Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2010-2011
MACS 3
C. Basdevant

Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique
du mercredi 8 décembre 2010

Durée : 3 h
Aucun document autorisé

Problème I

On considère le système de deux réservoirs alimenté présenté sur le figure 1. Le système d'équation qui régit son fonctionnement, avec $x_1(t)$ la hauteur d'eau dans le réservoir supérieur, $x_2(t)$ dans l'inférieur et $u(t) \in [0,1]$ le débit d'alimentation, s'écrit :

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x_1}(t) = -x_1(t) + u(t) \\ \dot{x_2}(t) = x_1(t) \end{array} \right.$$

Partant de deux réservoirs vides, on demande de déterminer la commande optimale $u^*(t)$ permettant de maximiser $x_2(1)$ sous la contrainte $x_1(1) = 0.5$. Note : $\ln(1 + \frac{e}{2}) \approx 0.8583$.

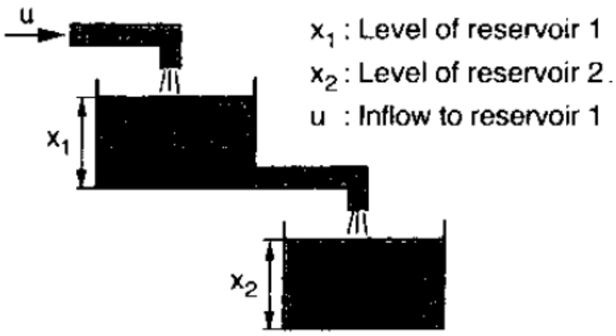


FIG. 1 – Système de réservoirs

Corrigé : Le problème demande, en partant de l'état initial $x_1(0) = x_2(0) = 0$, de minimiser le critère $J(u) = -x_2(1)$ sous la contrainte $x_1(1) = 0.5$.
Le Hamiltonien du système s'écrit $H(x_1, x_2, p_1, p_2, u, t) = p_1(u - x_1) + p_2 x_1$, l'équation de l'état adjoint (p_1, p_2) est :

$$\begin{cases} \dot{p_1} = p_1 - p_2 \\ \dot{p_2} = 0 \end{cases}$$

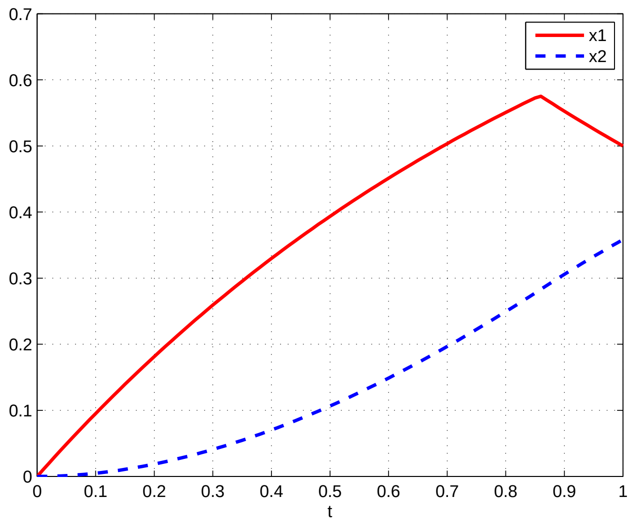
d'où $p_2(t) = c_2$, $p_1(t) = c_2 + c_1 e^t$, avec c_1 et c_2 des constantes à déterminer. En l'état final $t = 1$ le temps est fixé, ainsi que x_1, par contre x_2 est libre, la condition de transversalité devient $p_2(1)\,\eta_2 = -\eta_2$, soit $p_2(1) = c_2 = -1$. A tout instant la commande optimale minimise le Hamiltonien, soit :

$$u^*(t) = \arg\min_{0 \le v \le 1} \left(p_1(v - x_1) + p_2 x_1\right) = \arg\min_{0 \le v \le 1} (p_1 v) = \arg\min_{0 \le v \le 1} \left((c_1 e^t - 1)v\right)$$

La commande optimale est donc bang-bang, $u^*(t) = 0$ si $p_1(t) = c_1 e^t - 1 \geq 0$ et $u^*(t) = 1$ sinon ; avec au plus une commutation puisque p_1 est monotone.
Discussion : Si $c_1 \geq 1$, $p_1(t) \geq 0$, $\forall t$ et donc $u(t) = 0$ $\forall t$ c'est impossible, donc nécessairement $c_1 < 1$, $p_1(0) < 0$ et $u^*(0) = 1$, d'où la commande optimale :

$$u^*(t) = 1, \quad \text{pour } 0 \leq t \leq t_c, \quad u^*(t) = 0, \quad \text{pour } t_c < t \leq 1$$

le temps de commutation t_c étant à déterminer pour satisfaire la contrainte $x_1(1) = 0.5$ et la continuité de la solution.
Entre 0 et t_c on a $\dot{x_1}(t) = -x_1(t) + 1$, $\dot{x_2}(t) = x_1(t)$ avec $x_1(0) = x_2(0) = 0$, soit $x_1(t) = 1 - e^{-t}$, $x_2(t) = t + e^{-t} - 1$.
Entre t_c et 1 on a $\dot{x_1}(t) = -x_1(t)$, $\dot{x_2}(t) = x_1(t)$ avec $x_1(t_c) = 1 - e^{-t_c}$, $x_2(t_c) = t_c + e^{-t_c} - 1$, soit $x_1(t) = (e^{t_c} - 1)e^{-t}$, $x_2(t) = -(e^{t_c} - 1)e^{-t} + t_c$.
La condition finale $x_1(1) = 0.5$ impose alors $(e^{t_c} - 1)e^{-1} = 0.5$, soit $t_c = \ln(1 + \frac{e}{2}) \approx 0.8583$ et $x_2(1) = t_c - 0.5 \approx 0.3583$.



Problème II

On considère le système dynamique $\dot{x}(t) = u(t)$, avec la contrainte $|u(t)| \leq 1$ pour $t \in [0, T]$, T fixé, et la fonction coût $J(u) = \frac{1}{2}(x(T))^2$. Une solution évidente de ce problème est donnée par le contrôle

$$u^*(x,t) = -\text{signe}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Montrez que le coût $J(x,t)$ associé à ce contrôle est solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman.

Corrigé : Rappel - la fonction de Bellman $V(x,t)$, qui est le coût optimal en partant de l'état x au temps t, vérifie l'équation HJB :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_u \left(L + \frac{\partial V}{\partial x}.f \right) = 0, \quad V(x,t) = \lambda(x,t) \quad \text{sur la cible}$$

où L est le coût instantané le long de la trajectoire, λ le coût final, f le second membre du système dynamique ; le contrôle optimal étant l'argument du minimum.

Le coût associé au contrôle donné dans l'énoncé est $J^*(x,t) = \frac{1}{2}\left(\max\{0, |x| - (T-t)\}\right)^2$, vérifions que J^* est solution de HJB. Cette fonction vérifie bien la condition à la limite en T puisque $J^*(x,T) = \frac{1}{2}x^2$. D'autre part

$$\frac{\partial J^*}{\partial t}(x,t) = \max\{0, |x| - (T-t)\}, \quad \frac{\partial J^*}{\partial x}(x,t) = \text{signe}(x)\ \max\{0, |x| - (T-t)\}$$

d'où

$$\frac{\partial J^*}{\partial t} + \min_{|u|\leq 1}\left(0 + \frac{\partial J^*}{\partial x}u\right) = \min_{|u|\leq 1}[1 + \text{signe}(x)u]\max\{0, |x| - (T-t)\}$$

une quantité qui est bien identiquement nulle pour tout (x,t), de plus le contrôle défini plus haut est bien argument du minimum. On a donc bien vérifié que J^* est solution de HJB.

Problème III

On considère le système dynamique $\ddot{x}(t) = u(t)$ avec $u(t) \in [-1, 1]$, pour lequel on demande de trouver la commande optimale $u^*(t)$ permettant d'atteindre en temps minimum, à partir d'un état initial $(x(0),\ \dot{x}(0))$ quelconque, un état final $(x(T), \dot{x}(T))$ satisfaisant la contrainte $\dot{x}^2(T) + x^2(T) \leq a^2$, où a est une donnée vérifiant $0 < a < 1$.

Pour un état initial vérifiant $\dot{x}^2(0) + x^2(0) \gg a^2$, faites l'étude du problème de contrôle optimal et indiquez sur la figure jointe (figure 2), avec toutes les justifications nécessaires, les commandes optimales, la ou les courbes de commutation et le nombre de commutations.

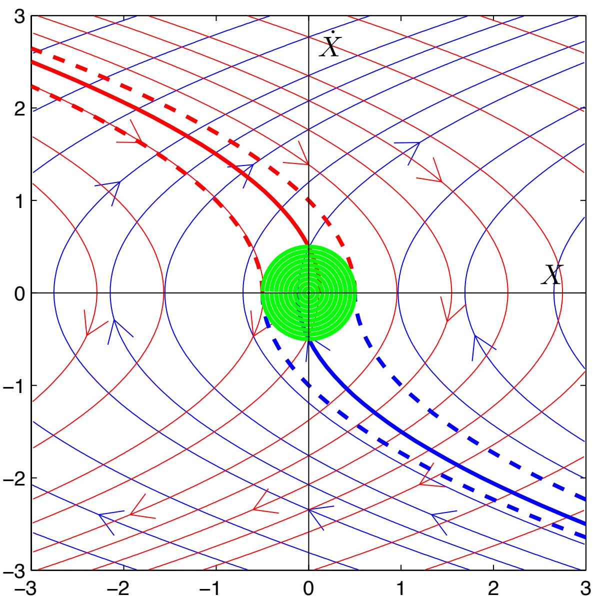


Fig. 2 – Espace des phases

Corrigé :
Si les données initiales vérifient $\dot{x}^2(0)+x^2(0)\leq a^2$, la cible est déjà atteinte le temps minimum est nul.
On considèrera donc des états initiaux tels que $\dot{x}^2(0)+x^2(0)>a^2$, la cible est alors une "cible épaisse" : $\dot{x}^2(T)+x^2(T)=a^2$.
Posons : $Y=(x,\dot{x})$, $\dot{Y}=(\dot{x},\ddot{x})=(Y_2,u)$, $J(u)=\int_0^T 1dt$, et la cible $Y_1^2(T)+Y_2^2(T)=a^2$.

Le Hamiltonien est $H=1+p_1Y_2+p_2u$ et l'équation de l'état adjoint $\dot{p}_1=0$, $\dot{p}_2=-p_1$, d'où $p_1=c_1$ et $p_2=-c_1t+c_2$ avec c_1 et c_2 des constantes à déterminer.

La condition de transversalité $p(T)\eta-H(T)\tau=0$ est vérifiée pour τ quelconque (T est libre) et η tel que $Y_1(T)\,\eta_1+Y_2(T)\,\eta_2=0$ (variété tangente à la cible). On en tire d'une part $H(T)=0$, et donc $H(t)=0$, $\forall t$ puisque le problème ne dépend pas explicitement du temps, et d'autre part $p_1(T)=\alpha\,Y_1(T)$ et $p_2(T)=\alpha\,Y_2(T)$ avec α une constante.

La commande optimale minimise à tout instant le Hamiltonien :

$$u^*(t)=\arg\min_{-1\leq v\leq 1}(1+p_1Y_2+p_2v)=\arg\min_{-1\leq v\leq 1}(p_2v)=-\text{signe}(p_2(t))$$

La commande est bang-bang et comme on a vu que p_2 est linéaire en temps il y a au plus une commutation. Les trajectoires sont sur les courbes $\ddot{x}=\pm 1$, soit $\dot{x}\ddot{x}=\pm\dot{x}$ ou encore $\dot{x}^2/2=\pm x+c$, c'est à dire, dans l'espace des phases (Y_1,Y_2), deux familles de paraboles qui se déduisent pas des translations parallèles à l'axe Y_1. Ces paraboles sont parcourues avec Y_2 croissant quand $u=1$ (puisque $\dot{Y_2}=u$) et avec Y_2 décroissant quand $u=-1$.

Les trajectoires dans l'espace des phases qui permettent d'atteindre la cible sans commutation sont, avec $u=1$, dans la région **A2**, région avec $Y_2<0$ comprise entre les deux demi-paraboles tangentes à la cible (soit $Y_2^2/2=Y_1\pm a$) en tireté bleu épais sur la figure 2 ; et symétriquement pour $u=-1$ dans la région **B2**.

A l'extérieur de ces deux régions, la trajectoire optimale demandera une et une seule commutation. Dans la région **A1** la commande initiale est $u=-1$ jusqu'à ce que la trajectoire rencontre une parabole avec $u=+1$ conduisant à la cible. Mais vers laquelle des paraboles avec $u=+1$ doit on commuter ? Comme $Y_2=\dot{x}=\pm t+\alpha$, le temps de parcours sur une portion de parabole à u constant est égal à la valeur absolue de la variation de Y_2. Comparons alors les temps de parcours, d'une part pour une commutation vers la trajectoire aboutissant au pôle sud de la cible et d'autre part vers une autre trajectoire arrivant aussi sur la cible (figure **??**). Partant du point M soit on rejoint directement le point Q avec $u=+1$ en un temps $Y_2(Q)-Y_2(M)$ soit on passe de M à N avec $u=-1$ en un temps $Y_2(M)-Y_2(N)$ puis on commute pour rejoindre P en un temps $Y_2(P)-Y_2(N)$ soit un temps total de $Y_2(M)+Y_2(P)-2Y_2(N)$. Le temps avec commutation sera le plus court si $Y_2(Q)-Y_2(P)>2(Y_2(M)-Y_2(N)$ ce qui sera le cas pour des points M et N suffisamment éloignés de la cible. Conclusion pour des points très éloigné de la cible la courbe de commutation est constituée des demi-paraboles atteignant respectivement les pôles sud et nord de la cible, tracées en traits épais continus sur la figure 2, avec la commande initiale étant $u=-1$ au-dessus de la courbe et $u=+1$ en-dessous.

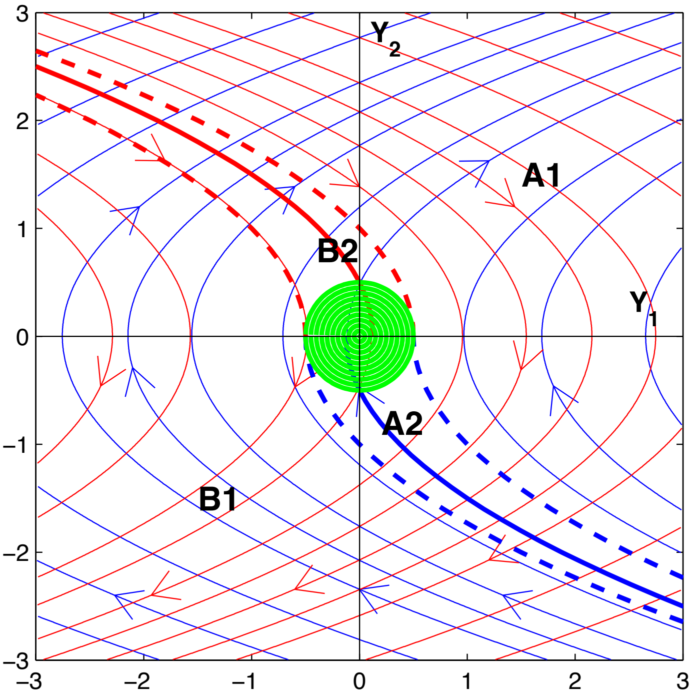


FIG. 3 – Régions déterminant la commande optimale

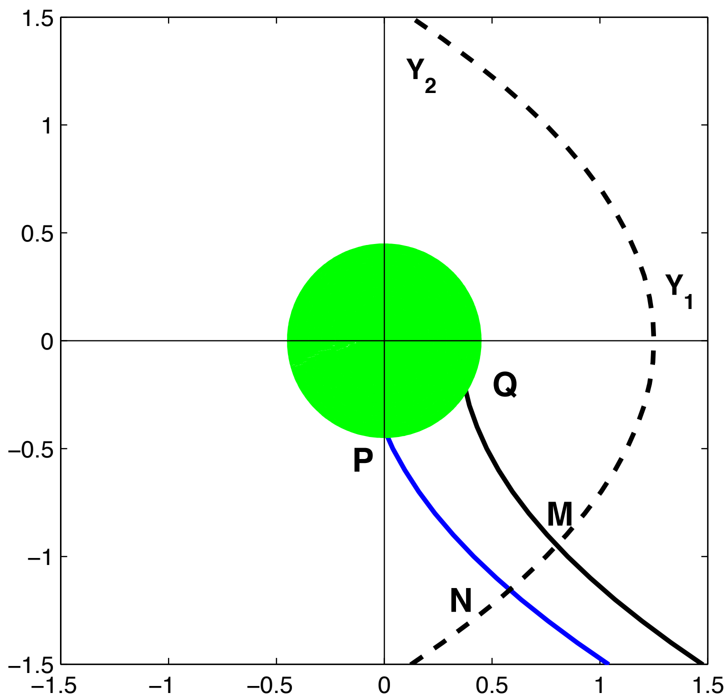


FIG. 4 – Comparaison des temps de trajet