre. Une condition suffisante d'existence d'une commande optimale est l'existence d'une solution V de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman.
   L'équation HJB s'écrit dans les notations du cours :

   $$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_{\theta} \left(L + (V_y, f)\right) = 0, \quad V = \lambda \quad \text{sur la cible}$$

   Ici L=0, $f = (U(y) + v\cos\theta, v\sin\theta)$, et $\lambda = L - y$, soit :

   $$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + \min\limits_{\theta} \left\{ \dfrac{\partial V}{\partial x}(U(y) + v\cos\theta) + \dfrac{\partial V}{\partial y} v \sin\theta \right\} = 0 \\ V(0, y, T) = L - y \quad \forall y \in [0, L], \quad \forall T > 0 \end{cases}$$

2. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$ et $\theta \in \mathbb{R}$, considérons le Hamiltonien :

   $$H(x, y, p_x, p_y, \theta, t) = p_x(U(y) + v\cos\theta) + p_y v \sin\theta \tag{5}$$

   Calculez $H^*(x, y, p_x, p_y, t) = \min_\theta H(x, y, p_x, p_y, \theta, t)$ et précisez, en donnant l'expression de $\cos\theta^*$ et $\sin\theta^*$, la valeur θ^* de θ pour laquelle ce minimum est atteint.

   Corrigé :

   $$\frac{\partial H}{\partial \theta} = -p_x v \sin\theta + p_y v \cos\theta, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} = -p_x v \cos\theta - p_y v \sin\theta$$

   Le minimum de H est atteint pour θ^* tel que $\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$ et $\frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} \geq 0$.
   La première condition donne $\cos\theta^* = \alpha\, p_x$ et $\sin\theta^* = \alpha\, p_y$ avec $\alpha^2(p_x^2 + p_y^2) = 1$, en reportant dans la deuxième condition on détermine le signe de α, soit :

   $$\cos\theta^* = -\frac{p_x}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} \qquad \sin\theta^* = -\frac{p_y}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}$$

   Ce qui donne pour H^* : $H^*(x, y, p_x, p_y, t) = p_x U(y) - v\sqrt{p_x^2 + p_y^2}$.

3. En observant qu'une forme équivalente de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman s'écrit :
$$\frac{\partial V}{\partial t} + H^*(x, y, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, t) = 0$$
montrez que dans ce problème la fonction de Bellman V ne dépend pas du temps et que son équation se réduit à :
$$-v\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2} + U(y)\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \tag{6}$$
avec une condition aux limites que l'on précisera.

Corrigé : On a bien ici :
$$H^*(x, y, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, t) = \min_{\theta}\left(L + (V_y, f)\right),$$
d'où la forme équivalente de l'équation HJB.
Comme H et H^* ne dépendent pas du temps, V est indépendant du temps et l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman se réduit à $H^*(x, y, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}) = 0$, soit la forme indiquée. Quant à la condition aux limites sur la cible elle est $V = \lambda$ soit :
$$V(0, y) = L - y, \quad \forall y \in [0, L]$$

4. Montrez que sur le segment $\{x = 0,\ 0 \le y \le L\}$ on a :
$$\frac{\partial V}{\partial y}(0, y) = -1, \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial x}(0, y) = \frac{v}{\sqrt{U(y)^2 - v^2}}$$
Indication : pour choisir le signe de $\frac{\partial V}{\partial x}(0, y)$ on observera d'une part que V est constant le long d'une trajectoire optimale et que d'autre part $V(x_0, y_0)$ sera, pour x_0 petit et négatif, inférieur à $V(0, y_0)$ pour une raison que l'on expliquera.

Corrigé : Sur le segment $[0, L]$ on a $V(0, y) = L - y$ et donc $\frac{\partial V}{\partial y}(0, y) = -1$ et d'après l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman :
$$\frac{\partial V}{\partial x}U(y) = v\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + 1} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial V}{\partial x}(0, y) = \pm\frac{v}{\sqrt{U(y)^2 - v^2}}$$
Si le nageur part d'une position (x_0, y_0) avec $x_0 < 0$ petit, il pourra nager un peu vers le centre de la rivière et donc améliorer le critère J en arrivant en $y_1 > y_0$ avec $V(0, y_1) = V(x_0, y_0) < V(0, y_0)$ pour $x_0 < 0$ petit, on en déduit que le signe dans l'expression de $\frac{\partial V}{\partial x}(0, y)$ est le signe positif.

5. On va montrer l'existence d'une solution $\mathcal{C}^1$ de l'équation HJB (6) dans un certain domaine inclus dans $\mathcal{R}$.

Pour $Y_0 \in [0, L]$, on considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{ds} = U(Y) - v\dfrac{\nu_x}{\sqrt{\nu_x^2+\nu_y^2}}, & X(0) = 0 \\ \dfrac{dY}{ds} = -v\dfrac{\nu_y}{\sqrt{\nu_x^2+\nu_y^2}}, & Y(0) = Y_0 \\ \dfrac{d\nu_x}{ds} = 0, & \nu_x(0) = \dfrac{v}{\sqrt{U(Y_0)^2 - v^2}} \\ \dfrac{d\nu_y}{ds} = -U'(Y)\nu_x, & \nu_y(0) = -1 \end{cases} \tag{7}$$

où les inconnues sont les quatre fonctions $X(s), Y(s), \nu_x(s)$ et $\nu_y(s)$, pour $s \leq 0$. On note $I_0 =]s_0, 0[$ un intervalle maximal sur lequel ces fonctions sont définies (avec $s_0 < 0$ d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz). On appellera C_{Y_0} la courbe $\{(X(s), Y(s)), s \in I_0\}$.
Montrez que les relations suivantes sont vraies pour tout $s \in I_0$:

$$-v\sqrt{\nu_x(s)^2 + \nu_y(s)^2} + U(Y(s))\,\nu_x(s) = 0, \tag{8}$$

$$\nu_x(s)\frac{dX}{ds} + \nu_y(s)\frac{dY}{ds} = 0 \tag{9}$$

Corrigé : Pour vérifier la relation (8) on vérifie d'une part qu'elle est vraie pour $s = 0$ et d'autre part que la dérivée par rapport à s de l'expression est nulle. La relation (9) se vérifie en remplaçant $\frac{dX}{ds}$ et $\frac{dY}{ds}$ par leurs expressions données dans (7), on retombe alors sur la relation (8).

6. Montrez que la courbe C_{Y_0} peut être définie par l'équation différentielle :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{v}{\sqrt{U(Y)^2 - v^2}} \tag{10}$$

avec la donnée initiale $Y(X = 0) = Y_0$.
Indication : on vérifiera que $\nu_x > 0$. Puis, comme par hypothèse $U(y) > v$, de (8) on déduira que ν_y ne s'annule pas et, avec (7), que $\nu_y < 0$. Ceci permet de tirer ν_y de (8) et de le reporter dans $\frac{dY}{ds}$ et $\frac{dX}{ds}$. Enfin, cette dernière quantité étant strictement positive, on peut faire le quotient pour obtenir $\frac{dY}{dX}$.

Corrigé : De (7) on obtient que $\nu_x > 0$. De (8) on tire $\nu_y^2 = \nu_x^2 \frac{U(y)^2 - v^2}{v^2}$. Comme $U(y) > v$, ν_y ne s'annule pas et sachant que $\nu_y(0) = -1$, on en déduit que $\nu_y < 0$ et donc

$$\nu_y = -\nu_x \frac{\sqrt{U(y)^2 - v^2}}{v}$$

En reportant dans $\frac{dX}{ds}$ et $\frac{dY}{ds}$ on obtient :

$$\frac{dX}{ds} = \frac{U(y)^2 - v^2}{U(y)}, \quad \frac{dY}{ds} = \frac{v}{U(y)}\sqrt{U(y)^2 - v^2}$$

Comme $\frac{dX}{ds} > 0$, on peut diviser par cette quantité pour obtenir (10).

7. Montrez que la courbe C_{Y_0} coupe l'axe Ox en un point $(X_0, 0)$ avec $X_0 < 0$ (indication : on montrera que la courbe C_{Y_0} est une fonction de X qui est croissante et concave, avec $\frac{dY}{dX}$ minoré par une constante positive). Vérifiez aussi que deux courbes C_{Y_0} et C_{Y_1} avec $Y_0 \neq Y_1$ ne se coupent pas.

   Corrigé : On déduit de (10) que C_{Y_0} est une fonction de X qui est croissante ($\frac{dY}{dX} > 0$) et concave ($\frac{dY}{dX}$ diminue quand Y augmente). Comme $\frac{dY}{dX}$ est minoré par une constante positive ($\frac{v}{\sqrt{U(L)^2 - v^2}}$) la courbe C_{Y_0} coupe l'axe Ox en un point $(X_0, 0)$ avec $X_0 < 0$. L'équation (10) étant un problème de Cauchy bien posé pour une donnée initiale (X_a, Y_a) quelconque (avec $X_a \leq 0$ et $0 \leq Y_a \leq L$), deux courbes C_{Y_0} et C_{Y_1} avec $Y_0 \neq Y_1$ ne se coupent pas.

8. On admet que, lorsque Y_0 décrit l'intervalle $[0, L]$, l'ensemble des courbes C_{Y_0} remplit tout le domaine fermé $\mathcal{D}$ compris entre la courbe C_L et l'axe Ox (voir figure 3). On peut alors definir une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dans le domaine $\mathcal{D}$ en disant que V prend la valeur de la constante $L - Y_0$ sur toute la courbe C_{Y_0}, pour tout $Y_0 \in [0, L]$.

   Déduire des questions précédentes que V est la solution cherchée de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (6) dans $\mathcal{D}$ (indication : on montrera que le gradient de V est colinéaire à (ν_x, ν_y) dans $\mathcal{D}$), et que les courbes C_{Y_0}, pour tout $Y_0 \in [0, L]$ sont les trajectoires optimales du problème de commande defini par le critère (4).

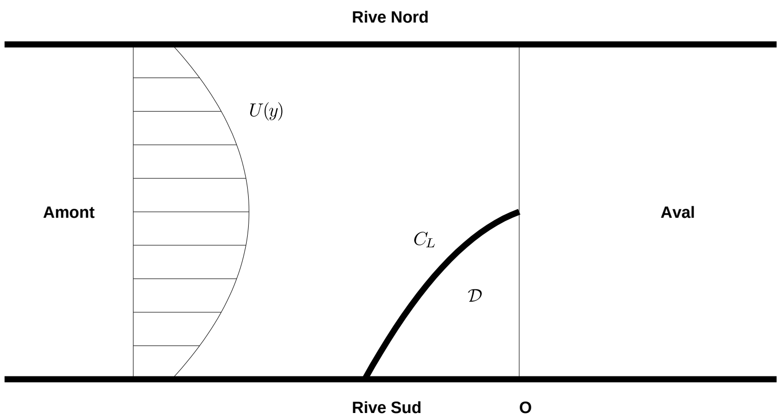


FIG. 3 – Le domaine $\mathcal{D}$

Corrigé : Posons $V(x, y) = L - Y_0$ si $(x, y) \in \mathcal{D}$ et appartient à la courbe C_{Y_0}, comme deux courbes ne se coupent pas V est bien ainsi défini de manière unique. V est constant le long de la courbe C_{Y_0}, son gradient est donc normal à la courbe et d'après (9) il est parallèle à (ν_x, ν_y) et donc d'après (8) on voit que V satisfait à l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (6).
L'existence d'une solution de l'équation HJB étant une condition suffisante, le problème de commande optimale a une solution dans $\mathcal{D}$. Les trajectoires optimales sont les courbes C_{Y_0} sur lesquelles V est constant. En d'autres termes, si le point (x_0, y_0) est sur la courbe C_{Y_0}, alors la position $(x(t), y(t))$ du nageur à l'instant t est donnée par :

$$x(T + s) = X(s), \quad y(T + s) = Y(s) \quad \forall s \in [-T, 0]$$

9. Lorsque la position initiale (x_0, y_0) du nageur est dans le domaine $\mathcal{D}$ montrez les propriétés suivantes de la trajectoire optimale :
   (a) La vitesse relative du nageur (par rapport à l'eau) est constamment orthogonale à sa vitesse absolue (par rapport à la rive).
   (b) La vitesse relative du nageur (par rapport à l'eau) est toujours dirigée vers l'amont et le nord.
   (c) Le cap $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ décroit au cours du temps.

   Indication : la vitesse relative est $(v \cos\theta^*, v \sin\theta^*)$ comme calculé à la deuxième question, on tiendra compte également de la monotonie et concavité de la courbe C_{Y_0}.

   Corrigé : D'après la deuxième question la vitesse relative sur la trajectoire optimale est donnée par :

$$v\cos\theta^* = -\frac{vV_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} \quad v\sin\theta^* = -\frac{vV_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}$$

   Elle est donc parallèle, mais opposée au gradient de V. Puisque V est constant le long d'une trajectoire optimale, la vitesse relative est orthogonale à la trajectoire optimale (et donc à la vitesse absolue) et dirigée vers les y positifs (puisque le gradient de V est dirigé vers les y négatifs). Compte tenu de la monotonie et de la concavité des courbes C_{Y_0}, elle est dirigée vers l'amont et le nord (monotonie) et le cap décroît avec le temps (concavité).
   On peut aussi remarquer, en utilisant la relation (8), que l'on obtient le cap optimal θ^* sous la forme d'une loi de feedback :

$$\cos\theta^* = -\frac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} = -\frac{v}{U(y)}$$

10. Si la position initiale (x_0, y_0) du nageur n'est pas dans $\mathcal{D}$ (mais satisfait toujours $x_0 < 0$) existe-t-il une trajectoire optimale au sens du critère (4) ? Vous illustrerez votre réponse avec un dessin.

    Corrigé : Si la position initiale du nageur n'est pas dans $\mathcal{D}$, le nageur peut atteindre le point $(0, L)$ et réaliser $J = 0$, mais la trajectoire optimale n'est pas unique. Exemple partant d'un point quelconque M le nageur pourra suivre une trajectoire C'_L parallèle à C_L, puis la quitter quand il le voudra en se laissant porter par le courant ($\theta = 0$) pour rejoindre la courbe optimale C_L et la suivre ensuite (voir Figure 4).

DEUXIEME PARTIE

On suppose dans cette partie qu'une île rectiligne (infiniment mince !) est située au milieu de la rivière, le long du segment AB indiqué sur la figure 5. Les coordonnées des points A et B sont respectivement $(0, l)$ et$(0, 2L - l)$, où $l \in]0, L[$ est fixé. On suppose que la présence de l'île n'affecte pas le courant et que la condition (3) est vérifiée.

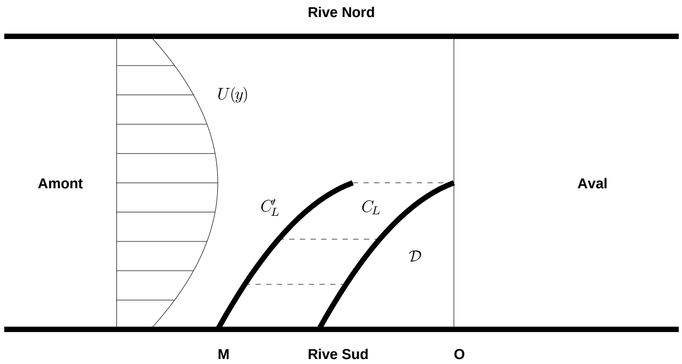


FIG. 4 – Différentes trajectoires optimales possibles depuis M

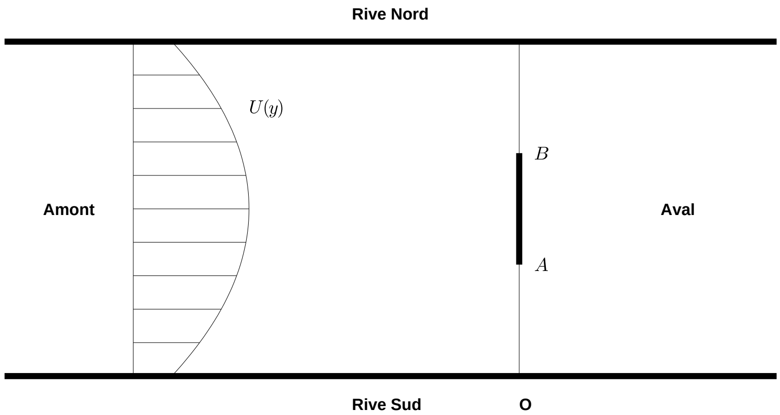


FIG. 5 – L'île AB

1. Définissez le domaine $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}$ des positions initiales à partir desquelles le nageur peut atteindre l'île (supposée fermée). Vous préciserez en particulier ce que doit être le comportement du nageur qui cherche à atteindre l'île si sa position initiale est située sur la frontière de $\mathcal{E}$.

   Corrigé : Le domaine des positions $\mathcal{E}$ initiales à partir desquelles le nageur peut atteindre l'île est déterminé par le segment AB, la courbe C_A trajectoire optimale arrivant en A et sa symétrique C_B arrivant en B et les rives (voir Figure 6). Si le nageur est sur la courbe C_A il doit sans arrêt nager avec la commande optimale de la première partie. De tout autre point de $\mathcal{E}$ il a le choix entre plusieurs trajectoires pour atteindre l'île.

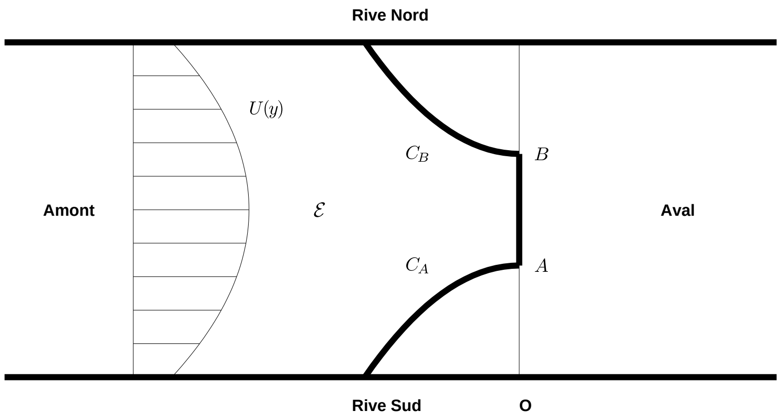


FIG. 6 – Le domaine $\mathcal{E}$

2. On suppose que la position initiale du nageur est située sur la courbe C_L de la figure 3. D'après la première partie le nageur peut suivre cette courbe pour atteindre le milieu du segment AB. Cette trajectoire lui permet-elle de rejoindre l'île en temps minimal depuis sa position de départ ?

   Corrigé : Si le nageur suit la courbe C_L il n'atteint pas l'île en temps minimal. En effet on a vu dans la première partie qu'il nage constamment à contre courant ($\cos\theta* < 0$) le long de C_L ; alors qu'en suivant C_L jusqu'à l'ordonnée l, puis en nageant dans le sens du courant ($\cos\theta = 1$) il arriverait plus rapidement sur l'île.

Questions supplémentaires n'ayant pas fait partie de l'examen

TROISIEME PARTIE

On s'intéresse dans cette partie à un problème de commande optimale différent. On suppose que le nageur est initialement en un point quelconque (x_0, y_0) de $\mathcal{R}$ et qu'il cherche à atteindre la rive Sud le plus en amont possible. Notant $T > 0$ l'instant (libre) auquel le nageur atteint la rive et $(x(T), 0)$ sa position au temps T, on veut donc maintenant minimiser le critère :

$$J(\theta) = x(T) \tag{11}$$

On suppose toujours que la condition (3) est vérifiée, et on reprend une démarche semblable à celle de la première partie.

1. Montrez que l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman de ce problème prend encore la forme (6) et précisez les valeurs de V, $\frac{\partial V}{\partial x}$ et $\frac{\partial V}{\partial y}$ en tout point de l'axe Ox.

   Corrigé : Par rapport à la première partie, le seul changement est celui du critère J et donc de la condition aux limites sur la cible pour V. La forme (6) de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman reste donc valable, mais avec la condition sur la rive Sud $V(x, 0) = x$. On en déduit $\frac{\partial V}{\partial x}(x, 0) = 1$, et de (6) on peut tirer $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2$. Maintenant pour déterminer le signe de $\frac{\partial V}{\partial y}(x, 0)$, considérons un point (x, y) avec $y > 0$ petit, comme le courant est plus fort que le nageur ($U(y) > v$), le nageur partant de (x, y) sera nécessairement déporté vers l'aval et ne pourra atteindre la rive qu'en un point $x' > x$, et donc $V(x, y) > V(x, 0)$. Le signe de la dérivée partielle est donc le signe positif.

$$\frac{\partial V}{\partial y}(x, 0) = \frac{\sqrt{U(0)^2 - v^2}}{v}$$

2. Pour $X_0 \in \mathbb{R}$ considérez le système :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{ds} = U(Y) - v\dfrac{\nu_x}{\sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2}}, & X(0) = X_0 \\ \dfrac{dY}{ds} = -v\dfrac{\nu_y}{\sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2}}, & Y(0) = 0 \\ \dfrac{d\nu_x}{ds} = 0, & \nu_x(0) = 1 \\ \dfrac{d\nu_y}{ds} = -U'(Y)\nu_x, & \nu_y(0) = \dfrac{\sqrt{U(Y_0)^2 - v^2}}{v} \end{cases} \tag{12}$$

où les inconnues sont les quatre fonctions $X(s), Y(s), \nu_x(s)$ et $\nu_y(s)$ pour $s \leq 0$. On note $I_0 =]s_0, 0[$ un intervalle maximal sur lequel ces fonctions sont définies (avec $s_0 < 0$ d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz). On appellera F_{X_0} la courbe $\{(X(s), Y(s)), s \in I_0\}$.
Montrez que les relations (8) et (9) sont aussi valables pour ce système pour tout $s \in I_0$.

Corrigé : Le système (12) ne diffère du système (7) que par les conditions initiales en $s = 0$. Pour vérifier (8), dont la dérivée par rapport à s est nulle, il suffit donc de vérifier que cette relation est bien vraie en $s = 0$. La relation (9) s'en déduit comme dans la première partie : la substitution dans (9) des expressions de $\frac{dX}{ds}$ et $\frac{dY}{ds}$ données dans (12) conduit à (8) .

3. Démontrez que la courbe F_{X_0} peut être définie par l'équation différentielle :

$$\frac{dX}{dY} = -\frac{\sqrt{U(Y)^2 - v^2}}{v}, \quad X(Y = 0) = X_0 \tag{13}$$

Corrigé : Comme pour la question 6, de (12) on obtient que $\nu_x > 0$. De (8) on tire $\nu_y^2 = \nu_x^2 \frac{U(y)^2 - v^2}{v^2}$. Comme $U(y) > v$, ν_y ne s'annule pas et sachant que $\nu_y(0) > 0$, on en déduit que $\nu_y > 0$ et donc

$$\nu_y = \nu_x \frac{\sqrt{U(y)^2 - v^2}}{v}$$

En reportant dans $\frac{dX}{ds}$ et $\frac{dY}{ds}$ on obtient :

$$\frac{dX}{ds} = \frac{U(y)^2 - v^2}{U(y)}, \quad \frac{dY}{ds} = -\frac{v}{U(y)}\sqrt{U(y)^2 - v^2}$$

Comme $\frac{dY}{ds} \neq 0$, on peut diviser par cette quantité pour obtenir l'expression (13).

4. Montrez que les courbes F_{X_0} vont de la rive Nord à la rive Sud et qu'elles se déduisent les unes des autres par des translations parallèles à l'axe $0x$. En déduire l'existence d'une solution $\mathcal{C}^1$ de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (6) dans $\mathcal{R}$ et que pour toute position initiale il existe une trajectoire optimale pour le critère (11) .

Corrigé : De (13) on déduit que F_{X_0} est une fonction strictement décroissante de Y avec une dérivée majorée par une constante strictement négative ($\frac{dX}{dY} < -\frac{\sqrt{U(0)^2 - v^2}}{v}$), elle traverse donc la rivière de la rive Nord à la rive Sud. Il est clair que si la courbe $X(Y)$ est solution de (13) avec $X(0) = X_0$, la courbe $X(Y) + \Delta$ est solution de (13) avec $X(0) = X_0 + \Delta$, ce qui prouve que les solutions de (13) se déduisent les unes des autres par translations parallèles à l'axe Ox et que ces courbes remplissent l'espace $\mathcal{R}$ (voir Figure 7). La comparaison des équations (10) et (13) montre aussi que les courbes F_X se déduisent de la courbe C_L par symétries par rapport à des parallèles à l'axe Oy.
Posons $V(x, y) = X_0$ si $(x, y) \in \mathcal{R}$ et appartient à la courbe F_{X_0}, V est bien ainsi défini de façon unique et constant le long de la courbe F_{X_0}. Son gradient est donc normal à la courbe et d'après (9) il est parallèle à (ν_x, ν_y) et donc d'après (8) V satisfait à l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (6). L'existence d'une solution de l'équation HJB étant une condition suffisante, le problème de commande optimale a une solution dans $\mathcal{R}$. Les trajectoires optimales sont les courbes F_{X_0} sur lesquelles V est constant.

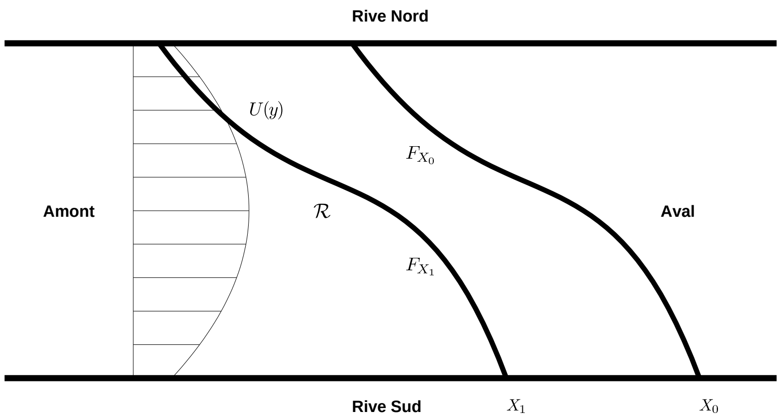


FIG. 7 – Trajectoires optimales F_X

5. Montrez les propriétés suivantes des trajectoires optimales :
   (a) La vitesse relative du nageur (par rapport à l'eau) est constamment orthogonale à sa vitesse absolue (par rapport à la rive).
   (b) La vitesse relative du nageur (par rapport à l'eau) est toujours dirigée vers l'amont et le sud.
   (c) Le cap $\theta \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[$; il décroit au cours du temps quand le nageur est dans la moitié sud de la rivière.

Corrigé : D'après la deuxième question la vitesse relative sur la trajectoire optimale est donnée par :

$$v\cos\theta^* = -\frac{vV_x}{\sqrt{V_x^2+V_y^2}} \qquad v\sin\theta^* = -\frac{vV_y}{\sqrt{V_x^2+V_y^2}}$$

Elle est donc parallèle, mais opposée au gradient de V. Puisque V est constant le long d'une trajectoire optimale, la vitesse relative est orthogonale à la trajectoire optimale (et donc à la vitesse absolue) et dirigée vers les x négatifs (puisque le gradient de V est dirigé vers les x positifs). La courbe F_{X_0} étant strictement décroissante (en Y) la vitesse relative est dirigée vers l'amont et le sud. La courbe $Y(X)$ est concave pour $0 < Y < L$ et convexe pour $L < Y < 2L$ (voir $\frac{d^2Y}{dX^2}$), on en déduit que le cap croît dans la moitié nord de la rivière puis décroît dans la moitié sud.
La croissance ou décroissance du cap sur la trajectoire optimale se retrouve sur la loi de feedback obtenue de la relation (8) :

$$\cos\theta^* = -\frac{V_x}{\sqrt{V_x^2+V_y^2}} = -\frac{v}{U(y)}$$

QUATRIEME PARTIE

On s'intéresse maintenant au même problème que dans la troisième partie (rejoindre la rive Sud le plus en amont possible), mais on suppose maintenant que :

$$U(0) = \min_{y\in[0,2L]} U(y) = v \tag{14}$$

On suppose également que la quantité $\sqrt{U(y)^2 - v^2}$ admet au voisinage de $y = 0$ le développement limité suivant :

$$\sqrt{U(y)^2 - v^2} = K\, y^\alpha + o(y^\alpha) \tag{15}$$

où α et K désignent deux constantes positives.

1. Montrez, en s'appuyant sur les résultats de la troisième partie, que le nageur partant de la position (x_0, y_0) ne pourra pas atteindre les points de la rive Sud situés sous la courbe $S = \{(x(t), y(t))\}$, passant par (x_0, y_0) et vérifiant :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{U(y)^2 - v^2}{U(y)}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{v}{U(y)}\sqrt{U(y)^2 - v^2}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{v}{\sqrt{U(y)^2 - v^2}} \tag{16}$$

   Précisez l'allure de la tangente à la courbe S au point où elle rejoint la rive Sud. Indication : on pourra considérer le problème de commande optimal consistant à rejoindre le plus en amont possible la droite $y = \hat{y} \in]0, y_0[$.

   Corrigé : Puisque $U(\hat{y}) > v$, le problème de commande optimal consistant à rejoindre le plus en amont possible la droite $y = \hat{y} \in]0, y_0[$ est le même que celui de la troisième partie, à la position de la rive Sud près. D'après les résultats précédents sa trajectoire optimale est bien la courbe S définie dans (16), laquelle courbe ne dépend pas de $\hat{y}$. Ceci prouve que le nageur ne pourra atteindre aucun point sous la courbe S. La courbe S étant monotone et concave au voisinage de la rive Sud, on déduit facilement de (15) et (16) que la courbe S atteint l'axe Ox en un point X_0 en lequel sa tangente est verticale (voir Figure 8). Le nageur ne peut donc atteindre aucun point de la rive en amont de X_0.

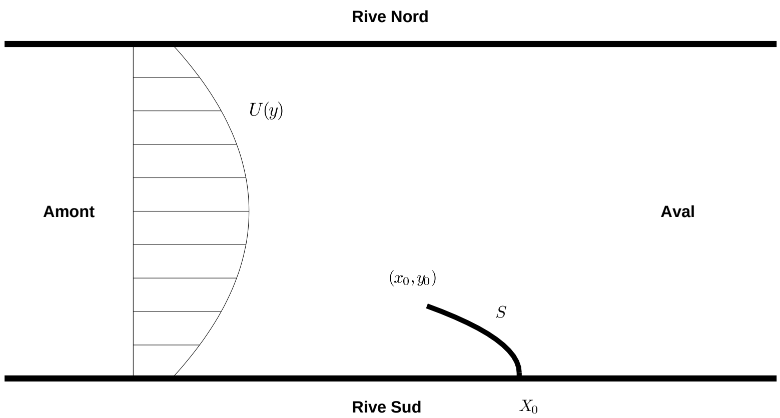


FIG. 8 – La courbe S

2. Dans le cas $\alpha < 1$ montrez que, quelle que soit la position initiale dans $\mathcal{R}$, la courbe S est la trajectoire optimale qui permet au nageur de rejoindre la rive Sud en minimisant le critère (11). Indication : on montrera que le temps mis par le nageur pour passer de l'ordonnée y_0 à $y_1 > 0$ est borné quand y_1 tend vers 0.

   Corrigé : Dans le cas $\alpha < 1$ il faut vérifier que la courbe S permet au nageur de rejoindre la rive au point X_0 en temps fini. Pour cela de (16) on obtient :

$$\frac{U(y)}{\sqrt{U(y)^2) - v^2}} = -v\, dt$$

qui permet de calculer le temps t_1 mis par le nageur pour aller de l'ordonnée y_0 à l'ordonnée $y_1 > 0$:

$$t_1 = \frac{1}{v}\int_{y_1}^{y_0} \frac{U(y)dy}{\sqrt{U(y)^2 - v^2}}$$

D'après le développement limité (15) l'intégrale converge quand y_1 tend vers 0, ce qui prouve que le point $(X_0, 0)$ est atteint en temps fini et donc que la courbe S est la trajectoire optimale. Remarquez que en $(X_0, 0)$ la vitesse absolue du nageur est nulle, la vitesse relative annulant exactement celle du courant.

3. Dans le cas $\alpha \geq 1$ montrez que, quelle que soit la position initiale dans $\mathcal{R}$, il n'existe pas de trajectoire optimale pour rejoindre la rive Sud en minimisant le critère (11) et que l'ensemble des points où le nageur peut rejoindre la rive Sud est un intervalle ouvert $]X_*, +\infty[$.

   Corrigé : Dans le cas $\alpha \geq 1$ l'intégrale précédente diverge, le point $(X_0, 0)$ n'est pas atteint en temps fini. Montrons que le nageur peut atteindre en temps fini tout point d'abscisse X_1 strictement supérieure à X_0.
   Supposons que le nageur suive la courbe S jusqu'en un point (x_1, y_1), avec y_1 suffisamment petit pour que d'une part $U(y_1) < 2v$ et d'autre part $x_1 + 2y_1 < X_1$, et qu'à partir de ce point il choisisse le cap constant $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Au delà du point (x_1, y_1) la trajectoire du nageur satisfait :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{v}{U(y)} < -\frac{1}{2}$$

   d'après la monotonie de U. Le nageur touche donc la rive en un point d'abscisse inférieur à $x_1 + 2y_1$, et donc en amont du point $(X_1, 0)$.
   Ceci montre que l'ensemble des points de la rive que le nageur peut atteindre est l'ouvert $]X_0, 0[$ et donc qu'il n'y a pas de trajectoire optimale.

CINQUIEME PARTIE

Le dernier problème auquel on va s'intéresser est une synthèse des problèmes précédemment étudiés.
On suppose de nouveau l'existence de l'île AB de la figure 5. On suppose de plus que la vitesse du courant satisfait :

$$U(0) = \min_{y \in [0, 2L]} U(y) = 0 \tag{17}$$

Enfin on suppose qu'il existe un $\hat{l} \in]0, l[$ tel que $U(\hat{l}) = v$, avec $U'(\hat{l}) > 0$ (on rappelle que l est l'ordonnée du point A, extrémité Sud de l'île).

On veut déterminer l'ensemble $\mathcal{G}$ des positions initiales (x_0, y_0) situées en amont de l'île ($x_0 \leq 0$) à partir desquelles le nageur peut, soit atteindre l'île, soit atteindre une rive tout en ne dépassant pas l'île ($x \leq 0$).

1. Montrez que la bande $\left\{(x, y); x \leq 0,\ 0 \leq y < \hat{l}\right\}$ est dans $\mathcal{G}$. Et de même pour sa symétrique près de la rive Nord.

   Corrigé : Dans cette bande, le nageur peut remonter le courant vers l'amont puisque $v > U(y)$ et rejoindre la rive sans dériver vers l'aval ; cette bande est donc incluse dans l'ensemble $\mathcal{G}$.

2. Dans la partie centrale de la rivière ($\hat{l} \leq y \leq L$, et le symétrique par rapport au milieu), le nageur doit soit rejoindre l'île (problème de la deuxième partie), soit rejoindre la droite $y = \hat{l}$ (problème de la quatrième partie) puis nager vers l'amont.

   (a) Montrez qu'il existe une trajectoire limite qui rejoint le point $(0, \hat{l})$ en temps fini.

   Corrigé : Pour $y = \hat{l}$ le courant et la vitesse du nageur coincident, ce qui correspond au cas de la quatrième partie. Pour $y - \hat{l}$ positif et petit on a :

$$\sqrt{U(y)^2 - v^2} = \sqrt{2vU'(\hat{l})(y - \hat{l})} + o\left(\sqrt{y - \hat{l}}\right)$$

   Nous sommes dans le cas $\alpha = \frac{1}{2}$ de la quatrième partie et donc il existe une trajectoire de type S amenant au point $(0, \hat{l})$ en temps fini.

   (b) En déduire que dans la partie centrale de la rivière le domaine $\mathcal{G}$ est limité par une portion de la courbe C_A de la deuxième partie et une portion de la courbe du type S de la quatrième partie qui arrive au point $(0, \hat{l})$.

   Corrigé : Pour les points qui sont en amont de la courbe C_A ou de la courbe S qui arrive en $(0, \hat{l})$ le nageur pourra soit rejoindre l'île (s'il est en amont de C_A), soit rejoindre la rive (s'il est en amont de S), soit choisir entre rejoindre l'île ou la rive s'il est en amont des deux courbes (voir Figure 9).

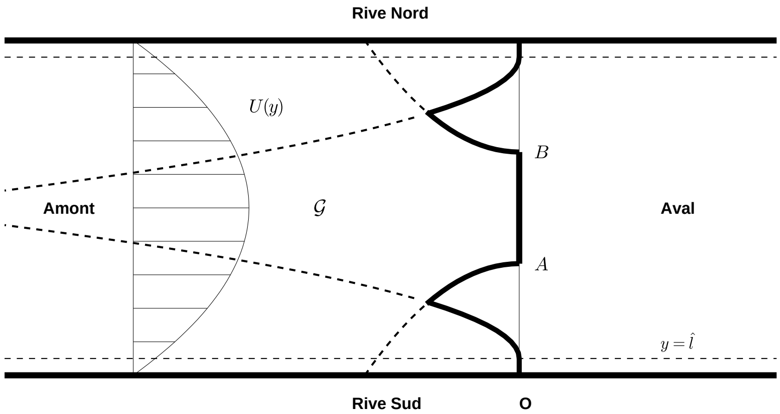


FIG. 9 – Le domaine $\mathcal{G}$

3. Il reste, pour montrer que $\mathcal{G}$ est fermé, à vérifier que depuis le point $(0, \hat{l})$ le nageur peut rejoindre la rive Sud sans traverser la ligne $x = 0$. Pour cela vérifiez que la commande de feedback, pour $y < \hat{l}$ proche de $\hat{l}$:

$$\cos\theta = -\sqrt{1 - K(\hat{l} - y)}, \quad \sin\theta = -\sqrt{K(\hat{l} - y)} \tag{18}$$

   permet, si K est une constante assez petite, de remonter le courant.

   Corrigé : Avec cette loi de feedback on peut intégrer l'équation $\frac{dy}{dt} = v \sin\theta$ ce qui donne $y(t) = \hat{l} - \frac{v^2 t^2}{2K}$ le nageur part vers le Sud. Quant à l'équation pour $x(t)$ elle est :

$$\frac{dx}{dt} = U(y) - v\sqrt{1 - K(\hat{l} - y)} = (y - \hat{l})\left(U'(y) - \frac{Kv}{2}\right) + o(y - \hat{l})$$

   et donc si $K < \frac{2U'(y)}{v}$, $\frac{dx}{dt} < 0$, le nageur peut remonter le courant sans dépasser $x = 0$ et se trouver dans la bande $y < \hat{l}$ qui lui permet de rejoindre la rive Sud.