Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2009-2010
MACS 3
C. Basdevant

Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique du mardi 19 janvier 2010

Durée : 2 h
Aucun document n'est autorisé

Problème I

Quel serait le temps minimal pour vous rendre en fusée de Paris à Los Angeles avec des accélérations limitées à $\pm 3\,g$? Vous considérerez un vol purement rectiligne horizontal et présentez une formulation utilisant le principe du minimum de Pontriagine.
Données : distance Paris - Los Angeles 9000 km ; on prendra pour simplifier $g = 10\,ms^{-2}$.

Corrigé : Posons le problème comme un problème de contrôle, $x(t)$ étant la distance parcourue, $v(t)$ la vitesse, le contrôle $u(t)$ est l'accélération de la fusée, on a alors le système dynamique

$$\dot{x} = v,\ \dot{v} = u,\ |u| \leq M = 3\,g, \quad x(0) = v(0) = 0,\ x(T) = L = 9000\,km,\ v(T) = 0$$

et la fonction coût à minimiser $J(u) = \int_0^T 1dt$. On utilise alors l'approche Pontriagine. Le Hamiltonien est $H = 1 + p_1 v + p_2 u$, le système adjoint $\dot{p_1} = 0$, $\dot{p_2} = -p_1$, la condition de transversalité $H(T) = 0$. Le contrôle optimal minimise le Hamiltonien soit $u(t) = -signe(p_2(t))$, la commande est bang-bang, mais p_2 étant linéaire en temps il y a au plus une commutation. La solution évidente est qu'il faut accélérer au départ, soit $\ddot{x} = M$ pour $t \in [0, \tau[$, puis décélérer à l'arrivée, soit $\ddot{x} = -M$ pour $t \in [\tau, T[$. Il reste à raccorder ces solutions entre elles et avec les conditions aux limites. Donc :

$$x(t) = \frac{1}{2}Mt^2,\ \forall t \in [0, \tau[, \qquad x(t) = -\frac{1}{2}Mt^2 + \alpha t + \beta,\ \forall t \in [\tau, T[$$

$$\frac{1}{2}M\tau^2 = -\frac{1}{2}M\tau^2 + \alpha\tau + \beta, \qquad M\tau = -M\tau + \alpha$$

$$L = -\frac{1}{2}MT^2 + \alpha T + \beta, \qquad 0 = -MT + \alpha$$

d'où l'on tire $\tau = T/2$ et $L = \frac{1}{4}MT^2$ et donc $T = \sqrt{L/M} \approx 1095\,s$, un peu moins de 20 minutes. La vitesse maximale atteinte étant $v = \frac{1}{2}MT = \sqrt{ML} \approx 59\,000\,km/h$.

Problème II

Vous veillerez à justifier et étayer très clairement vos raisonnements.

On veut déterminer la fonction réelle $y(x)$ de $H^1([0,1])$, vérifiant $y(0) = y_0$ (où y_0 est fixé) qui minimise la quantité :

$$J(y) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(y(x)^2 + y(x)y'(x) + y'(x)^2\right)dx + \frac{1}{4}y(1)^2$$

On va pour cela utiliser trois méthodes différentes.

1. Démontrez l'existence et l'unicité de la solution de ce problème de minimisation.

   Corrigé : Pour montrer l'existence et l'unicité, montrons que la fonctionnelle est $\alpha-$convexe continue sur un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert.
   $H^1([0,1])$ est bien un Hilbert et $K = \{y \in H^1([0,1]) \,|\, y(0) = y_0\}$ est un sous-espace affine (trivialement non vide) et donc convexe, il est fermé d'après le théorème de trace. Par ailleurs J est différentiable, donc continue, ses différentielles première et seconde sont :

   $$J'(y).h = \int_0^1 \left(y(x)h(x) + \frac{1}{2}\left[y(x)h'(x) + y'(x)h(x)\right] + y'(x)h'(x) \right) dx + \frac{1}{2}y(1)h(1)$$

   $$J''(y).h.k = \int_0^1 \left(k(x)h(x) + \frac{1}{2}\left[k(x)h'(x) + k'(x)h(x)\right] + k'(x)h'(x) \right) dx + \frac{1}{2}h(1)k(1)$$

   d'où

   $$J''(y).h.h = \frac{1}{2}\|h\|_1^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(h(x) + h'(x)\right)^2 dx + \frac{1}{2}h(1)^2 \geq \frac{1}{2}\|h\|_1^2$$

   la fonctionnelle est donc bien $\alpha-$convexe.
   Remarque : Comme $\int_0^1 y(x)y'(x)dx = \frac{1}{2}\left(y(1)^2 - y(0)^2\right)$ la fonctionnelle J peut se simplifier sous la forme :

   $$J(y) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(y(x)^2 + y'(x)^2\right) dx + \frac{1}{2}y(1)^2 - \frac{1}{4}y(0)^2$$

2. Résolvez le problème par une approche optimisation (inégalité d'Euler).

   Corrigé : Le minimum y de la fonctionnelle est caractérisé par l'inégalité d'Euler : $J'(y).(z-y) \geq 0, \quad \forall z \in K$, ce qui donne, en posant $h = z - y$, $J'(y)h = 0$ pour tout h dans le sous-espace vectoriel F sous-jacent au sous-espace affine K, c'est à dire pour $h \in H^1([0,1])$ tel que $h(0) = 0$, soit :

   $$\int_0^1 \left(y(x)h(x) + \frac{1}{2}\left[y(x)h'(x) + y'(x)h(x)\right] + y'(x)h'(x) \right) dx + \frac{1}{2}y(1)h(1) = 0 \quad \forall h \in F$$

   et après intégration par parties

   $$\int_0^1 \left(y(x) - y''(x)\right) h(x)dx + \left(y(1) + y'(1)\right) h(1) = 0 \quad \forall h \in F$$

   mais F contient $H_0^1([0,1])$ il est donc dense dans $L^2([0,1])$ on en déduit que d'une part $y'' = y$ dans L^2 et donc presque partout et d'autre part que $y(1) + y'(1) = 0$. D'où, compte tenu de $y(0) = y_0$, la solution :

   $$y(x) = y_0\, e^{-x}$$

3. Résolvez le même problème avec la méthode de Pontriagine.

   Corrigé : Transformons la question en un problème de contrôle optimal : en prenant pour contrôle u la dérivée y', avec $u(x) \in \mathbb{R}$, le système dynamique est $y' = u$ avec $y(0) = y_0$, et la fonction coût

   $$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(y(x)^2 + y(x)u(x) + u(x)^2\right) dx + \frac{1}{4}y(1)^2$$

On forme alors le Hamiltonien $H(x,y,u,p) = \frac{1}{2}(y^2 + yu + u^2) + pu$ puis l'équation de l'état adjoint $p' = -H_y = -y - \frac{1}{2}u$. Pour les conditions de transversalité, le temps final est fixé (τ=0) et l'état final est libre (η quelconque) cela donne $p(1) = \frac{1}{2}y(1)$. Le contrôle optimal minimise pour tout $x \in [0,1]$ le Hamiltonien, soit $u(x) = -p(x) - \frac{1}{2}y(x)$. En éliminant u et p entre ces trois équations (équation d'état, équation adjointe et contrôle optimal) on retrouve $y'' = y$ et pour la condition en $x = 1$ la condition de transversalité donne : $y(1) + y'(1) = 0$ et donc en défintive la solution trouvée précédemment.

4. On va maintenant résoudre le problème initial par la méthode de la programmation dynamique de Richard Bellman. Pour cela on va considérer le système dynamique $y' = u$ avec la cible $\mathcal{B} = \{x = 1,\ y\,\text{quelconque}\ \}$ et le coût $\tilde{J}$ pour une courbe entre $[x_0, 1]$ avec $y(x_0) = y_0$:

$$\tilde{J}(x_0, y_0, u) = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{1} \left(y(x)^2 + y(x)u(x) + u(x)^2\right) dx + \frac{1}{4}y(1)^2$$

où u est le contrôle.

(a) Définissez la fonction de Bellman $V(x,y)$ de ce problème (expliquez ce qu'elle représente).

Corrigé : La fonction de Bellman est le coût optimal pour atteindre la cible en partant au "temps" x de l'état y, soit :

$$V(x,y) = \inf_u \tilde{J}(x,y,u) \qquad (x,y) \bullet \xrightarrow{u} \bullet\ \mathcal{B}$$

(b) Ecrivez l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman en n'oubliant pas sa condition à la limite en $x = 1$.

Corrigé : L'équation HJB s'écrit :

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \inf_u \left\{\frac{1}{2}(y^2 + yu + u^2) + \frac{\partial V}{\partial y}u\right\} = 0 \quad \text{avec} \quad V(1,y) = \frac{1}{4}y^2$$

(c) Résolvez l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman et montrez que le contrôle optimal est un feddback linéaire. Indication : après la minimisation, on cherchera sa solution sous la forme $V(x,y) = \phi(x)\,y^2$ (séparation des variables).

Corrigé : La minimisation sur u conduit à $u(x,y) = -\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{1}{2}y$ et :

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{2}y\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{1}{2}(\frac{\partial V}{\partial y})^2 = 0 \quad \text{avec} \quad V(1,y) = \frac{1}{4}y^2$$

en posant $V(x,y) = \phi(x)\,y^2$ on obtient : $\phi' + \frac{3}{8} - \phi - 2\phi^2 = 0$ avec $\phi(1) = \frac{1}{4}$, une équation de Ricatti. Pour résoudre une équation de Ricatti on est amené à chercher une solution particulière, ici on trouve deux solutions particulières constantes $\phi_0 = -\frac{3}{4}$ et $\phi_0 = \frac{1}{4}$. Cette dernière est la solution (unique) qui vérifie la condition aux llmites et donc $\phi(x) = \frac{1}{4}$. On en déduit $V(x,y) = \frac{1}{4}y^2$ et le contrôle optimal en l'état (x,y) est $u(x,y) = -y$ soit un feedback linéaire. La solution optimale vérifie alors $y' = y$ avec $y(0) = y_0$, soit, une nouvelle fois, la solution trouvée précédemment.