Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2009-2010
MACS 3
C. Basdevant

Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique
du mardi 8 décembre 2009

Durée : 3 h
Aucun document n'est autorisé

Problème I

Cet exercice est particulièrement facile, vous veillerez donc à justifier et étayer très clairement vos raisonnements.

On veut déterminer la fonction réelle $y(x)$ de $H^1([0,1])$, vérifiant $y(0) = y_0$ et $y(1) = y_1$ (où y_0 et y_1 sont fixés) qui minimise la quantité :

$$J(y) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(y(x)^2 + y'(x)^2\right) dx$$

On va pour cela utiliser trois méthodes différentes.

1. Démontrez l'existence et l'unicité de la solution de ce problème de minimisation.

   Corrigé : Pour montrer l'existence et l'unicité, montrons que la fonctionnelle est $\alpha-$convexe continue sur un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert.
   $H^1([0,1])$ est bien un Hilbert et $K = \{y \in H^1([0,1]) \,|\, y(0) = y_0,\ y(1) = y_1\}$ est un sous-espace affine (trivialement non vide) et donc convexe, il est fermé d'après le théorème de trace. Par ailleurs J est différentiable, donc continue, ses différentielles première et seconde sont :

   $$J'(y).h = \int_0^1 (y(x)h(x) + y'(x)h'(x))\, dx \quad J''(y).h.k = \int_0^1 (h(x)k(x) + h'(x)k'(x))dx$$

   d'où $J''(y).h.h = \|h\|_1^2$, la fonctionnelle est donc bien $\alpha-$convexe

2. Résolvez le problème par une approche optimisation (inégalité d'Euler).

   Corrigé : Le minimum y de la fonctionnelle est caractérisé par l'inégalité d'Euler : $J'(y).(z-y) \geq 0, \quad \forall z \in K$, ce qui donne, en posant $h = z - y$, $J'(y)h = 0$ pour tout h dans le sous-espace vectoriel sous-jacent au sous-espace affine K, c'est à dire pour $h \in H_0^1([0,1])$, soit :

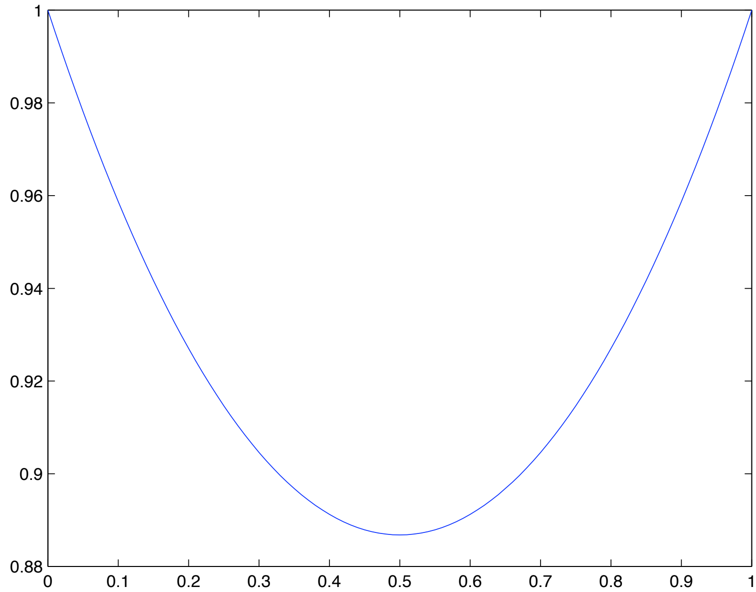
   $$\int_0^1 (y(x)h(x) + y'(x)h'(x))\, dx = 0 \quad \forall h \in H_0^1([0,1])$$

   soit après intégration par parties $\int_0^1 (y(x) - y''(x))\, h(x)dx = 0$, mais $H_0^1([0,1])$ étant dense dans $L^2([0,1])$ on en déduit que $y'' = y$ dans L^2 et donc presque partout. D'où, compte tenu des conditions aux limites, la solution :

   $$y(x) = \frac{ey_1 - y_0}{e^2 - 1} e^x + e\frac{ey_0 - y_1}{e^2 - 1} e^{-x}$$

3. Tracez le graphe de la solution pour $y_0 = y_1 = 1$, calculez alors le minimum de J et comparez le à la valeur pour $y(x) = 1$. (Notes $e \approx 2.7183$, $(e-1)/(e+1) = 0.4621$, $2\sqrt{e}/(e+1) \approx 0.8868$)

   Corrigé : La solution avec $y(0) = y(1) = 1$ est
$$y(x) = \frac{e^x + e^{1-x}}{e+1} = \frac{1}{e}\frac{\mathrm{ch}(x+1/2)}{\mathrm{ch}(1/2)}$$
   avec $J = \frac{e-1}{e+1} \approx 0.4621$ à comparer avec $J = 0.5$ pour une fonction constante égale à 1.



4. Résolvez le même problème avec la méthode de Pontriagine.

   Corrigé : Transformons la question en un problème de contrôle optimal : en prenant pour contrôle u la dérivée y', avec $u(x) \in \mathbb{R}$, le système dynamique est $y' = u$ avec $y(0) = y_0$ et $y(1) = y_1$, et la fonction coût $J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (y(x)^2 + u(x)^2)\, dx$.
   On forme alors le Hamiltonien $H(x, y, u, p) = \frac{1}{2}(y^2 + u^2) + pu$ puis l'équation de l'état adjoint $p' = -H_y = -y$. Il n'y a pas de conditions de transversalité puisque temps final et état final sont fixés. Le contrôle optimal minimise pour tout $x \in [0, 1]$ le Hamiltonien, soit $u(x) = -p(x)$. En éliminant u et p entre ces trois équations on retrouve $y'' = y$ et donc la solution trouvée précédemment.

5. On va maintenant résoudre le problème initial avec $y_1 = 0$ par la méthode de la programmation dynamique de Richard Bellman. Pour cela on va pénaliser la contrainte $y(1) = 0$, c'est à dire considérer le système dynamique $y' = u$ avec la cible $\mathcal{B} = \{x = 1,\ y \,\text{quelconque}\,\}$ et le coût $\tilde{J}$ pour une courbe entre $[x_0, 1]$ avec $y(x_0) = y_0$:
$$\tilde{J}(x_0, y_0, u) = \frac{1}{2}\int_{x_0}^1 \left(y(x)^2 + u(x)^2\right) dx + \frac{1}{\varepsilon}y(1)^2$$
   où u est le contrôle et $\varepsilon > 0$ est destiné à tendre vers 0 pour pouvoir imposer à la limite $y(1) = 0$.

(a) Définissez la fonction de Bellman $V(x,y)$ de ce problème (expliquez ce qu'elle représente).

Corrigé : La fonction de Bellman est le coût optimal pour atteindre la cible en partant en x de l'état y, soit :

$$V(x,y) = \inf_u \tilde{J}(x,y,u) \qquad (x,y) \bullet \xrightarrow{u} \bullet \ \mathcal{B}$$

(b) Ecrivez l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman en n'oubliant pas sa condition à la limite en $x = 1$.

Corrigé : L'équation HJB s'écrit :

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \inf_u \left\{ \frac{1}{2}(y^2 + u^2) + \frac{\partial V}{\partial y} u \right\} = 0 \quad \text{avec} \quad V(1,y) = \frac{1}{\varepsilon} y^2$$

(c) Résolvez l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman. Indications : après la minimisation, on cherchera sa solution sous la forme $V(x,y) = \phi(x)\, y^2$ (séparation des variables), on obtiendra alors une équation de Ricatti pour ϕ. Pour résoudre cette dernière équation on posera successivement : $\phi = \phi_0 + \psi$ avec $\phi_0(x)$ une solution particulière (constante en l'occurence), puis $\chi = 1/\psi$, ce qui conduit à une équation linéaire pour χ que vous saurez résoudre.

Corrigé : La minimisation sur u conduit à $u(x,y) = -\frac{\partial V}{\partial y}$ et :

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 = 0 \quad \text{avec} \quad V(1,y) = \frac{1}{\varepsilon} y^2$$

en posant $V(x,y) = \phi(x)\, y^2$ on obtient : $\phi' + \frac{1}{2} - 2\phi^2 = 0$ avec $\phi(1) = \frac{1}{\varepsilon}$, une équation de Ricatti qui admet la solution particulière $\phi_0(x) = \frac{1}{2}$. En posant $\phi = \frac{1}{2} + \psi$ on se ramène à $\psi' - 2\psi^2 - 2\psi = 0$. En posant $\chi = 1/\psi$ on obtient $\chi' + 2 + 2\chi = 0$, soit $\chi(x) = -1 + \alpha\, e^{-2x}$. En remontant on obtient $\phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha\, e^{-2x} - 1} = \frac{1}{2} \frac{\alpha e^{-2x} + 1}{\alpha\, e^{-2x} - 1}$ et en imposant la condition à la limite $x = 1$: $\alpha = e^2 \frac{2+\varepsilon}{2-\varepsilon}$.

(d) En faisant tendre ε vers 0, vérifiez que l'on retrouve bien la solution obtenue à la question 2 pour $y_1 = 0$; on pourra se contenter de comparer les quotients y'/y sans recalculer $y(x)$.

Corrigé : En faisant tendre ε vers 0 on trouve $\alpha = e^2$ et

$$\frac{y'}{y} = -2\phi = -\frac{e^{-2(x-1)} + 1}{e^{-2(x-1)} - 1} \quad \text{avec} \quad y(0) = y_0$$

le même résultat qu'à la question 2.

Problème II

On envisage le problème de l'atterrissage en douceur d'un véhicule spatial sur une aire plane d'un corps céleste privé d'atmosphère, par exemple la Lune.

Le véhicule est supposé suivre une trajectoire rectiligne perpendiculaire à la surface de la Lune. $m(t)$ est la masse du véhicule, $h(t)$ sa distance à la surface à l'instant t et $v(t)$ sa vitesse (négative quand il descend vers la surface). Les équations du système sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{h} = v \\ m\dot{v} = u - \gamma m \\ \dot{m} = -ku \end{cases}$$

où γ est l'accélération de la gravité lunaire (constante) et k une constante. La commande est la poussée u qui vérifie $0 \leq u(t) \leq U$.
Les conditions initiales et finales sont :

$$\begin{array}{lll} h(0) = h_0 > 0, & v(0) = v_0, & m(0) = M + F \\ h(T) = 0, & v(T) = 0, & m(T) \geq M \end{array}$$

M étant la masse hors carburant du vaisseau et F la masse de carburant disponible. On suppose que $U > (M+F)\gamma$ de sorte que le vaisseau est en mesure de freiner sa chute ($\dot{v} > 0$) avec la poussée maximale tant qu'il a du carburant.

L'objectif est un alunissage en douceur minimisant la consommation totale de carburant, soit trouver la commande u permettant d'obtenir $h(T) = 0$ et $v(T) = 0$ tout en minimisant $J(u) = m(0) - m(T)$; le temps T pour cette manœuvre étant libre.

On admettra le résultat suivant (résultat d'existence d'un contrôle optimal) : s'il est possible d'alunir en douceur en partant de l'état initial $(h_0, v_0, M+F)$ - on dit que la cible est atteignable - alors il existe une commande optimale.

On résoudra dans la suite ce problème par la méthode de Pontryagin.

1. Formez le hamiltonien du système et les équations de l'état adjoint $p = (p_1, p_2, p_3)$.
   Corrigé : Le Hamiltonien s'écrit

   $$H(t, h, v, m, p_1, p_2, p_3) = p_1 v + p_2(\frac{u}{m} - \gamma) - p_3 k u$$

   et le système dynamique adjoint :

   $$\dot{p_1} = -\frac{\partial H}{\partial h} = 0 \quad \dot{p_2} = -\frac{\partial H}{\partial v} = -p_1 \quad \dot{p_3} = -\frac{\partial H}{\partial m} = p_2 \frac{u}{m^2}$$

   Variante : Si on écrit la fonction coût sous la forme équivalente $J(u) = \int_0^T kudt$, alors $H = p_1 v + p_2(\frac{u}{m} - \gamma) - p_3 k u + ku$, mais le système adjoint n'est pas changé.
2. Déterminez les conditions de transversalité.

   Corrigé : Le temps final est libre et au temps final h et v sont fixés, m est libre, donc $\tau \neq 0$ et $\eta = (0, 0, \eta_3 \neq 0)$ et la condition générique $(p(T), \eta) + H(T)\tau = (\lambda_y, \eta)$

se résume à $p_3(T) = -1$ et $H(T) = 0$. Comme le système est autonome et le coût ne dépend pas explicitement du temps, le Hamiltonien est une intégrale première du système et donc $H(t) = 0, \ \forall t$.
Variante : Dans les conditions de la variante : $p_3(T) = 0$.

3. En utilisant la condition d'optimalité montrez que la commande optimale est bang-bang, sa valeur étant déterminée par le signe de la quantité :

$$\psi(t) = \frac{p_2(t)}{m(t)} - p_3(t)k + \delta k$$

où δ est égal à 0 ou 1 selon la forme que vous aurez choisie pour la fonction coût.

Corrigé : La commande optimale minimise à tout instant le Hamiltonien, soit $u(t) = \arg\min_{0\leq v\leq U} \left\{v(\frac{p_2}{m} - p_3 k)\right\}$ donc :

$$u(t) = 0 \text{ si } \psi(t) > 0, \quad u(t) = U \text{ si } \psi(t) < 0$$

la commande est donc bang-bang.
Variante : Dans les conditions de la variante : $u(t) = \arg\min_{0\leq v\leq U} \left\{v(\frac{p_2}{m} - p_3 k + k)\right\}$.

4. Calculez $\dot{\psi}$, en déduire qu'il y a au plus une commutation.

Corrigé :

$$\dot{\psi} = -\frac{p_1}{m} - \frac{p_2 \dot{m}}{m^2} - \dot{p_3} k = -\frac{p_1}{m}$$

et d'après le système adjoint p_1 est constant, m étant positif, $\dot{\psi}$ est de signe constant, ψ est monotone, il y a donc au plus un changement de signe, au plus une commutation.

5. Des résultats précédents, et en écartant toute autre solution pour une raison physique que vous expliquerez, déduisez que la commande optimale est d'une des deux formes suivantes :
   - $u(t) = U \quad \forall t$,
   - $u(t) = 0 \quad 0 \leq t \leq \tau$ et $u(t) = U \quad \tau < t < T$.

Corrigé : Si la poussée u est nulle au voisinage de la surface, pendant une durée finie, attiré par la pesanteur le vaisseau s'écrasera sur la Lune. Mathématiquement, en descente la vitesse est négative, elle doit devenir nulle quand le vaisseau atteint le sol, il faut donc nécessairement une accélération strictement positive au voisinage du sol, soit $u > \gamma m$, la commande $u = 0$ au voisinage du sol est donc incompatible avec un alunissage en douceur (notez que $U > (M+F)\gamma \geq m(t)\gamma$ ainsi l'accélération est toujours strictement positive quand les propulseurs sont au maximum de poussée). Il faut donc éliminer les deux solution ayant au plus une commutation, qui étaient a priori possibles, dans lesquelles le vaisseau n'utilise pas son moteur au moment de se poser, soit :
- $u(t) = 0 \quad \forall t$,
- $u(t) = U \quad 0 \leq t \leq \tau$ et $u(t) = 0 \quad \tau < t < T$.

Il ne reste donc que deux solutions possibles, une sans commutation avec $u = U \ \forall t$, une avec commutation se terminant à poussée maximale.

6. L'intégration du système dynamique avec une poussée maximale $u(t) = U$ sur un intervalle de temps $[\tau, \tilde{\tau}]$ donne :

$$\begin{aligned}
h(\tau+\delta) &= -\frac{1}{2}\gamma\delta^2 + \frac{m(\tau) - kU\delta}{k^2 U} \ln \frac{m(\tau) - kU\delta}{m(\tau)} + \frac{\delta}{k} + v(\tau)\delta + h(\tau) \\
v(\tau+\delta) &= -\gamma\delta - \frac{1}{k} \ln \frac{m(\tau) - kU\delta}{m(\tau)} + v(\tau) \\
m(\tau+\delta) &= -kU\delta + m(\tau)
\end{aligned}$$

Déterminez une équation paramétrique du lieu des points (v, h), dans le plan vitesse-hauteur, qui permettent d'atterrir en douceur en gardant sans discontinuer une poussée maximale jusqu'à l'atterrissage. Déterminez également le temps maximum que peut durer cette descente freinée.

Corrigé : On veut déterminer $h = h(\tau)$ et $v = v(\tau)$ pour que $h(\tau+\delta) = 0, v(\tau+\delta) = 0$, avec $m = m(\tau)$ la masse initiale. Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{2}\gamma\delta^2 + \frac{m - kU\delta}{k^2 U} \ln \frac{m - kU\delta}{m} + \frac{\delta}{k} + v(\tau)\delta + h \\
0 &= -\gamma\delta - \frac{1}{k} \ln \frac{m - kU\delta}{m} + v \\
M &< -kU\delta + m
\end{aligned}$$

En substituant v de la deuxième dans la première équation on obtient la courbe paramétrée par δ :

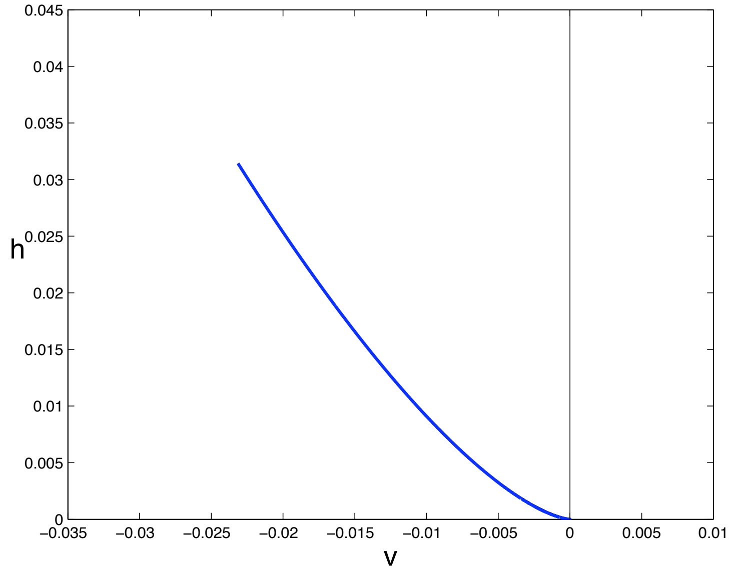
$$\begin{aligned}
h &= -\frac{1}{2}\gamma\delta^2 - \frac{m}{k^2 U} \ln \frac{m - kU\delta}{m} - \frac{\delta}{k} \\
v &= \gamma\delta + \frac{1}{k} \ln \frac{m - kU\delta}{m}
\end{aligned}$$

courbe déterminant le lieu des points (v, h) qui permettent d'atterrir avec la poussée maximale.
La relation sur la masse nous dit que le temps maximum possible sur cette courbe est celui pour brûler tout le carburant, soit $0 \leq \delta \leq F/kU$.

7. Expliquez pourquoi la portion de courbe déterminée à la question précédente (et schématisée ci-dessous dans le plan (v, h), unités arbitraires) est la courbe de commutation.
Corrigé : On a vu d'une part que l'arrivée sur la Lune se faisait à poussée maximale, donc sur cette courbe, et d'autre part qu'il n'y avait qu'une seule commutation, donc soit le vaisseau est dès le départ sur cette portion de courbe et il y reste jusqu'à l'atterrissage, soit il est ailleurs dans le plan (v, h) et il doit descendre attiré par la pesanteur jusqu'à rejoindre cette courbe en un point quelconque, puis allumer ses propulseurs pour se freiner, c'est donc bien la courbe de commutation.

8. L'intégration du système dynamique avec une poussée nulle $u(t) = 0$ sur un intervalle de temps $[\tau, \tilde{\tau}]$ donne :

$$\begin{aligned}
h(\tau+\delta) &= -\frac{1}{2}\gamma\delta^2 + v(\tau)\delta + h(\tau) \\
v(\tau+\delta) &= -\gamma\delta + v(\tau) \\
m(\tau+\delta) &= m(\tau)
\end{aligned}$$



Déterminez la forme des trajectoires du vaisseau à poussée nulle dans le plan (v, h).

Corrigé : En éliminant le temps entre les deux équations $h = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t + h_0$ et $v = -\gamma t + v_0$ (ou en raisonnant sur la conservation de l'énergie) on voit que le vaisseau se déplace dans l'espace des phases sur une parabole : $h = h_0 - \frac{1}{2\gamma}(v^2 - v_0^2)$. Toutes ces paraboles, d'axe $v = 0$, se déduisent l'une de l'autre par une translation parallèle à l'axe h.

9. En recopiant la figure de la question 7 sur votre copie, indiquez en justifiant vos réponses :
   - La région du plan (v, h) dans laquelle il existe pour chaque état initial $(v_0, h_0, M+F)$ une trajectoire optimale d'alunissage en douceur,
   - Tracez une trajectoire optimale partant d'un point $(v_0 > 0, h_0 > 0)$ de cette région,
   - La région du plan (v, h) depuis laquelle l'alunissage en douceur n'est pas possible faute de suffisamment de carburant,
   - La région du plan (v, h) depuis laquelle l'alunissage en douceur n'est pas possible par manque de puissance des moteurs.

   Corrigé : Sur la figure ci-dessous sont indiquées les zones :
   - La zone I est au dessus de la courbe de commutation et limitée par la parabole de chute libre qui atteint son extrémité la plus haute. Dans cette zone une trajectoire optimale est constituée d'une parabole à $u = 0$ le long de laquelle la pesanteur entraîne le vaisseau de plus en plus vite vers la surface, jusqu'au moment où la parabole atteint la courbe de commutation et alors les propulseurs doivent être allumés au maximum pour freiner le vaisseau permettant un alunissage en douceur à consommation minimale. Voir la trajectoire à $u = 0$ tracée en tiretés.
   - La zone II est au dessus de la courbe de commutation mais au-delà de son extrémité du côté des vitesses de descente importantes. C'est la zone depuis laquelle il manque du carburant, il n'est pas possible d'alunir en douceur puisque le vaisseau est plus haut ou plus rapide que le point extrême de la courbe d'alunissage à puissance maximum.

– La zone III sous la courbe de commutation prolongée, est celle des points où même si le vaisseau avait plus de carburant, la vitesse de descente étant trop grande, il ne pourrait freiner suffisamment pour alunir à vitesse nulle par manque de puissance.